

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
(ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
17 ΙΟΥΝΙΟΥ 2020
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1 Σελίδα 111 Σχολικού βιβλίου, Θεώρημα.

A2 Σελίδα 104 Σχολικού βιβλίου, ορισμός.

A3 Σελίδα 74 Σχολικού βιβλίου, Θεώρημα.

A4 α) Δ

β) Έστω $f(x) = x$ με $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

άρα το όριο της $\frac{1}{f}$ στο $x = 0$ δεν υπάρχει.

A5 α) Σωστό, β) Σωστό, γ) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

B1 Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R} - \{3\}$

$$\text{Με } f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \frac{3x_1 + 1}{x_1 - 3} = \frac{3x_2 + 1}{x_2 - 3} \Leftrightarrow 3x_1x_2 + x_2 - 9x_1 - 3 = 3x_1x_2 + x_1 - 9x_2 - 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10 \cdot x_2 \neq 10 \cdot x_1 \Leftrightarrow x_2 = x_1 \Rightarrow f \text{ είναι "1-1" επομένως αντιστρέφεται.}$$

B2 Είναι $y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{3x+1}{x-3} \Leftrightarrow yx - 3y = 3x + 1 \Leftrightarrow (y-3)x = 3y + 1$ (1)

$$\text{Αν } y - 3 = 0 \Leftrightarrow y = 3 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} 0 = 10 \text{ άτοπο}$$

$$\Rightarrow y \neq 3 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} x = \frac{3y+1}{y-3}$$

$$\text{Πρέπει } x \neq 3 \Rightarrow \frac{3y+1}{y-3} \neq 3 \Leftrightarrow 3y+1 \neq 3y-9 \Leftrightarrow 1 \neq -9 \text{ ισχύει}$$

$$\text{Άρα } f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{x-3} \text{ με } x \neq 3$$

Οι συναρτήσεις f και f^{-1} έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού.

$$A = \mathbb{R} - \{3\} \text{ και για κάθε } x \in A \text{ ισχύει } f(x) = f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{x-3}$$

B3 Για να ορίζεται η $f \circ f$ πρέπει: $\left. \begin{matrix} x \in A_f \\ f(x) \in A_f \end{matrix} \right\}$

$$\left. \begin{matrix} x \neq 3 \\ f(x) \neq 3 \end{matrix} \right\} x \neq 3 \text{ διότι } f(x) \neq 3 \text{ από } B_2.$$

Έτσι για $x \neq 3 \Rightarrow (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(f^{-1}(x)) = x$
διότι από B_2 είναι $f(x) = f^{-1}(x)$.

B4 Είναι $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \frac{3x+1}{x-3} = \frac{0}{-\frac{10}{3}} = 0$.

Επίσης $\left| f(x) \cdot \eta\mu \frac{1}{3x+1} \right| \Rightarrow \left| f(x) \right| \cdot \left| \eta\mu \frac{1}{3x+1} \right| \leq |f(x)| \quad (1)$

αφού $\left| \eta\mu \frac{1}{3x+1} \right| \leq 1$ κοντά στο $-1/3$.

Άρα από (1) $\Rightarrow \left| f(x) \cdot \eta\mu \frac{1}{3x+1} \right| \leq |f(x)| \Rightarrow -|f(x)| \leq f(x) \cdot \eta\mu \frac{1}{3x+1} \leq |f(x)| \quad (2)$

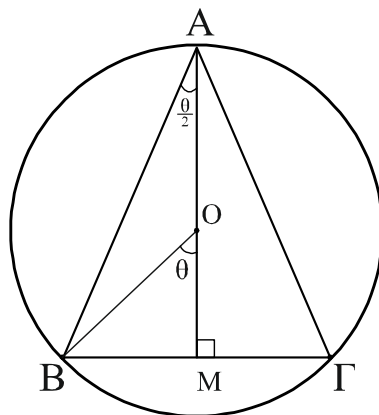
Είναι $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} f(x) \right| = 0$

Επίσης $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} (-|f(x)|) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \left(f(x) \cdot \eta\mu \frac{1}{3x+1} \right) = 0$

από το κριτήριο παρεμβολής.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Από το ορθογώνιο τρίγωνο έχουμε $OM = \text{συν}\theta$, $OA = 1$
 $BM = \eta\mu \theta$



Άρα

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} AM \cdot B\Gamma = \frac{1}{2} (AO + OM) \cdot 2BM = (1 + \sigma\upsilon\nu\theta) \cdot \eta\mu\theta \quad \theta \in (0, \pi).$$

Γ2. Θεωρώ $E(\theta) = (1 + \sigma\upsilon\nu\theta) \cdot \eta\mu\theta \quad \theta \in (0, \pi)$

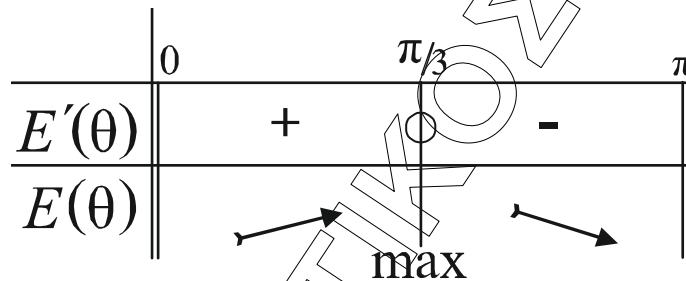
$$E'(\theta) = -\eta\mu\theta \cdot \eta\mu\theta + (1 + \sigma\upsilon\nu\theta) \cdot \sigma\upsilon\nu\theta =$$

$$= -\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta + \sigma\upsilon\nu\theta =$$

$$= 2\sigma\upsilon\nu^2\theta + \sigma\upsilon\nu\theta - 1, \quad \theta \in (0, \pi)$$

$$E'(\theta) = 0 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2\theta + \sigma\upsilon\nu\theta - 1 = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = -1 \quad \text{ή} \quad \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{2}$$

$$E'(\theta) > 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta < -1, \text{ αδύνατη} \quad \text{ή} \quad \sigma\upsilon\nu\theta > \frac{1}{2} \stackrel{\theta \in (0, \pi)}{\Leftrightarrow} \theta < \frac{\pi}{3} \text{ με } \theta > 0.$$



Δηλαδή όταν $\theta = \frac{\pi}{3}$ έχω $E(\theta) \rightarrow \max$ δηλαδή το ισοσκελές γίνεται ισόπλευρο.

Γ3. Έχω ότι $\varepsilon(\theta)$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$

$$\text{άρα } \varepsilon\left(\left(0, \frac{\pi}{3}\right)\right) = \left(\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \varepsilon(\theta), \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{3}^-} \varepsilon(\theta)\right) = \left(0, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$$

Επειδή $0 < \frac{3}{4} < \frac{3\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \frac{3}{4} \in f\left(\left(0, \frac{\pi}{3}\right)\right)$ υπάρχει μοναδικό $\theta_1 \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right) : \varepsilon(\theta_1) = \frac{3}{4}$

$\varepsilon(\theta)$ είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $\left(\frac{\pi}{3}, \pi\right)$ με

$$\varepsilon\left(\left(\frac{\pi}{3}, \pi\right)\right) = \left(\lim_{x \rightarrow \pi^-} \varepsilon(x), \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}^+} \varepsilon\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \left(0, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$$

Δηλ $\frac{3}{4} \in \varepsilon\left(\left(\frac{\pi}{3}, \pi\right)\right)$ άρα υπάρχει μοναδικό $\theta_2 \in \left(\frac{\pi}{3}, \pi\right) : \varepsilon(\theta_2) = \frac{3}{4}$

Γ4. Από Θ.Μ.Τ. στο $\left[\theta_1, \frac{\pi}{3}\right]$ έχω ότι $\exists \xi_1 \in \left(\theta_1, \frac{\pi}{3}\right) : \varepsilon'(\xi_1) = \frac{\varepsilon\left(\frac{\pi}{3}\right) - \varepsilon(\theta_1)}{\frac{\pi}{3} - \theta_1}$

$\Leftrightarrow \varepsilon'(\xi_1) \cdot \left(\frac{\pi}{3} - \theta_1\right) = \varepsilon\left(\frac{\pi}{3}\right) - \varepsilon(\theta_1)$ (1) και από Θ.Μ.Τ. στο $\left[\frac{\pi}{3}, \theta_2\right]$ έχω ότι

$\exists \xi_2 \in \left(\frac{\pi}{3}, \theta_2\right) : \varepsilon'(\xi_2) = \frac{\varepsilon(\theta_2) - \varepsilon\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\theta_2 - \frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow \varepsilon'(\xi_2) \cdot \left(\frac{\pi}{3} - \theta_2\right) = \varepsilon\left(\frac{\pi}{3}\right) - \varepsilon(\theta_2)$ (2)

(1) (2) $\xrightarrow{\varepsilon(\theta_1) = \varepsilon(\theta_2) = \frac{3}{4}}$ $\rightarrow \varepsilon'(\xi_1) \left(\frac{\pi}{3} - \theta_1\right) = \varepsilon'(\xi_2) \left(\frac{\pi}{3} - \theta_2\right)$

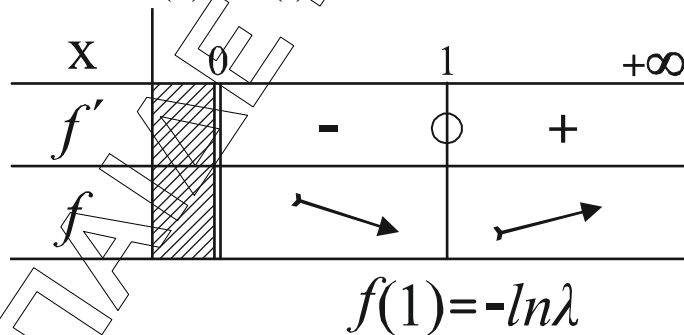
ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f'(x) = \ln x + 1 - \frac{\lambda}{\lambda x} = \ln x + 1 - \frac{1}{x}, \quad x > 0.$

$f''(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0 \rightarrow f'$ γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Είναι $f'(1) = 0$ και επομένως για $x > 1$ $\Rightarrow f'(x) > f'(1) = 0$

και για $0 < x < 1$ $\Rightarrow f'(x) < f'(1) = 0$



Από τον πίνακα με το πρόσημο της f' έχουμε ότι η f είναι στο $(0, 1]$ γνησίως φθίνουσα και στο $[1, +\infty)$ γνησίως αύξουσα και παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x = 1$ το $f(1) = -\ln \lambda$.

Άρα το ακρότατο είναι το $(1, -\ln \lambda)$ με $\lambda > 0$ η συνάρτηση $-\ln \lambda$ παίρνει τιμές στο $(-\infty, +\infty)$ και επομένως το ακρότατο θα βρίσκεται στην ευθεία $x = 1$.

Δ2. $x^x \geq \lambda x \Leftrightarrow \ln x^x \geq \ln(\lambda x) \Leftrightarrow x \ln x - \ln(\lambda x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq 0.$

Όμως $f(x) \geq -\ln \lambda$ από Δ1., άρα πρέπει

$-\ln \lambda \geq 0 \Rightarrow \ln \lambda \leq 0 \Rightarrow \ln \lambda \leq \ln 1 \Rightarrow \lambda \leq 1 \Rightarrow \lambda_{\text{μεγ}} = 1.$

Δ3. Είναι $g(x) = x^x = e^{x \ln x}$ με

$$g'(x) = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} (x \ln x)' = g(x)(\ln x + 1) \quad (1)$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο

$$(x_0, g(x_0)) \text{ με } x_0 > 0 \text{ είναι: } y - g(x_0) = g'(x_0)(x - x_0).$$

Για να διέρχεται από το $O(0, 0)$ πρέπει:

$$-g(x_0) = g'(x_0)(-x_0) \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} g(x_0) = g(x_0)(\ln x_0 + 1)x_0 \stackrel{g(x_0) > 0}{\Leftrightarrow} 1 = (\ln x_0 + 1)x_0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x_0} = \ln x_0 + 1 \Leftrightarrow \ln x_0 - \frac{1}{x_0} + 1 = 0 \quad (2).$$

Θεωρώ $\lambda(x) = \ln x - \frac{1}{x} + 1$ με $x > 0$ είναι $\lambda'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0 \Rightarrow \lambda(x)$ γνησίως

αύξουσα, άρα και '1-1'. Η (2) γίνεται $\lambda(x_0) = 0 \Leftrightarrow \lambda(x_0) = \lambda(1) \stackrel{\lambda(1-1)}{\Leftrightarrow} x_0 = 1.$

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $(1, g(1))$ δηλαδή στη $(1, 1)$ είναι:

$$y - g(1) = g'(1)(x - 1) \Rightarrow y - 1 = x - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = x \text{ αφού } g(1) = g'(1) = 1.$$

Δ4. i)

$$h(x) = \begin{cases} x^x, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

Για $x > 0$, $h(x) = e^{x \ln x}$ συνεχής σαν σύνθεση και πράξεις μεταξύ συνεχών.

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)'}{(1/x)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x} \stackrel{x \ln x = u}{=} \lim_{u \rightarrow 0} e^u = 1 = h(0) \text{ άρα η } h \text{ συνεχής στο } [0, +\infty).$$

ii) Θεωρώ $k(x) = x^{2020} \left(3 - 2 \int_1^2 g(t) dt \right) + (1-x) \int_0^1 h(1-t) dt$ που είναι συνεχής στο $[0, 1]$.

$$\text{Είναι } k(0) = \int_0^1 h(1-t) dt. \text{ Θέτω } 1-t = u \Rightarrow dt = -du$$

$$\text{Για } t \neq 0 \Rightarrow u \neq 1 \text{ και για } t = 1 \Rightarrow u = 0$$

$$\text{άρα } k(0) = \int_0^1 h(u) du = \int_0^1 h(x) dx = \int_0^1 g(x) dx \text{ όμως } g(x) > 0 \text{ στο } [0, 1]$$

$$\Rightarrow \int_0^1 g(x) dx > 0 \Rightarrow k(0) > 0.$$

$$\text{Επίσης } k(1) = 3 - 2 \int_1^2 g(t) dt$$

$$\text{Από } \Delta 2 \text{ για } \lambda = 1: x^x \geq x, x > 0$$

$$\text{Δηλαδή } g(x) \geq x, x > 0$$

Η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 1$.

$$\text{Οπότε } \int_1^2 g(t)dt > \int_1^2 tdt = \left[\frac{t^2}{2} \right]_1^2 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 3 - 2 \int_1^2 g(t)dt < 0$$

Άρα $k(1) < 0$

Άρα $k(0) \cdot k(1) < 0$, επομένως για την $k(x)$ ισχύει το θεώρημα Bolzano στο $[0,1]$

άρα η εξίσωση $k(x) = 0$ δηλαδή $x^{2020} \left(3 - 2 \int_1^2 g(t)dt \right) + (1-x) \int_0^1 h(1-t)dt = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$.