

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
11 ΙΟΥΝΙΟΥ 2018

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία, σελ. 99 σχολικού βιβλίου.

A2. **a.** Λάθος.

b. Διότι για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$ είναι 1-1, αλλά όχι γνησίως μονότονη.

A3. Θεωρία, σελ. 216 σχολικού βιβλίου.

A4. **a.** Λάθος, **b.** Λάθος, **γ.** Σωστό, **δ.** Σωστό, **ε.** Σωστό

ΘΕΜΑ Β

B1. Για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, είναι:

$$f'(x) = \left(x - \frac{4}{x^2} \right)' = (x)' - 4 \left(\frac{1}{x^2} \right)' = 1 - 4 \left(\frac{-2x}{x^4} \right) =$$

$$= 1 + \frac{8}{x^3} = \frac{x^3 + 2^3}{x^3} = \frac{(x+2) \cdot (x^2 - 2x + 4)}{x^3}$$

$$\text{Είναι } x^2 - 2x + 4 = (x^2 - 2x + 1) + 3 = (x-1)^2 + 3 > 0$$

$$\text{Άρα } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x+2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x+2}{x^3} > 0 \Leftrightarrow (x+2) \cdot x^3 > 0$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{x+2}{x^3} < 0 \Leftrightarrow (x+2) \cdot x^3 < 0$$

Προκύπτει ο επόμενος πίνακας μεταβολών:

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$x+2$	-	+	+	+
x^3	-	-	+	+
f'	+	-	-	+
f		$\tau.\mu.$		

Επομένως η f :

- Είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, -2]$ και $(0, +\infty)$.
- Είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-2, 0]$.
- Έχει τοπικό μέγιστο στη θέση $x_0 = -2$, την τιμή $f(-2) = -2 - \frac{4}{4} = -3$.

B2. Για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ είναι:

$$f''(x) = (f'(x))' = \left(1 + \frac{8}{x^3}\right)' = 8\left(\frac{1}{x^3}\right)' = 8 \cdot \frac{-3x^2}{x^6} = -\frac{24}{x^4} < 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Άρα η f στρέφει τα κούλα κάτω σε καθέγια από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$, ενώ δεν παρουσιάζει σημείο καμπής.

B3

a) Κατακόρυφες ασύμπτωτες:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x = 0, \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-4}{x^2}\right) = -\infty, \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty. \text{ Άρα η } f \text{ έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ενθεία } x = 0 \text{ (κατακόρυφος άξονας), στο } -\infty.$$

b) Οριζόντιες ασύμπτωτες

$$\beta 1) \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{4}{x^2}\right) = 0.$$

Άρα $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ και η f δεν έχει οριζόντια ασύπτωτη στο $-\infty$.

$$\beta 2) \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{4}{x^2}\right) = 0.$$

Άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ και η f δεν έχει οριζόντια ασύπτωτη στο $+\infty$.

γ) Πλάγιες ασύμπτωτες:

$$\text{Είναι } \frac{f(x)}{x} = 1 - \frac{4}{x^3} = \frac{x^3 - 4}{x^3}.$$

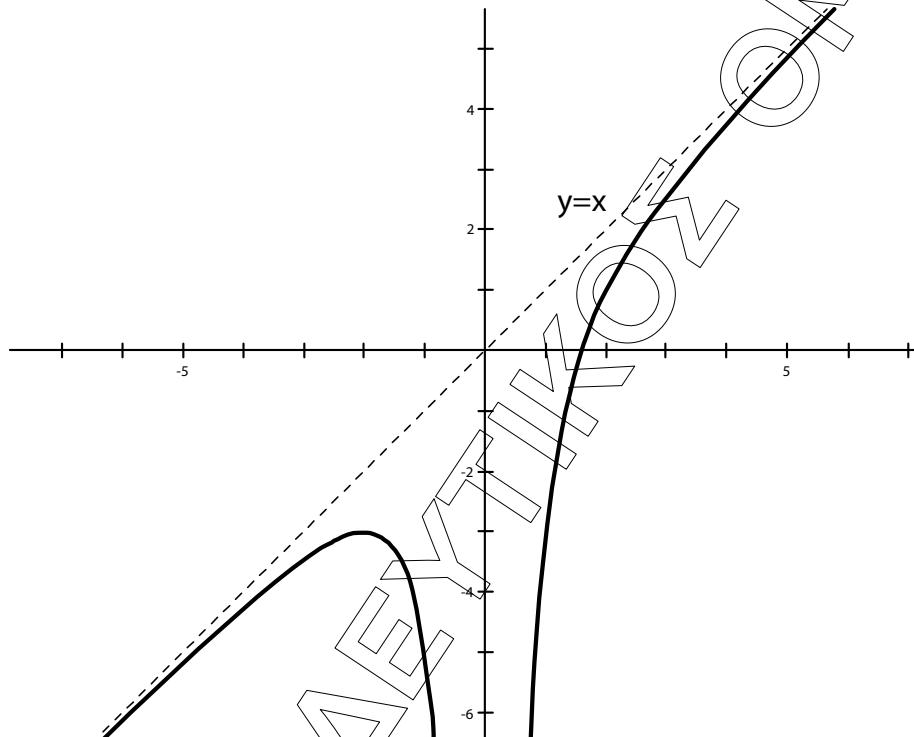
Αρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$. ($= \alpha$)

Επίσης $f(x) - x = \frac{-4}{x^3}$, άρα

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = 0$ ($= \beta$)

Άρα η f έχει πλάγια ασύπτωτη την ευθεία $y = x$ και στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

B4



$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{4}.$$

Επομένως η γραφική παράσταση της f τέμνει τον οριζόντιο άξονα στο σημείο $A(\sqrt[3]{4}, 0)$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Το πρώτο τμήμα αφού είναι μήκους x και κατασκευάζουμε τετράγωνο. Η πλευρά του τετραγώνου θα είναι $\frac{x}{4}$, επομένως το εμβαδόν του τετραγώνου θα είναι

$$E_1 = \left(\frac{x}{4}\right)^2 = \frac{x^2}{16}.$$

Το δεύτερο τμήμα θα είναι μήκους $8 - x$. Αν ρ η ακτίνα του κύκλου που κατασκευάζεται με το τμήμα αυτό, τότε θα είναι $2\pi\rho = 8 - x \Leftrightarrow \rho = \frac{8-x}{2\pi}$.

Άρα το εμβαδόν του κύκλου θα είναι

$$E_2 = \pi \rho^2 = \pi \left(\frac{8-x}{2\pi} \right)^2 = \pi \frac{(8-x)^2}{4\pi^2} = \frac{(8-x)^2}{4\pi} = \frac{64+x^2-16x}{4\pi}.$$

Επομένως το άθροισμα των εμβαδών θα είναι

$$\begin{aligned} E(x) &= E_1 + E_2 = \frac{x^2}{16} + \frac{64+x^2-16x}{4\pi} = \\ &= \frac{\pi x^2 + 256 + 4x^2 - 64x}{16\pi} = \frac{(\pi+4)x^2 - 64x + 256}{16\pi} \end{aligned}$$

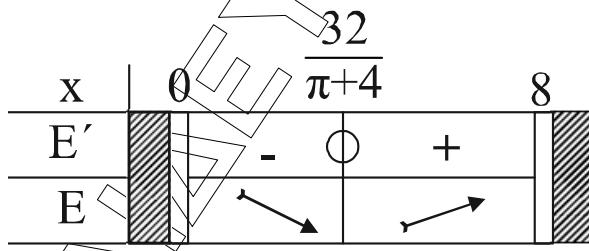
$$\text{Είναι } x > 0 \text{ και } 8-x > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 8 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 8.$$

Γ2. Είναι $E'(x) = \frac{1}{16\pi} [2(\pi+4)x - 64]$, $0 < x < 8$.

$$\text{Είναι } E'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2(\pi+4)x - 64 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{32}{\pi+4}.$$

Άρα από τον πίνακα μεταβολών η E παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = \frac{32}{\pi+4}$

$$\text{με τημή } E = \left(\frac{32}{\pi+4} \right) = \frac{(\pi+4) \frac{32^2}{(\pi+4)^2} - 64}{16\pi} = \frac{32}{\pi+4} + 256 = \dots = \frac{16}{\pi+4}$$



$$\text{Tότε η πλευρά του τετράγωνου είναι } \frac{x}{4} = \frac{32}{\pi+4} = \frac{8}{\pi+4}$$

και η διάμετρος του κύκλου είναι

$$2\rho = 2 \cdot \frac{8-x}{2\pi} = \frac{8-x}{\pi} = \frac{8-\frac{32}{\pi+4}}{\pi} = \frac{8\pi}{\pi(\pi+4)} = \frac{8}{\pi+4}.$$

Άρα η πλευρά του τετραγώνου είναι ίση με τη διάμετρο του κύκλου.

Γ3. Αρκεί ν.δ.ο. η εξίσωση $E(x) = 5$ έχει μοναδική λύση στο $(0, 8)$.

$$\text{Για το διάστημα } A_l = \left(0, \frac{32}{\pi+4} \right]:$$

$$A_l = \left(0, \frac{32}{\pi+4} \right] \xrightarrow[E \text{ συνεχής}]{E \text{ γνησίως φθίνουσα}} E(A_l) = \left[E\left(\frac{32}{\pi+4}\right), \lim_{x \rightarrow 0^+} E(x) \right] = \left[\frac{16}{\pi+4}, \frac{16}{\pi} \right]$$

διότι $\lim_{x \rightarrow 0^+} E(x) = \frac{16}{\pi} \cdot \frac{16}{\pi + 4} \approx 2,24$ και $\frac{16}{5} \approx 5,09$.

Άρα $5 \in E(A_1)$ και άρα από Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών υπάρχει $x_0 \in A_1 : E(x_0) = 5$ και επειδή η E είναι ↓ στο A_1 , άρα το x_0 είναι μοναδικό, στο διάστημα A_1 .

Επίσης για το διάστημα $A_2 = \left[\frac{32}{\pi + 4}, 8 \right]$:

$$A_2 = \left[\frac{32}{\pi + 4}, 8 \right] \xrightarrow[E \text{ συνεχής}]{E \text{ γνησίως ανέξουσα}} E(A_2) = \left[E\left(\frac{32}{\pi + 4}\right), \lim_{x \rightarrow 8^-} E(x) \right] = \left[\frac{16}{\pi + 4}, 4 \right] \text{ διότι}$$

$$\lim_{x \rightarrow 8^-} E(x) = \lim_{x \rightarrow 8^-} \frac{(\pi + 4)x^2 - 64x + 256}{16\pi} = \frac{(\pi + 4)8^2 - 64 \cdot 8 + 256}{16\pi} = 4$$

$5 \notin E(A_2)$ άρα η εξίσωση $E(x) = 5$ είναι αδύνατη στο A_2 .

$$\text{Επομένως υπάρχει μοναδική τιμή } x_0 \in \left(0, \frac{32}{\pi + 4} \right) : E(x_0) = 5$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f(x) = 2x^{x-a} - x^2, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{με } \alpha > 1.$

Είναι $f'(x) = 2 \cdot e^{x-a} - 2x^2, \quad x \in \mathbb{R}$.

$$f''(x) = (2 \cdot e^{x-a} - 2x)' = 2 \cdot e^{x-a} - 2 = 2(e^{x-a} - 1), \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^{x-a} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{x-a} = 1 \Leftrightarrow e^{x-a} = e^0 \Leftrightarrow x - a = 0 \Leftrightarrow x = a$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow e^{x-a} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{x-a} > 1 \Leftrightarrow e^{x-a} > e^0 \stackrel{e^x \text{ γν. ανέξουσα}}{\Leftrightarrow} x - a > 0 \Leftrightarrow x > a$$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow e^{x-a} - 1 < 0 \Leftrightarrow e^{x-a} < 1 \Leftrightarrow e^{x-a} < e^0 \stackrel{e^x \text{ γν. ανέξουσα}}{\Leftrightarrow} e - a < 0 \Leftrightarrow x < a$$

Συγκεντρωτικό:

X	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	○	+
f	↙	S.K.	↗

Άρα η f παρουσιάζει σημείο καμπής στη θέση $x_0 = a$.

Δ2 α) $f'(x) = 2(e^{x-a} - x), \quad x \in \mathbb{R}$

βρισκούμε το όριο της f' στο $x \rightarrow -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x-a} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{e^a} \cdot e^x \right) = \frac{1}{e^a} \cdot 0 = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty. \text{ Άρα } \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = +\infty$$

β) $f'(a) = 2(e^{a-a} - a) = 2(1-a) < 0.$

γ) Βρίσκουμε το όριο της f' όταν $x \rightarrow +\infty$

$$\text{Είναι } f'(x) = \frac{2}{e^a} \cdot e^x - 2x = x \cdot \left(\frac{2}{e^a} \cdot \frac{e^x}{x} - 2 \right).$$

$$\text{Επειδή } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{e^a} \cdot \frac{e^x}{x} - 2 \right) = +\infty$$

$$\text{Επίσης } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty, \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty.$$

Η f' είναι συνεχής στο \mathbb{R} και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, a]$ (λόγω του B1)

$$\text{Άρα } f'((-\infty, a]) = [f'(a), \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x)] = [2 \cdot (1-a), +\infty).$$

Η f' είναι συνεχής στο \mathbb{R} και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[a, +\infty)$ (λόγω του Δ1)

$$\text{Άρα } f'([a, +\infty)) = [f'(a), \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)] = [2 \cdot (1-a), +\infty), \text{ με } 2(1-a) < 0.$$

Άρα υπάρχει τιμή x_1 στο διάστημα $(-\infty, a]$ ώστε $f'(x_1) = 0$ και τιμή x_2 στο διάστημα $[a, +\infty)$, ώστε $f'(x_2) = 0$.

Όμως στο $(-\infty, a]$ η f' είναι γνησίως φθίνουσα
άρα $x < x_1 \Rightarrow f'(x) > f'(x_1) \Rightarrow f'(x) > 0$

για $x > x_1 \Rightarrow f'(x) < f'(x_1) \Rightarrow f'(x) < 0$

Επίσης στο $[a, +\infty)$ η f' είναι γνησίως αύξουσα
άρα $x < x_2 \Rightarrow f'(x) < f'(x_2) \Rightarrow f'(x) < 0$

για $x > x_2 \Rightarrow f'(x) > f'(x_2) \Rightarrow f'(x) > 0$

Δηλαδή προκύπτει ο επόμενος πίνακας μεταβολών της f'

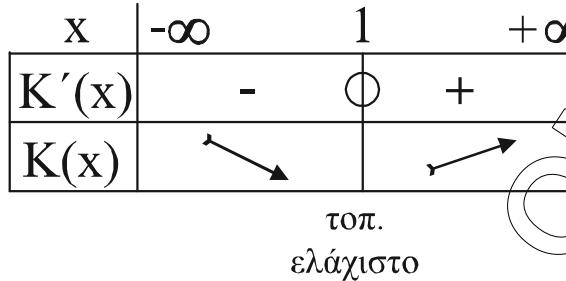
X	$-\infty$	x_1	a	x_2	$+\infty$
f'	$+\infty$	+	-	+	$+\infty$
f	\nearrow	$\tau.\mu.$	\searrow	$\tau.\varepsilon.$	\nearrow

Προκύπτει ότι υπάρχουν μοναδικά x_1, x_2 τέτοια ώστε η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_1 και τοπικό ελάχιστο στο x_2 .

- Δ3.** Αφού $\alpha > 1$ και f' γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, \alpha]$ ισχύει:
- $$a > 1 \Rightarrow f'(a) < f'(1) \Rightarrow 2 - 2a < 2 \cdot e^{1-a} - 2 \Rightarrow e^{1-a} > 2 - a \quad (1).$$
- Στο διάστημα (α, x_2) η f είναι γνησίως φθίνουσα άρα το
- $$f((a, x_2)) = \left(\lim_{x \rightarrow x_2^-} f(x), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right) = \left(\lim_{x \rightarrow x_2^-} f(x), 2 - a^2 \right), \text{ δηλαδή}$$
- $$f(x) < 2 - a^2 = f(a) \quad (2)$$
- Είναι $f(1) = 2 \cdot e^{1-a} - 1$
- Όμως λόγω της (1)
- $$e^{1-a} > 2 - a \Rightarrow 2e^{1-a} > 2(2 - a) \Rightarrow 2 \cdot e^{1-a} - 1 > 4 - 2a - 1 \Rightarrow f(1) > 3 - 2a.$$
- Όμως $3 - 2a > 2 - a^2 \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 > 0 \Leftrightarrow (a - 1)^2 > 0$, που ισχύει.
- Άρα $f(1) > f(a)$ (3)
- Από (2) και (3) έπειτα:
- $f(x) < f(a) < f(1)$, άρα η $f(x) = f(1)$ είναι αδύνατη.
- (β' τρόπος)
- Επειδή $\alpha > 1$ είναι $1 - \alpha < 0$ και $e^{1-a} < e^0 \Leftrightarrow e^{1-a} < 1 \Leftrightarrow e^{1-a} - 1 < 0$.
- Όμως $f'(1) = 2(e^{1-a} - 1)$, άρα $f'(1) < 0$.
- Αν $1 \leq x_1$ επειδή η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, \alpha]$ άρα και στο $(-\infty, x_1] \subseteq (-\infty, \alpha]$ είναι $f'(1) \geq f'(x_1) \Leftrightarrow f'(1) \geq 0$ άτοπο
- Άρα $1 > x_1$ ή $\alpha > 1 > x_1$.
- Στο διάστημα $[a, x_2) \subseteq [x_1, x_2]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα. Άρα επειδή
- $$a > 1 \Rightarrow f(a) < f(1) \quad (1)$$
- Επίσης είναι $f((a, x_2)) = (f(x_2), f(\alpha))$.
- Άρα για κάθε $x \in (a, x_2)$ είναι $f(x) < f(a) < f(1)$ (λόγω της 1).
- Άρα η $f(x) = f(1)$ είναι αδύνατη.
- (γ' τρόπος)
- $f(x)$ γνησίως φθίνουσα στο $[a, x_2]$ άρα
- $$f[a, x_2] = [f(x_2), f(\alpha)]$$
- Όμως $f(1) = 2 \cdot e^{1-a} - 1$ και $f(\alpha) = 2 - a^2$.
- Θα δείξουμε ότι: $f(1) > f(\alpha) \Leftrightarrow 2 \cdot e^{1-a} - 1 > 2 - a^2 \Leftrightarrow 2 \cdot e^{1-a} + a^2 - 3 > 0$,
- με $a > 1$.
- Έστω $K(x) = 2 \cdot e^{1-x} + x^2 - 3$, $x \in \mathbb{R}$. Αρκεί να δείξουμε ότι $K(x) > 0$ για κάθε $x > 1$.
- Η $K(x)$ παραγωγίσιμη ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγισμών με:
- $$K'(x) = -2 \cdot e^{1-x} + 2 \cdot x$$
- Η $K'(x)$ παραγωγίσιμη ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγισμών με:
- $$K''(x) = 2 \cdot e^{1-x} + 2 > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Άρα $K'(x)$ γνησίως αύξουσα και ισχύει $K'(1) = 0$.

$$\begin{array}{ccc} \text{Για } x < 1 & \xrightarrow{\substack{K'(x) \text{ γνησίως αύξουσα}} & K'(x) < K'(1) = 0 \text{ άρα } K(x) \text{ είναι γνησίως φθίνουσα} \\ \text{Για } x > 1 & \xrightarrow{\substack{K'(x) \text{ γνησίως αύξουσα}} & K'(x) > K'(1) = 0 \text{ άρα } K(x) \text{ είναι γνησίως αύξουσα} \end{array}$$



Η $K(x)$ έχει ελάχιστο το $K(1) = 0$, και $K(x) > K(1) = 0$ για κάθε $x > 1$.

Δ4 Για $\alpha = 2$, είναι $f(x) = 2 \cdot e^{x-2} - x^2$.

Η εφαπτομένη της f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 2$ είναι η ευθεία:

$$\begin{aligned} y - f(2) &= f'(2) \cdot (x - 2) \Leftrightarrow y - (-2) = -2(x - 2) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y + 2 = -2x + 4 \Leftrightarrow y = -2x + 2 \Leftrightarrow y = -2(x - 1) \end{aligned}$$

Επειδή η f στρέφει τα κοίλα άνω στο διάστημα $[a, +\infty) = [2, +\infty)$, προκύπτει ότι για $x \in [2, 3]$:

$$\begin{aligned} f(x) &\geq -2(x - 1) \Leftrightarrow f(x) \cdot \sqrt{x-2} \geq -2(x - 1)\sqrt{x-2} \Leftrightarrow \\ f(x) \cdot \sqrt{x-2} &- (-2(x - 1)\sqrt{x-2}) \geq 0. \end{aligned}$$

με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x = 2$.

Άρα

$$\begin{aligned} \int_2^3 f(x) \cdot \sqrt{x-2} - (-2(x - 1)\sqrt{x-2}) dx &> 0 \Leftrightarrow \\ \int_2^3 f(x) \sqrt{x-2} dx &> \int_2^3 -2(x - 1)\sqrt{x-2} dx \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \int_2^3 f(x) \sqrt{x-2} dx &> -2 \int_2^3 (x - 2 + 1)\sqrt{x-2} dx. \quad (1) \end{aligned}$$

Για το ολοκλήρωμα του 2^{ου} μέλους θέτουμε $u = x - 2$, οπότε αυτό γράφεται:

$$\int_2^3 (x - 2 + 1)\sqrt{x-2} dx = \int_0^1 (u + 1)\sqrt{u} du.$$

Έτσι η (1) γράφεται

$$\begin{aligned} \int_2^3 f(x) \sqrt{x-2} dx &> -2 \int_0^1 (u + 1)\sqrt{u} du \\ \Leftrightarrow \int_2^3 f(x) \sqrt{x-2} dx &> -2 \int_0^1 (u^{3/2} + u^{1/2}) du, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_2^3 f(x) \sqrt{x-2} \, dx > -2 \left[\frac{2}{5} u^{5/2} \right]_0^1 - 2 \left[\frac{2}{3} u^{3/2} \right]_0^1 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \int_2^3 f(x) \sqrt{x-2} \, dx > -2 \left(\frac{2}{5} \right) - 2 \left(\frac{2}{3} \right) \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \int_2^3 f(x) \sqrt{x-2} \, dx > -\frac{4}{5} - \frac{4}{3} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \int_2^3 f(x) \sqrt{x-2} \, dx > -\frac{32}{15}
 \end{aligned}$$

AELA

EKTALEYTIKOV

OMNIAZ