

Να λύσετε τα παρακάτω θέματα: 1,2,3,4,5,7,9,11,12,18,19,22
24,26,27,28,29,30,31,34

A. Συναρτήσεις

✓Θέμα 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = a - \ln x$, της οποίας η C_f διέρχεται από το $A(1, 2)$.

α. Να προσδιορίσετε την τιμή του a .

β. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

γ. Να εξετάσετε, αν οι συναρτήσεις f και g με $g(x) = \ln \frac{e^2}{x}$ είναι ίσες.

δ. Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και C_h με $h(x) = 2 + \ln^2 x$.

✓Θέμα 2

Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = 1 + \ln(x-1)$ και $g(x) = e^x$.

α. Να βρείτε τη συνάρτηση $h = f \circ g$.

β. Να βρείτε τη συνάρτηση φ , για την οποία ισχύει $\varphi(g(x)) = e^x + x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Εστω $\varphi(x) = x + \ln x - 1$.

γ. Να βρείτε τις τιμές του x , για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης φ είναι πάνω από την ευθεία που διχοτομεί τις γωνίες $x\hat{O}y$ και $x'\hat{O}y'$.

δ. Να λύσετε την εξίσωση $\varphi(x) + \varphi\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

✓Θέμα 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x - 4}{x - 1}$.

α. Να βρείτε τις τιμές του α , για τις οποίες η C_f διέρχεται από το $M(2, 2)$.

Αν $\alpha = 3$, τότε:

β. Να δείξετε ότι η f είναι συνάρτηση 1-1.

γ. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .

δ. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των f και f^{-1} .

✓Θέμα 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha e^{1-x} - 1$ της οποίας η C_f διέρχεται από το $M(1, 1)$.

α. Να βρείτε την τιμή του α .

β. Να βρείτε τα κοινά σημεία της C_f με τον άξονα $x'x$.

γ. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .

δ. Να βρείτε τα x , για τα οποία η $C_{f^{-1}}$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

B. Μονοτονία Συνάρτησης

✓Θέμα 5

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x - 2$.

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

β. Να συγκρίνετε τις τιμές: $f(e)$ και $f(2)$.

γ. Να λύσετε την ανίσωση $f(x^2 - 2x) > f(x - 2)$.

δ. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 1$.

ε. Να υπολογίσετε το $\int_0^1 f(x) dx$.

Θέμα 6

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x + \sin x - 1$.

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β. Να λύσετε την ανίσωση $\sin x > 1 - 2x$.

γ. Αν $a < \beta$, να αποδείξετε ότι $\frac{\sin a - \sin \beta}{\beta - a} < 2$.

δ. Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της f .

ε. Να υπολογίσετε το εμβαδόν E του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = \pi$.

✓Θέμα 7

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^3 + x^2 - x + 2$.

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

β. Να λύσετε την ανίσωση $\ln^3 x - \ln^2 x > 1 - \ln x$.

γ. Να βρείτε τα σημεία της C_f που έχουν κλίση -2 .

δ. Να υπολογίσετε το $\int_1^2 \frac{f(x)}{x^2} dx$.

Θέμα 8

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x - 2$.

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

β. Να λύσετε την εξίσωση $x = \frac{2}{x^4 + 1}$.

γ. Να βρείτε τις εφαπτομένες της C_f που είναι παράλληλες στην ευθεία

$$\varepsilon: y = 6x - 1$$

δ. Να βρείτε το εμβαδόν E του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=2$.

✓ Θέμα 9

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \ln x - 1$.

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

β. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

i. $g(x) = \frac{1}{f(x)}$

ii. $h(x) = \sqrt{f(x)}$

γ. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} .

δ. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^3 + \ln x = 2019$ έχει ακριβώς μία λύση.

Θέμα 10

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x - 1$.

α. Να αποδείξετε ότι η f έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

β. Να λύσετε την ανίσωση $f(e^{x-1}) > f(1 - \ln x)$.

γ. Να βρείτε τις εφαπτομένες της C_f που σχηματίζουν γωνία $\omega = \frac{\pi}{4}$, με τον άξονα $x'x$.

δ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν E του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=2$.

Γ. Ολικά ακρότατα

✓Θέμα 11

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = xe^x$.

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τα ακρότατα.

β. Να αποδείξετε ότι $1 + xe^{x+1} \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = -\frac{1}{e}$.

δ. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$g(x) = \ln(1 + ef(x))$$

✓Θέμα 12

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -3x^4 + 4x^3$.

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

γ. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) + 2019 = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες.

δ. Να υπολογίσετε το $\int_{-1}^0 f(x+1) dx$.

Θέμα 13

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 + 2x^2 - 8x + 6$.

α. Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(e^{2x} - 2x) = 1$.

γ. Να βρείτε πότε ο ρυθμός μεταβολής της f είναι θετικός.

δ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τους άξονες $x'x$, $y'y$ και την ευθεία $x=1$.

Δ. Κυρτότητα

Θέμα 14

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 + 4x$.

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα.

β. Να δείξετε ότι $f'(x^2 + 1) > f'(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ. Να βρείτε την εφαπτομένη ε της C_f στο $x_0 = 1$.

δ. Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 8x - 3$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ε. Να υπολογίσετε το $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot f(\eta \mu x) dx$.

Θέμα 15

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - 2\sqrt{x}$.

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

β. Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή και να βρείτε την εφαπτομένη ε της C_f στο $x_0 = 4$.

γ. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$.

δ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν E του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , την ευθεία ε του β. ερωτήματος και την ευθεία $x = 1$.

Θέμα 16

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x^2 + 2)e^x - 2$.

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.

β. Να αποδείξετε ότι $f(e^x) \geq f(ex)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 0$.

δ. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x) = \frac{1}{f(x) - 2x}$.

ε. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(\alpha) - 2\alpha}{\alpha - 1} + \frac{e^x}{x} = 0$, $\alpha \neq 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(0, 1)$.

Ε. Τοπικά ακρότατα

Θέμα 17

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$.

- Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- Να συγκρίνετε τις τιμές: $f(3)$ και $f(e)$.
- Να λύσετε την ανίσωση $f(e^x + 3) > f(e^{2x} + 3)$.
- Να αποδείξετε ότι $f(x) \leq 15$, για κάθε $x \leq 3$.
- Να βρείτε το εμβαδόν E του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=2$.

✓Θέμα 18

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2$.

- Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τις θέσεις, το είδος και τις τιμές των ακροτάτων της.
- Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$, έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$.
- Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της C_f που οι εφαπτομένες σ' αυτά είναι κάθετες στην ευθεία $\zeta: x + 2y - 2 = 0$.
- Να υπολογίσετε το $\int_0^1 x f(x^2 + 1) dx$.

✓Θέμα 19

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x\sqrt{2-x^2}$.

- Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
- Να βρείτε τις θέσεις, το είδος και τις τιμές των τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης f .
- Να αποδείξετε ότι $|f(\eta\mu x)| \leq 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- Να υπολογίσετε το $\int_0^1 f(x) dx$.

ΣΤ. Σημείο καμπής

Θέμα 20

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+2}{e^x}$.

- Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.
- Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 0$.
- Να δείξετε ότι $f(x) \leq 2 - x$, για κάθε $x \leq 0$.
- Να λύσετε την εξίσωση $x + f(x) = 2$.

Θέμα 21

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-2)e^x + 2$.

- Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.
- Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο καμπής της.
- Να λύσετε την εξίσωση $f(x^2 + 1) = 2 - e$.
- Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > -x$.

Ζ. Εύρεση παραμέτρων

✓ Θέμα 22

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax^4 + bx^3$.

- Να βρείτε τα a, β για τα οποία η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο 1 το -1 .
Αν $a=3$ και $\beta=-4$, τότε:
- Να βρείτε το είδος του ακρότατου και στη συνέχεια, να λύσετε την εξίσωση $3x^4 - 4x^3 + 1 = 0$
- Να βρείτε τις θέσεις των σημείων καμπής της C_f .
- Να υπολογίσετε το $\int_1^e \frac{f(\ln x)}{x} dx$.

Θέμα 23

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = a \ln x + \frac{\beta}{x}$.

- Να βρείτε τις τιμές των a, β για τις οποίες το $M(1, 1)$ είναι σημείο καμπής της C_f .
Αν $a=2$ και $\beta=1$, τότε:
- Να αποδείξετε ότι $f(x) + 2 \ln 2 \geq 2$, για κάθε $x > 0$.
- Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο καμπής της.
- Να αποδείξετε ότι $f(x) < x$, για κάθε $x > 1$.

ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Α. Όρια – Ασύμπτωτες

✓ Θέμα 24

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$.

- α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.
- γ. Να εξετάσετε, αν η C_f έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$.
- δ. Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της C_f και να σχεδιάσετε τη C_f .

Θέμα 25

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

- α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.
- γ. Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της C_f και να σχεδιάσετε τη C_f .
- δ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν E του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=1$.

✓ Θέμα 26

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x-1}$.

- α. Να βρείτε τα διαστήματα του x που η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.
- β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.
- γ. Να βρείτε τις κατακόρυφες και τις οριζόντιες ασύμπτωτες της C_f και να σχεδιάσετε τη C_f .
- δ. Να υπολογίσετε το $\int_2^3 f(x)dx$.

✓ Θέμα 27

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

- Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $-\infty$.
- Να δείξετε ότι η C_f είναι πάνω από την πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.
- Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{x^2 + 1} = \sin x$.

✓ Θέμα 28

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$.

- Να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.
- Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.
- Να αποδείξετε ότι $f'(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{x^2 + 1}}$, $x \in \mathbb{R}$.
- Να υπολογίσετε το $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$.

✓ Θέμα 29

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - \frac{1}{x-1}$.

- Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.
- Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και να αποδείξετε ότι αυτή είναι η πλάγια ασύμπτωτη της C_f και στο $-\infty$.
- Να βρείτε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της C_f .
- Να υπολογίσετε το $\int_2^3 f(x) dx$.

✓ **Θέμα 30**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$.

- α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$, έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(-2, -1)$.
- γ. Να λύσετε την εξίσωση $f(e^x) = 3$.
- δ. Να βρείτε τις θέσεις των σημείων καμπής της f .

✓ **Θέμα 31**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$.

- α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και την κυρτότητα.
- β. Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και να αποδείξετε ότι αυτή είναι η πλάγια ασύμπτωτη της C_f και στο $-\infty$.
- γ. Να βρείτε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της C_f .
- δ. Να υπολογίσετε το $\int_0^1 f(x) dx$.

B. Κανόνες De L' Hospital**Θέμα 32**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$.

- α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
- β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.
- γ. Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της C_f και να σχεδιάσετε τη C_f .
- δ. Να βρείτε το εμβαδόν E του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τους άξονες $x'x$, $y'y$ και την ευθεία $x = \ln 3$.

Θέμα 33

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - x$.

- α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- β. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
- γ. Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.
- δ. Να βρείτε το a , $a > 0$, ώστε το εμβαδόν E του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , την πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$, τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $x = a$, να είναι 1.

✓Θέμα 34

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = xe^x$.

- α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τα ακρότατα και τα σημεία καμπής.
- β. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στα σημεία καμπής.
- γ. Να βρείτε την οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.
- δ. Να υπολογίσετε το $\int_0^1 f(x)dx$.

Θέμα 35

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+1}{e^x}$.

- α. Να αποδείξετε ότι $f(x) \leq 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- β. Να λύσετε την εξίσωση $f(\ln x - \frac{e}{x}) = 1$.
- γ. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.
- δ. Να βρείτε το εμβαδόν E του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και την ευθεία $x = 1$.

Θέμα 36

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + 1}{e^x}$.

- α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
- β. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και τις οριζόντιες ασύμπτωτες της C_f .
- γ. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.
- δ. Να υπολογίσετε το $\int_0^1 f(x) dx$.

Θέμα 37

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - \ln x + 1$.

- α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τα ακρότατα και την κυρτότητα.
- β. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 2$.
- γ. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και την κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .
- δ. Να λύσετε την εξίσωση $f'(f(x) - 1) = 0$.

Θέμα 38

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2 \ln x$.

- α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και την κυρτότητα.
- β. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και την κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .
- γ. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $\ln f(x) = 2019$.
- δ. Να υπολογίσετε το $\int_1^2 (x^2 - f(x)) dx$.

Θέμα 39

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x-1} - \ln x$.

- Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
- Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
- Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^{x-1} = e$, έχει ακριβώς δύο ρίζες στο διάστημα $(0, +\infty)$.
- Να υπολογίσετε το $\int_2^3 f(x) dx$.

Θέμα 40

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

- Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.
- Να βρείτε τις οριζόντιες και τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της C_f .
- Να αποδείξετε ότι $x^{x+1} > (x+1)^x$, για κάθε $x > e$.
- Να υπολογίσετε το εμβαδόν E του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = e$.

Θέμα 41

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$, $x > 0$.

- Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
- Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x = a \cdot e^{-\frac{1}{x}}$, για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$, στο $(0, +\infty)$.
- Να βρείτε τις κατακόρυφες και τις πλάγιες ασύμπτωτες της C_f .

Θέμα 42

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x-1} - \ln x$.

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

γ. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - x}{f(x) - 1}$.

δ. Να υπολογίσετε το $\int_1^2 xf(x)dx$.

Θέμα 43

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-1)\ln x$.

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και την κυρτότητα.

β. Να δείξετε ότι $(x+1)^x < (x+2)^{x+1}$, για κάθε $x > 0$.

γ. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 1$ έχει, ακριβώς, δύο ρίζες.

δ. Αν x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος γ., να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (x_1, x_2)$, τέτοιο, ώστε $f'(x_0) + f(x_0) = 1$.

Γ. Συνεχής - Παραγωγίσιμη συνάρτηση**Θέμα 44**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^x & , x < 0 \\ \alpha & , x = 0 \\ \beta + \sin x & , x > 0 \end{cases}$

α. Να βρείτε τις τιμές των α , β για τις οποίες η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

Αν $\alpha = 1$ και $\beta = 0$, τότε:

β. Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

γ. Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f .

δ. Να υπολογίσετε το $\int_{-1}^{\pi} xf(x)dx$.

Θέμα 45

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + \alpha^3, & x \leq 1 \\ \ln x - \alpha, & x > 1 \end{cases}$

α. Να βρείτε την τιμή του α , για την οποία η f είναι συνεχής.

Αν $\alpha = 0$, τότε:

β. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ και να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο αυτό.

γ. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

δ. Να υπολογίσετε το $\int_0^2 f(x) dx$.

Θέμα 46

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x + \sin x, & x \leq 0 \\ \ln(x+1) + \alpha, & x > 0 \end{cases}$

α. Να βρείτε την τιμή του α , για την οποία η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

Αν $\alpha = 1$, τότε:

β. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

γ. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

δ. Να υπολογίσετε το $\int_{-\pi}^1 f(x) dx$.

Θέμα 47

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^x + \alpha, & x \leq 0 \\ x \ln x, & x > 0 \end{cases}$

α. Να βρείτε την τιμή του α για την οποία η f είναι συνεχής.

Αν $\alpha = -1$, τότε:

β. Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

γ. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f .

δ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν E του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=e$.