ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

ΕΠΑ.Λ.

8 ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. **α.** Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ. 28.

Α2. **α.** Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ. 59.

β. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ. 59.

Α3. **α.** Λάθος (Λ)
β. Σωστό (Σ)
γ. Λάθος (Λ)
δ. Λάθος (Λ)
ε. Σωστό (Σ)

ΘΕΜΑ Β

Β1. Είναι $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{4} = 2.$

Έτσι από τον τύπο $\frac{s}{\overline{x}} = CV$ έχουμε $\frac{2}{\overline{x}} = 0,2 \Leftrightarrow \overline{x} = \frac{2}{0,2} \Leftrightarrow \overline{x} = 10$

Β2. Είναι

$$\frac{11+7+\kappa+13+11+10}{6} = \overline{x} \Leftrightarrow \frac{52+\kappa}{6} = 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 52+\kappa = 60 \Leftrightarrow \kappa = 8$$

Β3. Με $\kappa = 8$ οι τιμές του δείγματος σε αύξουσα σειρά είναι: 7, 8, 10, 11, 11, 13. Επειδή το πλήθος του δείγματος είναι 6 (άρτιος) η διάμεσος ισούται με το ημιάθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων. Δηλαδή $\delta = \frac{10+11}{2} = 10,5$.

Εύρος**:** $R = 13 - 7 = 6$.

Β4. Εάν από κάθε τιμή του δείγματος αφαιρεθεί ο αριθμός 2 οι τιμές γίνονται: 5, 6, 8, 9, 9, 11. Τότε η νέα μέση τιμή $\overline{x}_1 = \frac{5+6+8+9+9+11}{6} = \frac{48}{6} = 8$.

Ενώ η νέα τιμή για την τυπική απόκλιση:

$$S_1 = \sqrt{\frac{(5-8)^2+(6-8)^2+(8-8)^2+(9-8)^2+(9-8)^2+(11-8)^2}{6}} =$$

$$= \sqrt{\frac{9+4+1+1+9}{6}} = \sqrt{\frac{24}{6}} = \sqrt{4} = 2.$$

Τότε ο νέος συντελεστής μεταβλητότητας γίνεται:

$$CV_1 = \frac{S_1}{\overline{x}_1} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0,25 > 0,1.$$

Από το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

<u>Β τρόπος:</u>

Από εφαρμογή του σχολικού βιβλίου οι νέες τιμές για τη μέση τιμή $\overline{x}_1$ και τυπική απόκλιση S_1 θα είναι

$\overline{x}_1 = \overline{x} - 2 = 8$

$S_1 = S = 2$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι παραγωγίσιμη ως ρίζα πολυωνυμικής με:

$$f'(x) = \left(\sqrt{x^2-2x+10}\right)' = \frac{\left(x^2-2x+10\right)'}{2\sqrt{x^2-2x+10}} = \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+10}} = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+10}}$$

Γ2. Επειδή $\sqrt{x^2-2x+10} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, το πρόσημο και οι ρίζες της $f'(x)$ δίνονται από το πρόσημο και τις ρίζες του αριθμητή $x-1$.

Έτσι

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x-1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$

Δηλαδή έχουμε τον πίνακα μεταβλητών:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'		−	0	+	
f		↘	min	↗	

Προκύπτει έτσι ότι:

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$.

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

Η f έχει ελάχιστη τιμή $f(1) = \sqrt{1^2 - 2\cdot 1 + 10} = \sqrt{9} = 3$.

για $x = 1$. Άρα $f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow f(x) \geq 3$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ3. Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f στο σημείο $\mathrm{M}(5, f(5))$ έχει εξίσωση της μορφής $y = \lambda x + \beta$, όπου $\lambda = f'(5) = \dfrac{5-1}{\sqrt{5^2 - 2\cdot 5 + 10}} = \dfrac{4}{\sqrt{25}} = \dfrac{4}{5}$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) έτσι γίνεται $y = \dfrac{4}{5}x + \beta$.

Όμως η (ε) διέρχεται και από το σημείο $\mathrm{M}(5, f(5))$

άρα $f(5) = \dfrac{4}{5}\cdot 5 + \beta \Leftrightarrow 5 = 4 + \beta \Leftrightarrow \beta = 1$.

Άρα η (ε) έχει εξίσωση $y = \dfrac{4}{5}x + 1$.

Γ4. Στην (ε) θέτουμε $x = 0$ οπότε $y = 1$. Έτσι παίρνουμε το σημείο $B(0, 1)$ στο οποίο η (ε) τέμνει τον $y'y$.

Αν τώρα θέσουμε $y = 0$, παίρνουμε $\dfrac{4}{5}x + 1 = 0 \Leftrightarrow 4x + 5 = 0 \Leftrightarrow 4x = -5 \Leftrightarrow x = -\dfrac{5}{4}$.

Έτσι βρίσκουμε το σημείο $A\left(-\dfrac{5}{4}, 0\right)$ στο οποίο η (ε) τέμνει τον $x'x$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με:

$f'(x) = \left(x^3 - 3x^2 + \lambda x\right)' = 3x^2 - 6x + \lambda,\ x \in \mathbb{R}$.

Για $\lambda = 3$ είναι $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3\left(x^2 - 2x + 1\right) = 3(x-1)^2$.

Προκύπτει ότι $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$, όμως η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στα διαστήματα $(-\infty, 1)$ και $(1, +\infty)$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$+$	
f			$\nearrow$		

Είναι $\dfrac{3}{8} = \dfrac{2}{24}$ και $\dfrac{5}{6} = \dfrac{20}{24}$, οπότε $\dfrac{3}{8} < \dfrac{5}{6}$ και επειδή f είναι γνησίως αύξουσα προκύπτει $f\left(\dfrac{3}{8}\right) < f\left(\dfrac{5}{6}\right)$.

Δ2. Για $\lambda = 3$, είναι:

$$\frac{f'(x)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x^2-x\right)}=\frac{3x^2-6x+3}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x^2-x\right)}=\frac{3\left(x^2-2x+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)x\left(x-1\right)}=\frac{3\left(x-1\right)^2}{\left(\sqrt{x}-1\right)x\left(x-1\right)}=$$

$$=\frac{3\left(x-1\right)}{x\left(\sqrt{x}-1\right)}=\frac{3\left(x-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{x\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{3\left(x-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{x\left(x-1\right)}=\frac{3\left(\sqrt{x}+1\right)}{x}$$

Έτσι

$$\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x^2-1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{3\left(\sqrt{x}+1\right)}{x}=\frac{3\left(\sqrt{1}+1\right)}{1}=6$$

Δ3. Για $\lambda = 3$ είναι $f(x)=x^3-3x^2+3x$ και $f'(x)=3x^2-6x+3=3\left(x^2-2x+1\right)=3\left(x-1\right)^2$.
Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης σε ένα σημείο με τετμημένη x_0 ισούται με $\lambda=f'(x_0)=3\left(x_0-1\right)^2$. Όμως $3\left(x_0-1\right)^2\geq 0$ με ελάχιστη τιμή την τιμή $\lambda = 0$ για $x_0 = 1$.
Δηλαδή στο το σημείο στο οποίο η εφαπτομένη έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης είναι το $A\left(1, f(1)\right)$ δηλαδή το $A\left(1,1\right)$.

Δ4. Για $\lambda\in\mathbb{R}$ είναι $f'(x)=3x^2-6x+\lambda,\ x\in\mathbb{R}$.
Δηλαδή η f' είναι τριώνυμο του οποίου οι ρίζες και το πρόσημο εξαρτώνται από την διακρίνουσα $\Delta=\left(-6\right)^2-4\cdot 3\cdot\lambda=36-12\lambda$.

α. Αν $\Delta>0\Leftrightarrow 36-12\lambda>0\Leftrightarrow -12\lambda>-36\Leftrightarrow\lambda<3$
τότε η f' έχει δύο ρίζες x_1,x_2 με $x_1<x_2$ και προκύπτει ο επόμενος πίνακας μεταβολών

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
f'		+	0		0	+	
f		↗	max	↘	min	↗	

β. $\Delta=0\Leftrightarrow 36-12\lambda=0\Leftrightarrow\lambda=3$. Τότε η f' έχει μία ρίζα διπλή και όπως απαντήθηκε στο ερώτημα Δ1, η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και δεν παρουσιάζει ακρότατα.

γ. Αν $\Delta<0\Leftrightarrow 36-12\lambda<0\Leftrightarrow\lambda>3$: Τότε η f' δεν έχει ρίζες και προκύπτει ο επόμενος πίνακας:

x	$-\infty$		$+\infty$
f'		+	
f		↗	

Η f δεν παρουσιάζει ακρότατα.
Από α, β, γ προκύπτει ότι η f δεν παρουσιάζει ακρότατα για $\lambda \geq 3$. Δηλαδή η μικρότερη τιμή για την οποία δεν παρουσιάζει ακρότατα είναι $\lambda = 3$.