

Αναστάσιος Χ. Μπάρλας

Άλγεβρα

Α΄ ΕΠΑ.Λ.

Τράπεζα
Θεμάτων
2022

2.1 ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΟΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥΣ

1 – 13394

ΘΕΜΑ 2

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha\beta = 1$.

(Μονάδες 13)

β) Αξιοποιώντας το συμπέρασμα του προηγούμενου ερωτήματος, να αποδείξετε ότι

$$(\alpha\beta - 2)^6 + (\alpha\beta + 1)^2 = 5.$$

(Μονάδες 12)

2 – 14644

ΘΕΜΑ 2

Για τους αριθμούς $2\alpha + 1$ και $\beta + 1$, ισχύει ότι $(2\alpha + 1)(\beta + 1) = 1$, να δείξετε ότι:

α) $2\alpha + \beta + 2\alpha\beta = 0$,

(Μονάδες 11)

β) οι αριθμοί $x = \alpha(2 + \beta)$ και $y = \beta(\alpha + 1)$ είναι αντίθετοι.

(Μονάδες 14)

3 – 14646

ΘΕΜΑ 2

α) Να αποδείξετε ότι $(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = (\alpha - \beta)^2$.

(Μονάδες 12)

β) Αν $(\alpha + \beta)^2 = 4\alpha\beta$ να δείξετε ότι $\alpha = \beta$.

(Μονάδες 13)

4 – 14350

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = 3x - 2y - 2$ και $\beta = y - 1 - 2x$ και η παράσταση $A = \frac{x^2 + 2x - xy - 2y}{3x + 6}$.

α) Να βρείτε τις πραγματικές τιμές του x για τις οποίες ορίζεται η παράσταση A .

(Μονάδες 5)

β) Αν οι αριθμοί α και β είναι αντίθετοι τότε:

i. Να δείξετε ότι $x - y = 3$.

(Μονάδες 10)

ii. Να δείξετε ότι η παράσταση $A = 1$

(Μονάδες 10)

5 – 14462

ΘΕΜΑ 4

Έστω α, β θετικοί πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει $\alpha^2 + \beta^2 - 2(\alpha + \beta) = -2\alpha\beta$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $(\alpha + \beta)^2 = 2(\alpha + \beta)$

ii. $\alpha + \beta = 2$

(Μονάδες 8+6=14)

β) Να αποδείξετε ότι $(2\alpha + \beta - 2)(\alpha + 2\beta - 2) = \alpha\beta$

(Μονάδες 11)

6 – 14631

ΘΕΜΑ 4

Έστω α, β, γ θετικοί πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει

$$\alpha + \gamma = 10 \text{ και } (\beta - \gamma)\alpha = \alpha^2 - \beta\gamma.$$

α) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = \alpha\gamma \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma} \right)$.

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta$.

(Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι $(2\alpha - \beta + \gamma)(2\beta - \alpha + \gamma) = 100$.

(Μονάδες 10)

2.2 ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

7 – 14309

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τον πραγματικό αριθμό y για τον οποίο ισχύει η ανισότητα $2 < y < 3$.

α) Να αποδείξετε ότι $4 < 2y < 6$.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή κάθε μιας από τις παρακάτω παραστάσεις

i. $2y + 3$.

(Μονάδες 9)

ii. $2y - 5$.

(Μονάδες 9)

8 – 14405

ΘΕΜΑ 2

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύουν $\alpha < \beta$ και $\beta < \gamma$ να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha - \gamma < 0$.

(Μονάδες 12)

β) $(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma) > 0$.

(Μονάδες 13)

9 – 14776

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει $\alpha > 1, \beta < 1$.

α) Να δείξετε ότι $(\alpha - 1)(\beta - 1) < 0$.

(Μονάδες 15)

β) Με χρήση του α) ή με οποιονδήποτε τρόπο θέλετε, να δείξετε ότι $\alpha\beta + 1 < \alpha + \beta$.

(Μονάδες 10)

2.3 ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

10 – 13450

ΘΕΜΑ 2

α) Να ελέγξετε αν ο αριθμός 6 είναι λύση της εξίσωσης $|x-9|=3$.

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση $|x-9|=3$.

(Μονάδες 15)

11 – 14400

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση $A = |x - 3|$, όπου x πραγματικός αριθμός.

α) Να βρείτε την τιμή της παράστασης A σε κάθε μια από τις τρεις επόμενες περιπτώσεις:

i) $x = 4$

(Μονάδες 4)

ii) $x = 3$

(Μονάδες 4)

iii) $x = 2$.

(Μονάδες 4)

β) Αν $x < 3$ να γράψετε την τιμή της παράστασης A χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής.

(Μονάδες 13)

12 – 14777

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ο πραγματικός αριθμός α για τον οποίο ισχύει ότι $1 < \alpha < 3$.

α) Να δείξετε ότι $|\alpha - 1| = \alpha - 1$ και $|\alpha - 3| = 3 - \alpha$.

(Μονάδες 15)

α) Να δείξετε ότι $|\alpha - 1| + |\alpha - 3| = 2$.

(Μονάδες 10)

13 – 14298

ΘΕΜΑ 4

Για τον πραγματικό αριθμό α , δίνεται ότι $\alpha < -2$.

α) Να αποδείξετε ότι $2\alpha + 4 < 0$.

(Μονάδες 8)

β) Να γράψετε την παράσταση $A = |2\alpha + 4| + 3|3\alpha + 6|$ χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την ανίσωση: $A > -11$.

(Μονάδες 9)

14 – 14873

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει $2 \leq \alpha \leq 3$ και $-2 \leq \beta \leq -1$.

α) Να δείξετε ότι: $\alpha - 3 \leq 0$ και $\beta + 2 \geq 0$.

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι: $3 \leq \alpha - \beta \leq 5$.

(Μονάδες 8)

γ) Να δείξετε ότι $|\alpha - \beta| + |\alpha - 3| + |\beta + 2| = 5$.

(Μονάδες 9)

2.4 ΡΙΖΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

15 – 14715

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = 1 - \sqrt{2}$ και $\beta = 2 + \sqrt{2}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha + \beta = 3$ και $\alpha\beta = -\sqrt{2}$.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι $(\alpha - 1)^2 + (\beta - 2)^2 = 4$.

(Μονάδες 13)

16 – 14775

ΘΕΜΑ 2

α) Να αποδείξετε ότι $2\sqrt{3} = \sqrt{12}$.

(Μονάδες 13)

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος α), να δείξετε ότι:

$$\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \sqrt{2}.$$

(Μονάδες 12)

17 – 14299

ΘΕΜΑ 4

α)

i. Να υπολογίσετε τη δύναμη $2^{\frac{6}{3}}$.

(Μονάδες 5)

ii. Να αιτιολογήσετε την ισότητα $(\sqrt{2})^6 = 8$.

(Μονάδες 3)

iii. Να υπολογίσετε τη δύναμη $(\sqrt[3]{2})^6$.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης: $A = (\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2})^6$.

(Μονάδες 10)

3.1 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 1ου ΒΑΘΜΟΥ

18 – 13398

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση $|x - 5| = 6$ (I)

α) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός -1 είναι λύση της (I).

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε όλες τις λύσεις της εξίσωσης (I).

(Μονάδες 15)

19 – 13478

ΘΕΜΑ 2

Έστω α πραγματικός αριθμός για τον οποίο ισχύει $\alpha^2 = 4(\alpha - 1)$.

α) Να αποδείξετε ότι $(\alpha - 2)^2 = 0$.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τον αριθμό α .

(Μονάδες 12)

20 – 14196

ΘΕΜΑ 2

Για τους πραγματικούς αριθμούς α και β ισχύει:

$$\frac{\alpha}{3} = \frac{\beta + 1}{6}.$$

α) Να αποδείξετε ότι $2\alpha = \beta + 1$.

(Μονάδες 12)

β) Αν $\beta = -3$ να βρείτε τον α .

(Μονάδες 13)

21 – 14376

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι παραστάσεις $A = \frac{3x-1}{5}$ και $B = \frac{1-2x}{3}$

α) Να λύσετε την εξίσωση $A = 0$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε την τιμή του x για την οποία οι αριθμητικές τιμές των παραστάσεων A και B είναι αντίθετες.

(Μονάδες 13)

22 – 14755

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση: $A = \frac{x^2 - 1}{x - 1}, x \neq 1$.

α) Να δείξετε ότι $A = x + 1, x \neq 1$.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης A για $x = 3^0 - 1$.

(Μονάδες 9)

γ) Μπορεί η παράσταση A να πάρει την τιμή 2; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

23 – 13405

ΘΕΜΑ 2

α) Να εξετάσετε αν η εξίσωση $|x + 8| = 10$ επαληθεύεται για $x=2, x=0$ και $x=-10$

(Μονάδες 13)

β) Να λύσετε την εξίσωση $|x + 8| = 10$

(Μονάδες 12)

24 – 13455

ΘΕΜΑ 2

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = |x + 1|$ για $x = -2$ και για $x = 1$.

(Μονάδες 13)

β) Να λύσετε την εξίσωση $|x + 1| = 2$.

(Μονάδες 12)

25 – 13476

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται $-1 \leq x \leq 2$.

α) Να γράψετε την παράσταση $A = |x + 1| - |x - 2|$ απαλείφοντας κατάλληλα τις απόλυτες τιμές.

(Μονάδες 13)

β) Αν $A = 2x + 3$ να λύσετε την εξίσωση $A = 0$.

(Μονάδες 12)

26 – 14296

ΘΕΜΑ 2

α) Να εξετάσετε αν η εξίσωση $|x + 2| = 7$ επαληθεύεται για $x = 1$, $x = 2$ και $x = -3$.

(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την εξίσωση $|x + 2| = 7$.

(Μονάδες 13)

27 – 14308

ΘΕΜΑ 2

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $B = |x - 2|$

i. για $x = 0$.

(Μονάδες 5)

ii. για $x = -4$.

(Μονάδες 5)

iii. για $x = 5$.

(Μονάδες 5)

β) Να λύσετε την εξίσωση $|x - 2| = 3$.

(Μονάδες 10)

28 – 14330

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την εξίσωση: $x - 5 = 10$.

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση: $|x - 5| = 10$.

(Μονάδες 15)

29 – 14305

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι παραστάσεις $A = x^2 + 6x + 9$ και $B = (4y - 2)^2$, με $x, y \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $A = (x + 3)^2$.

(Μονάδες 8)

β)

i. Να δείξετε ότι $A + B \geq 0$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 9)

ii. Για ποιες τιμές των $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει $A + B = 0$;

(Μονάδες 8)

30 – 14756

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η παράσταση: $A = \frac{x^2 - 1}{x^2 - x}$, $x \neq 0$, $x \neq 1$.

α) Να δείξετε ότι $A = \frac{x+1}{x}$, $x \neq 0$, $x \neq 1$.

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης A για $x = 3^0 - \frac{1}{2}$.

γ)

i. Να βρείτε για ποια τιμή του x η παράσταση A μηδενίζεται.

ii. Μπορεί η παράσταση A να πάρει την τιμή 2; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

31 – 14737

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η παράσταση $K = |x-2| + 1$.

α) Να γράψετε την παράσταση K χωρίς απόλυτη τιμή.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x , οι οποίοι έχουν απόσταση από το 2 ίση με 4.

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε την τιμή της παράστασης K για τους αριθμούς x του ερωτήματος β.

(Μονάδες 6)

δ) Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του x , ώστε $K=0,99$.

(Μονάδες 6)

3.3 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

32 – 14297

ΘΕΜΑ 2

α) Να εξετάσετε ποιος από τους αριθμούς: 8, -4 και -8 είναι λύση της εξίσωσης $x^2 = 16$.

(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την εξίσωση $x^2 = 16$.

(Μονάδες 13)

33 – 14460

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι αριθμοί $x_1 = 2 + \sqrt{3}$ και $x_2 = 2 - \sqrt{3}$.

α) Να υπολογίσετε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ και να αποδείξετε ότι για το γινόμενο $P = x_1 x_2$ ισχύει $P = 1$.

(Μονάδες 14)

β) Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς x_1 και x_2 .

(Μονάδες 11)

34 – 14647

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την εξίσωση $\omega^2 - 4\omega + 3 = 0$.

(Μονάδες 13)

β) Αν οι λύσεις του ερωτήματος α) είναι $\omega_1 = 1$ και $\omega_2 = 3$, να εξετάσετε για ποια από αυτές τις τιμές του ω , η εξίσωση $(\omega^2 - 4\omega + 3)x = \omega - 1$, είναι αδύνατη.

(Μονάδες 12)

35 – 13411

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + 4x + 4 = 0$ (1).

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει διακρίνουσα $\Delta = 0$.

(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την εξίσωση (1).

(Μονάδες 13)

36 – 13451

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 5x + 4 = 0$ (1).

α) Να ελέγξετε αν ο αριθμός 4 επαληθεύει την εξίσωση (1).

(Μονάδες 8)

β) Να λύσετε την εξίσωση (1).

(Μονάδες 17)

37 – 13505

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 3x + 2 = 0$.

α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου $x^2 - 3x + 2$ είναι $\Delta = 1$.

(Μονάδες 8)

β) Πόσες ρίζες έχει η εξίσωση;

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την εξίσωση.

(Μονάδες 9)

38 – 14381

ΘΕΜΑ 2

Μια εξίσωση δευτέρου βαθμού έχει δυο ρίζες, τις $x_1 = 2$ και $x_2 = 1$.

α)

i. Να γράψετε το άθροισμα S των ριζών της εξίσωσης.

(Μονάδες 5)

ii. Να γράψετε το γινόμενο P των ριζών της εξίσωσης.

(Μονάδες 5)

β) Να γράψετε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού που έχει ρίζες τις $x_1 = 2$ και $x_2 = 1$.

(Μονάδες 15)

39 – 14539

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 7x + 6 = 0$ (1).

α) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός 1 επαληθεύει την εξίσωση (1).

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση (1).

(Μονάδες 15)

40 – 14824

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 3x - 4 = 0$ (1).

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες άνισες, υπολογίζοντας την διακρίνουσά της.

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση (1).

(Μονάδες 15)

41 – 14542

ΘΕΜΑ 4

α) Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $3x - 3 = 0$.

(Μονάδες 6)

ii) $x^2 - 4x + 4 = 0$.

(Μονάδες 6)

β) Να λύσετε την εξίσωση $(3x - 3)(x - 2)^2 = 0$.

(Μονάδες 13)

42 – 14192

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τριώνυμο $3x^2 - x - 5$ με $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι το τριώνυμο αυτό έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις ρίζες του παραπάνω τριωνύμου.

(Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα S και το γινόμενο P των ριζών αυτών.

(Μονάδες 8)

43 – 14717

ΘΕΜΑ 4

α) Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει $\alpha + \beta = \frac{5}{2}$ και $\alpha\beta = 1$.i. Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β .

(Μονάδες 5)

ii. Να βρείτε τους αριθμούς α, β .

(Μονάδες 8)

β) Να εξετάσετε αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε να ισχύει $\alpha + \beta = 1$ και $\alpha\beta = \frac{5}{2}$.

(Μονάδες 12)

4.1 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 1ου ΒΑΘΜΟΥ

44 – 14316

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση $A = (x+1)^2 - (x-1)^2$, $x \in \mathbb{R}$.α) Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό x ισχύει $A = 4x$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η παράσταση A είναι μεγαλύτερη από το $\frac{1}{4}$.

(Μονάδες 13)

45 – 14557

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η ανίσωση $3x - 7 \geq 5x + 11$ (I).α) Να λύσετε την ανίσωση (I).

(Μονάδες 15)

β) Να γράψετε τις λύσεις της (I) με τη μορφή διαστήματος.

(Μονάδες 10)

46 – 14828

ΘΕΜΑ 2

α) Να αποδείξετε ότι για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό x , ισχύει:

$$(x + 3)^2 - (x + 1)^2 = 4(x + 2).$$

(Μονάδες 13)

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος α), να λύσετε την ανίσωση $(x + 3)^2 - (x + 1)^2 > 0$.

(Μονάδες 12)

47 – 14850

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την ανίσωση $|x| \leq 4$.

(Μονάδες 8)

β) Να λύσετε την ανίσωση $x - 7 \geq -4(x - 2)$.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των δύο παραπάνω ανισώσεων.

(Μονάδες 7)

48 – 14871

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ με $x \neq 2$.

α) Να δείξετε ότι $f(x) = x + 2$ με $x \neq 2$.

(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq 4$.

(Μονάδες 13)

49 – 14317

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι ανισώσεις:

$$2(x-1) < x+4 \text{ και } 2-(5-x) > 0$$

α) Να τις λύσετε.

(Μονάδες 16)

β) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τους ακέραιους αριθμούς που είναι λύσεις και των δυο ανισώσεων.

(Μονάδες 9)

50 – 14921

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι ανισώσεις: $x - 1 > 1$ (1) και

$$2x - 3 < 5 \quad (2)$$

α) Να λύσετε την ανίσωση (1).

(Μονάδες 8)

β) Να λύσετε την ανίσωση (2).

(Μονάδες 8)

γ) Να παραστήσετε τις λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να βρείτε τις κοινές τους λύσεις.

(Μονάδες 9)

51 – 14487

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η παράσταση $A = (\sqrt{x-4} + \sqrt{x+1})(\sqrt{x-4} - \sqrt{x+1})$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται παράσταση A .

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $A = -5$.

(Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι $\frac{5}{\sqrt{x-4} + \sqrt{x+1}} - \frac{5}{\sqrt{x-4} - \sqrt{x+1}} = 2\sqrt{x+1}$.

(Μονάδες 10)

52 – 13402

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι ανισώσεις $|x| \leq 9$ (I) και $7x - 8 \geq -3(x - 4)$ (II).

α) Να λυθεί η ανίσωση (I).

(Μονάδες 7)

β) Να λυθεί η ανίσωση (II).

(Μονάδες 10)

γ) Να παραστήσετε τις λύσεις των ανισώσεων (I) και (II) στον ίδιο άξονα των πραγματικών αριθμών και να βρείτε τις κοινές τους λύσεις.

(Μονάδες 8)

53 – 14874

ΘΕΜΑ 4

Για τον πραγματικό αριθμό x ισχύουν

$$d(x,1) \leq 2 \quad (1)$$

$$d(x,4) \geq 3 \quad (2).$$

α) Να λύσετε την ανίσωση (1) αλγεβρικά και την ανίσωση (2) γεωμετρικά με τη βοήθεια του άξονα των πραγματικών αριθμών.

(Μονάδες 10)

β) Να παραστήσετε στον ίδιο άξονα των πραγματικών αριθμών τις λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) και να βρείτε τις κοινές τους λύσεις.

(Μονάδες 5)

γ) Για κάθε $x \in [-1,1]$,

i. να αιτιολογήσετε γεωμετρικά ότι $|x-1|+|x+1|=2$.

(Μονάδες 5)

ii. να δείξετε αλγεβρικά ότι $|x-1|+|x+1|=2$.

(Μονάδες 5)

54 – 14875

ΘΕΜΑ 4

Για τους πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύουν αντίστοιχα

$$d(x,2) \leq 1 \quad (1)$$

$$d(y,4) \leq 3 \quad (2).$$

α) Να λύσετε την ανίσωση (1) αλγεβρικά και την ανίσωση (2) γεωμετρικά με τη βοήθεια του άξονα των πραγματικών αριθμών.

(Μονάδες 10)

β) Αν $1 \leq x \leq 3$ και $1 \leq y \leq 7$ να δείξετε ότι:

i. η περίμετρος ενός ορθογωνίου με διαστάσεις x, y είναι τουλάχιστον 4 και το πολύ 20.

(Μονάδες 7)

ii. $|x-y| \leq 8$.

(Μονάδες 8)

55 – 13414

ΘΕΜΑ 4

α) Να λύσετε την ανίσωση $|3x-6| < 15$.

(Μονάδες 8)

β) Να λύσετε την ανίσωση $|x-6| \geq 1$ και να γράψετε τις λύσεις της ανίσωσης αυτής σε μορφή διαστήματος.

(Μονάδες 12)

γ) Να παραστήσετε (σχεδιάζοντας) τις λύσεις των δύο ανισώσεων των ερωτημάτων (α) και (β) σε έναν άξονα των πραγματικών αριθμών και να βρείτε τις κοινές τους λύσεις.

(Μονάδες 5)

56 – 13506

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι ανισώσεις:

$$3(x-1) > x+3 \quad (1) \text{ και}$$

$$|x| \leq 4 \quad (2)$$

α) Να λύσετε την ανίσωση (1).

(Μονάδες 8)

β) Να λύσετε την ανίσωση (2).

(Μονάδες 9)

γ) Να παραστήσετε τις λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να βρείτε τις κοινές τους λύσεις.

(Μονάδες 8)

57 – 14401

ΘΕΜΑ 4

α) Να λύσετε την ανίσωση $|x - 2| < 1$.

(Μονάδες 9)

β) Αν $|x - 2| < 1$ να δείξετε ότι $3 < 2x + 1 < 7$.

(Μονάδες 8)

γ) Αν $1 < x < 3$ να απλοποιήσετε την παράσταση $A = |x - 1| + |x - 3|$

(Μονάδες 8)

58 – 14540

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε πραγματικούς τους πραγματικούς αριθμούς x, y για τους οποίους ισχύουν οι ανισότητες $0 < x < 2$ και $0 < y < 3$.

α) Να αποδείξετε ότι $0 < x + y < 5$.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε μεταξύ ποιων πραγματικών αριθμών περιέχεται η τιμή καθεμίας από τις παρακάτω παραστάσεις:

i) $-3y$

(Μονάδες 7)

ii) $x - 2y$

(Μονάδες 8)

59 – 14541

ΘΕΜΑ 4

α) Να λύσετε την ανίσωση $|x| \geq 4$.

(Μονάδες 8)

β) Να λύσετε την ανίσωση $3(|x|+2)+1 < 22$.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων των ερωτημάτων α) και β).

(Μονάδες 8)

4.2 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

60 – 14738

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την εξίσωση $|x| = 1$ (1).

(Μονάδες 12)

β) Να λυθεί η ανίσωση $|6x| \leq 6$ (2).

(Μονάδες 13)

61 – 13558

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το τριώνυμο $2x^2 - 6x + 4$.

α) Να δείξετε ότι οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι αριθμοί 1 και 2.

(Μονάδες 12)

β) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2 - 6x + 4$.

(Μονάδες 13)

62 – 14194

ΘΕΜΑ 2

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2 + 3x - 4 = 0$ έχει ρίζες $x_1 = -4$ και $x_2 = 1$.

(Μονάδες 13)

β) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 + 3x - 4 < 0$.

(Μονάδες 12)

63 – 14663

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το τριώνυμο $x^2 - 3x + 2$.

α) Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο ρίζες άνισες.

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι οι ρίζες του τριωνύμου $x^2 - 3x + 2$ είναι οι αριθμοί 1 και 2 και να βρείτε το πρόσημό του.

(Μονάδες 9)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 - 3x + 2 \leq 0$.

(Μονάδες 8)

64 – 13401

ΘΕΜΑ 4

α) Να βρείτε τις ρίζες του τριωνύμου $x^2 - x - 12$.

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε στο σύνολο των πραγματικών αριθμών την ανίσωση $x^2 - x - 12 \leq 0$.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης $x^2 - x - 12 \leq 0$.

(Μονάδες 6)

65 – 13477

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τριώνυμο $x^2 - 3x + 2$.

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο.

(Μονάδες 7)

β) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 - 3x + 2 > 0$.

(Μονάδες 10)

γ) Να εξετάσετε αν οι αριθμοί $\alpha_1 = -\frac{3}{2}$ και $\alpha_2 = \frac{3}{2}$ είναι λύσεις της ανίσωσης του β ερωτήματος.

(Μονάδες 8)

66 – 14671

ΘΕΜΑ 4

α) Να λύσετε την ανίσωση $4(x - 2) > 5(2x + 8)$.

(Μονάδες 8)

β) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 + 9x < 0$.

(Μονάδες 12)

γ) Να παραστήσετε τις λύσεις των παραπάνω ανισώσεων στον ίδιο άξονα πραγματικών αριθμών και να βρείτε τις κοινές τους λύσεις (αν υπάρχουν).

(Μονάδες 5)

67 – 13452

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι ανισώσεις $3(2x + 1) + 6 < 21$ (1)

και $x^2 - 2x - 3 \leq 0$ (2).

α) Να λύσετε την ανίσωση (1).

(Μονάδες 8)

β)

i. Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - 2x - 3 = 0$.

(Μονάδες 5)

ii. Να λύσετε την ανίσωση (2).

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) και να τις γράψετε σε μορφή διαστήματος.

(Μονάδες 7)

68 – 13413

ΘΕΜΑ 4

α) Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - 7x + 6 = 0$.

(Μονάδες 8)

β) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 - 7x + 6 \leq 0$. Να γράψετε τις λύσεις της ανίσωσης αυτής σε μορφή διαστήματος.

(Μονάδες 12)

γ) Να βρείτε τους ακέραιους αριθμούς που είναι λύσεις της ανίσωσης που λύσατε στο ερώτημα (β).

(Μονάδες 5)

69 – 13559

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τριώνυμο $x^2 - 7x + 12$.

α) Να δείξετε ότι το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες τους αριθμούς 3 και 4.

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 - 7x + 12 < 0$.

(Μονάδες 10)

γ) Για τον πραγματικό αριθμό $\pi = 3,1415\dots$ να δείξετε ότι ισχύει $\pi^2 - 7\pi + 12 < 0$.

(Μονάδες 5)

70 – 14198

ΘΕΜΑ 4

α) Να βρείτε τις ρίζες του τριωνύμου $x^2 + x - 12$ (1).

(Μονάδες 8)

β) Αν οι ρίζες του τριωνύμου (1) είναι $x_1 = 3$ και $x_2 = -4$, να λύσετε την ανίσωση $x^2 + x - 12 < 0$ και να γράψετε τις λύσεις της σε μορφή διαστήματος.

(Μονάδες 12)

γ) Να βρείτε τους ακέραιους αριθμούς που είναι λύσεις της ανίσωσης του ερωτήματος β).

(Μονάδες 5)

71 – 14514

ΘΕΜΑ 4

α) Να λύσετε της εξίσωση $x^2 - 2x + 7 = 0$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 - 2x + 7$ για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράγωνο οποιουδήποτε πραγματικού αριθμού αυξημένο κατά 7 είναι μεγαλύτερο του διπλασίου του.

(Μονάδες 7)

72 – 14404

ΘΕΜΑ 4

α) Αν $x^2 - 7x + 10 < 0$, να αποδείξετε ότι $2 < x < 5$.

(Μονάδες 8)

β) Να λύσετε την ανίσωση $3x - 2 < x + 4$.

(Μονάδες 9)

γ) Να παραστήσετε τις λύσεις των ανισώσεων των ερωτημάτων α) και β) στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να βρείτε τις κοινές τους λύσεις.

(Μονάδες 8)

73 – 14488

ΘΕΜΑ 4

Έστω Ω το σύνολο που έχει ως στοιχεία τους αριθμούς που είναι οι ενδείξεις ενός ζαριού.

α) Να γράψετε με αναγραφή το σύνολο Ω .

(Μονάδες 7)

β) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 - x - 12 < 0$ (1).

(Μονάδες 10)

γ) Ποια από τα στοιχεία του συνόλου Ω ανήκουν στο σύνολο λύσεων της ανίσωσης (1);

(Μονάδες 8)

5.2 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ**74 – 13399**

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε την αριθμητική πρόοδο 5, 9, 13, 17,

α) Ποια είναι η διαφορά ω αυτής της αριθμητικής προόδου;

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τον 51^ο όρο της προόδου.

(Μονάδες 15)

75 – 14191

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (a_n) με πρώτους όρους τους - 4, - 1, 2, 5, 8,α) Να αποδείξετε ότι ο γενικός όρος αυτής της προόδου δίνεται από τη σχέση $a_n = 3n - 7$,όπου $n = 1, 2, 3, \dots$

(Μονάδες 13)

β) Να υπολογίσετε το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της προόδου.

(Μονάδες 12)

76 – 13412

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τους αριθμούς 2, 4, 6, ... που συνεχίζονται, προσθέτοντας κάθε φορά το 2.

α) i) Ποιος είναι ο επόμενος αριθμός;

(Μονάδες 5)

ii) Να εξηγήσετε γιατί οι αριθμοί αυτοί, με τη σειρά που δίνονται, αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου. Ποια η διαφορά ω της προόδου αυτής;

(Μονάδες 10)

β) Ο αριθμός 2 είναι ο 1ος όρος της προόδου του προηγούμενου ερωτήματος. Να βρεθεί ο 8ος όρος της προόδου αυτής.

(Μονάδες 10)

77 – 14195

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (a_n) με $a_1 = 2$ και $a_2 = 5$.α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 3$.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι $a_{20} = 59$.

(Μονάδες 13)

78 – 14513

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_n) με $\alpha_2 = 8$ και $\omega = 2$.

α) Να δείξετε ότι ο 1ος όρος της προόδου είναι $\alpha_1 = 6$.

(Μονάδες 7)

β) Να υπολογίσετε τον 7ο όρο α_7 της προόδου.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 7 όρων της προόδου (α_n) .

(Μονάδες 9)

79 – 14630

ΘΕΜΑ 2

Σε αριθμητική πρόοδο ισχύει $\alpha_3 = 18$ και $\alpha_4 = 26$.

α) Να αποδείξετε ότι για τη διαφορά ω της προόδου ισχύει $\omega = 8$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τους δυο πρώτους όρους της.

(Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι $\alpha_{37} = 290$.

(Μονάδες 9)

80 – 14659

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τους αριθμούς $-12, -6, 0, \dots$ που συνεχίζονται προσθέτοντας κάθε φορά το 6.

α) i) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί αυτοί, με τη σειρά που δίνονται, αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.

(Μονάδες 5)

ii) Να βρείτε τους δύο επόμενους όρους της προόδου αυτής.

(Μονάδες 10)

β) Αν ο -12 είναι 1ος όρος της προόδου του προηγούμενου ερωτήματος, να αποδείξετε ότι το άθροισμα των 5 πρώτων όρων της (προόδου αυτής) είναι ίσο με 0.

(Μονάδες 10)

81 – 14735

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_n) με $\alpha_1 = -4$ και $\omega = 7$.

α) Να αποδείξετε ότι ο 2^{ος} όρος της προόδου είναι $\alpha_2 = 3$.

(Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε τον 5^ο όρο α_5 της προόδου.

(Μονάδες 13)

82 – 14965

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος: 4, 8, 12, ...

α) Να αιτιολογήσετε γιατί η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 4$.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τον εικοστό όρο της προόδου.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε το άθροισμα των είκοσι πρώτων όρων της προόδου.

(Μονάδες 9)

83 – 13456

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (a_n) με $a_3 = 10$ και $a_5 = 18$

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι $\omega = 4$ και ότι ο πρώτος όρος της είναι $a_1 = 2$.

(Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα $S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$, των τεσσάρων πρώτων όρων της προόδου είναι ίσο με 32.

(Μονάδες 12)

84 – 14310

ΘΕΜΑ 4

α) Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - 9 = 0$.

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση $2x \cdot (x^2 - 9) = 0$.

(Μονάδες 10)

γ) Να διατάξετε τις ρίζες της εξίσωσης του β) ερωτήματος σε αύξουσα σειρά και να δείξετε ότι με αυτή τη σειρά αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.

(Μονάδες 5)

85 – 13407

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (a_n) με $a_1 = 1$, $a_3 = 7$ και διαφορά ω .

α) Να αποδείξετε ότι $\omega = 3$.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι ο n -οστός όρος της αριθμητικής προόδου (a_n) είναι ίσος με $a_n = 3n - 2$, $n \in \mathbb{N}$ και να βρείτε τον 6^ο όρο της προόδου.

(Μονάδες 12)

γ) Υπάρχει όρος της αριθμητικής προόδου (a_n) που να ισούται με 21;

(Μονάδες 7)

86 – 14664

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_n) της οποίας ο 1ος όρος είναι $\alpha_1 = 3$, ενώ ο 10ος όρος είναι $\alpha_{10} = 21$.

α) Να βρείτε τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου (α_n) .

(Μονάδες 8)

Για $\omega = 2$

β) Να βρείτε το άθροισμα S_{10} των 10 πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου (α_n) .

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε πόσους πρώτους όρους της αριθμητικής προόδου (α_n) πρέπει να προσθέσουμε ώστε το άθροισμά τους να ισούται με 168. (Δίνεται $\sqrt{676} = 26$.)

(Μονάδες 9)

87 – 14648

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_n) με γενικό όρο $\alpha_n = 4n - 2$.

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 και τη διαφορά ω της προόδου.

(Μονάδες 9)

β) Αν $\alpha_1 = 2$ και $\omega = 4$, να βρείτε τον πρώτο όρο της (α_n) που είναι μεγαλύτερος του 120.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε το άθροισμα S_{30} των 30 πρώτων όρων της προόδου (α_n) .

(Μονάδες 7)

88 – 13403

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_n) με $\alpha_4 = 7$ και $\alpha_5 = 9$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της αριθμητικής προόδου είναι $\omega = 2$.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τον πρώτο όρο της αριθμητικής προόδου.

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των έξι πρώτων όρων της προόδου είναι ίσο 36.

(Μονάδες 10)

89 – 13453

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_n) της οποίας ο 4ος όρος είναι ο $\alpha_4=10$ και ο 5ος όρος είναι ο $\alpha_5=7$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά της προόδου (α_n) είναι $\omega = -3$ και να βρείτε τον 1ο όρο της προόδου α_1 .

(Μονάδες 15)

β) Να βρείτε τον 8ο όρο της προόδου (α_n) .

(Μονάδες 10)

90 – 14311

ΘΕΜΑ 4

α) Να αποδείξετε ότι ο αριθμητικός μέσος των αριθμών 8 και 16 είναι ο 12.

(Μονάδες 7)

β) Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_n) για την οποία ισχύει ότι $\alpha_3=8$ και $\alpha_5=16$.

i. Να βρείτε τον 4ο όρο α_4 και τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου (α_n) .

(Μονάδες 10)

ii. Να βρείτε τον 1ο όρο α_1 της αριθμητικής προόδου (α_n) .

(Μονάδες 8)

91 – 14757

ΘΕΜΑ 4

Ένα εργοστάσιο κατασκευής πολυτελών αυτοκινήτων κατασκευάζει ένα νέο μοντέλο. Στο τέλος του πρώτου μήνα είχαν κατασκευαστεί 5 τέτοια οχήματα, στο τέλος του δεύτερου μήνα 18, στο τέλος του τρίτου μήνα 31 κ.ο.κ.

α) Πόσα αυτοκίνητα θα είναι κατασκευασμένα στο τέλος του τέταρτου, του πέμπτου και του έκτου μήνα;

(Μονάδες 6)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί ο αριθμός των αυτοκινήτων που είναι κατασκευασμένα στο τέλος κάθε μήνα αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.

(Μονάδες 6)

γ) Πόσα αυτοκίνητα κατασκευάστηκαν τον πρώτο χρόνο;

(Μονάδες 6)

δ) Μετά από πόσους μήνες θα έχει κατασκευαστεί το 250^ο αυτοκίνητο;

(Μονάδες 7)

92 – 14923

ΘΕΜΑ 4

Ένας χώρος δεξίωσης γάμων διαφημίζεται ως εξής: το κόστος για 50 καλεσμένους είναι 6560 ευρώ, ενώ για 100 καλεσμένους είναι 11910 ευρώ. Υποθέτουμε ότι οι τιμές του κόστους για τους καλεσμένους είναι όροι αριθμητικής προόδου (α_n) , δηλαδή το κόστος για έναν καλεσμένο είναι α_1 , για δυο καλεσμένους είναι α_2, \dots , για πενήντα καλεσμένους α_{50}, \dots , για εκατό καλεσμένους α_{100} , κ.ο.κ.

α) Να δείξετε ότι ο πρώτος όρος της προόδου είναι $\alpha_1 = 1317$ και η διαφορά $\omega = 107$.

(Μονάδες 9)

β) Να δείξετε ότι το κόστος για n καλεσμένους είναι $\alpha_n = 107n + 1210$.

(Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε το κόστος για 85 καλεσμένους.

(Μονάδες 7)

5.3 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ

93 – 14304

ΘΕΜΑ 2

α) Να εξετάσετε αν οι πραγματικοί αριθμοί $-3, 9, -27$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

(Μονάδες 15)

β) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x ώστε οι πραγματικοί αριθμοί $9, x, 81$ να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

(Μονάδες 10)

94 – 13406

ΘΕΜΑ 2

α) Να εξετάσετε αν οι πραγματικοί αριθμοί $1, 2, 4$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

(Μονάδες 15)

β) Να βρείτε το x ώστε οι πραγματικοί αριθμοί $1, x, 4$ να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

(Μονάδες 10)

95 – 14709

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_n) με πρώτους όρους τους $1, 3, 9, \dots$

α) Να βρείτε τον τέταρτο όρο α_4 της προόδου (α_n) .

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των πέντε πρώτων όρων της (α_n) είναι:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = 121.$$

(Μονάδες 15)

96 – 14872

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_n) με $\alpha_2 = 8$ και $\lambda = 2$.

α) Να δείξετε ότι ο 1^{ος} όρος της προόδου είναι $\alpha_1 = 4$.

(Μονάδες 7)

β) Να υπολογίσετε τον 7^ο όρο α_7 της προόδου.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 7 όρων της προόδου (α_n) .

(Μονάδες 9)

97 – 14889

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος: 4, 8, 16, 32,

α) Να αιτιολογήσετε γιατί ο λόγος της προόδου είναι $\lambda = 2$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τον δέκατο όρο της προόδου.

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της προόδου.

(Μονάδες 7)

98 – 14558

ΘΕΜΑ 4

α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός μέσος των αριθμών $\frac{8}{x}$ και $32x$ είναι ο αριθμός 16, όπου x τυχαίος πραγματικός αριθμός διαφορετικός από το μηδέν.

(Μονάδες 9)

β) Οι αριθμοί $\frac{8}{x}$, 16, $32x$, με αυτή τη σειρά, είναι οι τρεις πρώτοι όροι μιας γεωμετρικής προόδου (α_n) , με λόγο $\lambda = 4$.

(i) Να αποδείξετε ότι $x = 2$.

(Μονάδες 8)

(ii) Να αποδείξετε ότι ο n -οστός όρος αυτής της προόδου είναι $\alpha_n = 2^{2n}$, όπου n θετικός ακέραιος.

(Μονάδες 8)

99 – 14922

ΘΕΜΑ 4

Οι τρεις πρώτοι όροι μιας γεωμετρικής προόδου, με τη σειρά που δίνονται, είναι:

$$k-1, 6 \text{ και } 3k, k \in \mathbb{R} - \{0,1\}.$$

α) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του $k \in \mathbb{R} - \{0,1\}$.

(Μονάδες 8)

β) Για $k = 4$, να βρείτε

i. τον τέταρτο όρο της προόδου.

(Μονάδες 8)

ii. τον πρώτο όρο της προόδου που υπερβαίνει τον αριθμό $3 \cdot 2^8$.

(Μονάδες 9)

100 – 14199

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_n) με $\alpha_3 = -8$ και $\alpha_6 = -64$.

α) Να αποδείξετε ότι ο λόγος είναι $\lambda = 2$ και ο πρώτος όρος $\alpha_1 = -2$.

(Μονάδες 15)

β) Να αποδείξετε ότι: $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = -62$.

(Μονάδες 10)

6.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

101 – 13395

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 1, x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε ποιος από τους αριθμούς $f(-2)$ και $f(1)$ είναι μεγαλύτερος.

(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = f(1)$.

(Μονάδες 13)

102 – 14658

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 4$.

α) Να βρείτε ποιος από τους αριθμούς $f(-2)$ και $f(1)$ είναι μεγαλύτερος.

(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = f(1)$.

(Μονάδες 13)

103 – 14193

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x + 3, x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το $f(2)$.

(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \geq 7$ και να γράψετε τη λύση της σε διάστημα.

(Μονάδες 13)

104 – 14780

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας τιμών μιας αντιστοίχισης $x \rightarrow y$ με το x να παίρνει μόνο τις τιμές: $-2, -1, 0, \frac{1}{2}, 1$ και 3 .

x	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	3
y	0	-4	-6	$-\frac{25}{4}$	-6	0

α) Να αιτιολογήσετε γιατί η παραπάνω αντιστοίχιση $x \rightarrow y$ είναι συνάρτηση.

(Μονάδες 12)

β) Να γράψετε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης.

(Μονάδες 13)

105 – 14819

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - x}{3x^2 - x - 2}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ορίζεται η συνάρτηση f .

(Μονάδες 6)

β) Να παραγοντοποιήσετε τον παρονομαστή της συνάρτησης f .

(Μονάδες 4)

γ) Να απλοποιήσετε τον τύπο της f .

(Μονάδες 5)

δ) Να λύσετε την εξίσωση $|f(x)| = \frac{1}{4}$.

(Μονάδες 10)

106 – 14705

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |2x - 5| + 4, x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές $f(1), f(3)$ και $f\left(\frac{5}{2}\right)$.

(Μονάδες 9)

β) Να δικαιολογήσετε γιατί η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν έχει λύση.

(Μονάδες 6)

γ) Έστω $x \geq \frac{5}{2}$.

i. Να αποδείξετε ότι $f(x) = 2x - 1$.

(Μονάδες 5)

ii. Να λύσετε την εξίσωση $\frac{x^2}{5} + x = f(x)$.

(Μονάδες 5)

107 – 14632

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |x - 2| + x, x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την τιμή της όταν $x = 2$ και όταν $x = -3$.

(Μονάδες 10)

β) Έστω $x > 2$.

i. Να αποδείξετε ότι $f(x) = 2(x - 1)$

(Μονάδες 8)

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = (x - 2)(x - 1)$.

(Μονάδες 7)

108 – 13397

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |x - 3| + 4, x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές $f(2), f(3), f(4)$.

(Μονάδες 9)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί η εξίσωση $f(x) = 3$ δεν έχει λύση.

(Μονάδες 6)

γ) Έστω $x \geq 3$.

i. Να αποδείξετε ότι $f(x) = x + 1$.

(Μονάδες 5)

ii. Να λύσετε την εξίσωση $\frac{x^2}{16} + x = f(x)$.

(Μονάδες 5)

109 – 14716

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε το τριώνυμο $x^2 - 5x + 6$ και τη συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 5x + 6}$

α) Να βρείτε τις ρίζες του τριωνύμου και να το παραγοντοποιήσετε.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης και να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ο

παραπάνω τύπος της συνάρτησης γράφεται $f(x) = \frac{x}{x-3}$

(Μονάδες 9)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 4$

(Μονάδες 6)

110 – 14816

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = |x-2| + 3, x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές $f(0)$, $f(2)$ και $f(-2)$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x) = 7$.

(Μονάδες 8)

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχει $x \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση να πάρει την τιμή 2.

(Μονάδες 9)

111 – 14331

ΘΕΜΑ 4

α) Να αποδείξετε ότι $x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$.

(Μονάδες 7)

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x-1}$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

(Μονάδες 7)

ii) Να αποδείξετε ότι $f(x) = x - 2$, για κάθε x στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

(Μονάδες 6)

iii) Να βρείτε, αν υπάρχει, τιμή του πραγματικού αριθμού x , για την οποία $f(x) = -1$.

(Μονάδες 5)

112 – 14807

ΘΕΜΑ 4

Το διπλανό σχήμα αποτελείται από τέσσερα τετράγωνα Α, Β, Γ, Δ.

Αν καθένα από τα Α, Β έχει πλευρά ίση με x , $x > 0$

τότε:

α) Να βρείτε την περίμετρο του σχήματος.

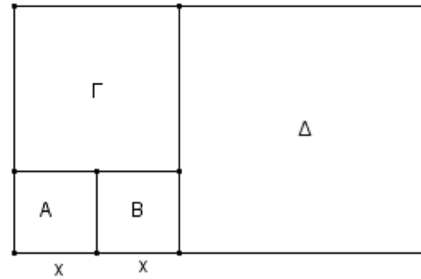
(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι για το εμβαδόν του $E(x)$ ισχύει $E(x) = 15x^2$

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του αριθμού x το εμβαδόν είναι μικρότερο από 240.

(Μονάδες 10)



6.2 ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

113 – 13500

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - 1$, με $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές $f(2)$ και $f(0)$.

(Μονάδες 14)

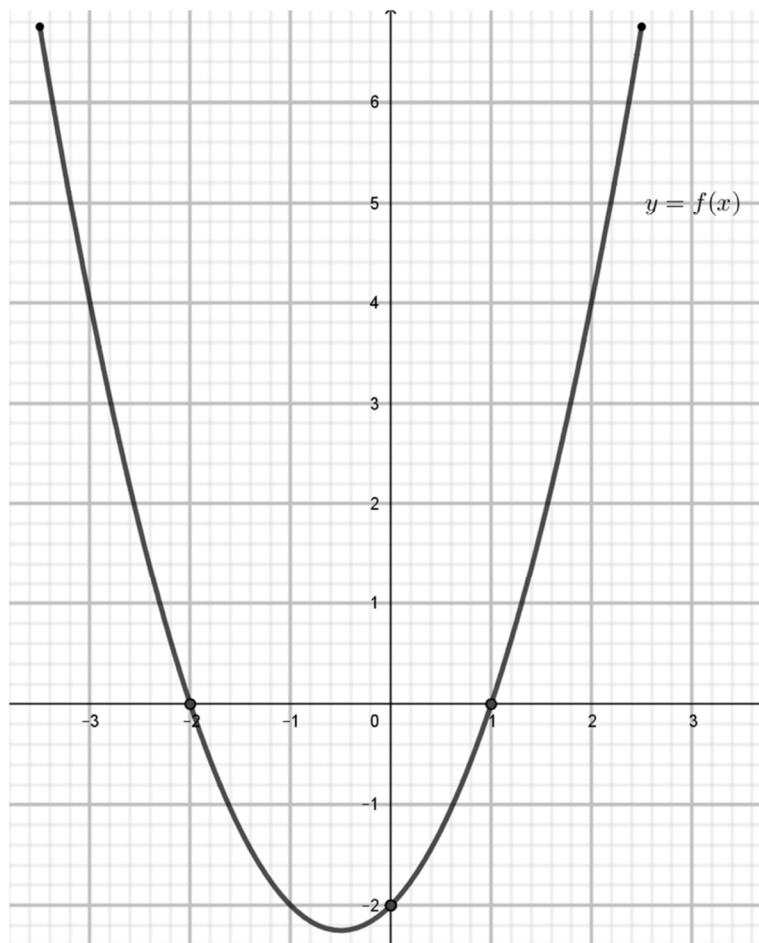
β) Να αιτιολογήσετε γιατί τα σημεία $A(2,7)$ και $B(0,-1)$ ανήκουν στη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f .

(Μονάδες 11)

114 – 14890

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f , με $-3,5 \leq x \leq 2,5$.



α)

i. Να βρείτε τα σημεία τομής της παραπάνω γραφικής παράστασης με τους άξονες.

(Μονάδες 6)

ii. Για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση είναι κάτω από τον x ' x άξονα;

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τα σημεία της παραπάνω γραφικής παράστασης που έχουν τεταγμένη $y = 4$.

(Μονάδες 13)

115 – 14768

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 4x - 20, x \in R$ και $g(x) = x^2 - 16, x \in R$.

α) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της g με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν μοναδικό κοινό σημείο, του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες του.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε την τετμημένη ενός σημείου της γραφικής παράστασης της f , του οποίου η τεταγμένη είναι -24 .

(Μονάδες 7)

116 – 14606

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x} + 1$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

(Μονάδες 8)

β) Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του x στο πεδίο ορισμού της f ώστε το σημείο $M(x, 2)$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε τις τιμές του x στο πεδίο ορισμού της f για τις οποίες $f(x) = x + 1$.

117 – 13462

ΘΕΜΑ 4

α) Να λύσετε την εξίσωση $|x-1|=4$ (1)

(Μονάδες 10)

β) Η εξίσωση $x^2 - Sx + P = 0$ έχει ίδιες ρίζες με την εξίσωση (1). Να βρείτε τα S και P .

(Μονάδες 7)

γ) Το σημείο $A(\rho, 5)$, όπου ρ ρίζα της εξίσωσης (1) ανήκει στο πρώτο τεταρτημόριο. Να βρείτε την τιμή του ρ .

(Μονάδες 8)

118 – 14318

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x+\alpha}{x+3}$, $x \neq -3$ και α ένας πραγματικός αριθμός. Αν η γραφική της παράσταση διέρχεται από την αρχή $O(0, 0)$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 0$.

(Μονάδες 5)

Για τη συνέχεια θεωρήσετε ότι $\alpha = 0$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 1$.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής της παράστασης με την ευθεία $y = x$.

(Μονάδες 10)

119 – 13396

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x-2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A .

(Μονάδες 5)

β) Να εξετάσετε αν τα σημεία $M(3,3)$ και $N(1, 1)$ ανήκουν στη γραφική της παράσταση.

(Μονάδες 12)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \frac{1}{2}$.

(Μονάδες 8)

120 – 14817

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \frac{x-1}{x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f .

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$. Τέμνει η γραφική παράσταση της f τον $y'y$ άξονα; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

γ) Να εξετάσετε αν στη γραφική παράσταση της f υπάρχει σημείο με τεταγμένη 1.

(Μονάδες 10)

121 – 14472

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 1$, $x \in \mathbb{R}$.α) Να βρείτε το $f(-2)$.

(Μονάδες 5)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $M(-2,3)$.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $x'x$.

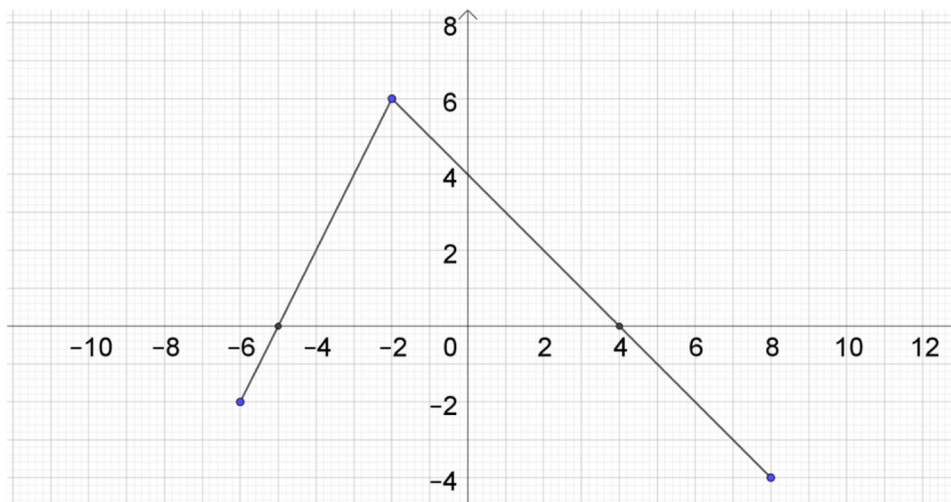
(Μονάδες 7)

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 0$.

(Μονάδες 8)

122 – 14822

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .

Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης

α) να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

(Μονάδες 5)

β) να βρείτε τις τιμές $f(-2)$, $f(0)$, $f(3)$.

(Μονάδες 6)

γ) να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει ότι $f(x) = 0$.

(Μονάδες 7)

δ) να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει ότι $f(x) < 0$.

(Μονάδες 7)

6.3 Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $f(x) = \alpha x + \beta$

123 – 14767

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x - 6, x \in \mathbb{R}$.α) Να βρείτε τους αριθμούς $f(0), f(3)$.

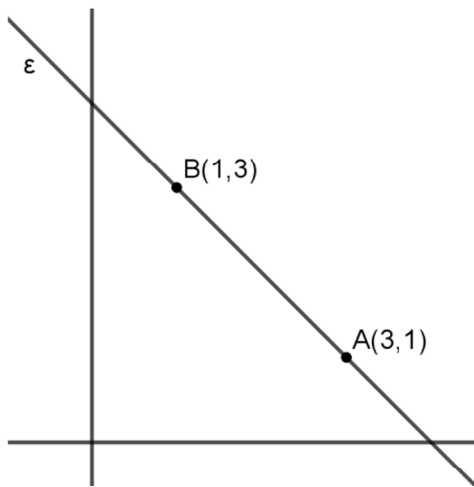
(Μονάδες 12)

β) Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της παραπάνω συνάρτησης.

(Μονάδες 13)

124 – 14643

ΘΕΜΑ 2

Η ευθεία ε διέρχεται από τα σημεία $A(3,1)$ και $B(1,3)$ α) Να δείξετε ότι η ευθεία ε έχει κλίση $\alpha = -1$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας.

(Μονάδες 13)

125 – 14461

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η ευθεία $y = \frac{4}{3}x - 4$.α) Να βρείτε τα σημεία τομής της A, B με τους άξονες και να την σχεδιάσετε.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου OAB , όπου O η αρχή των αξόνων.

(Μονάδες 12)

126 – 14197

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: y = 2x + 4$.

α) Να εξετάσετε ποια από τα παρακάτω σημεία ανήκουν στην ευθεία ε :

$A(-1,2)$, $B(6,1)$, $\Gamma(1,6)$.

(Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι η ευθεία ε τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $\Delta(-2,0)$.

(Μονάδες 7)

γ) Σχεδιάστε την ευθεία ε στο καρτεσιανό επίπεδο.

(Μονάδες 8)

127 – 14642

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^2 - 2x$.

α) Να βρείτε τα σημεία τομής A και B της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f και η ευθεία $\varepsilon: y = -1$ έχουν μοναδικό κοινό σημείο το $\Gamma(1, -1)$.

(Μονάδες 9)

γ) Να δείξετε ότι οι τετμημένες των σημείων A, Γ και B είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου της οποίας να βρείτε τη διαφορά ω .

(Μονάδες 8)

128 – 14657

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f .

(Μονάδες 8)

β)

i. Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης f .

(Μονάδες 7)

ii. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης $f(x) = x + 2, x \in \mathbb{R} - \{2\}$.

(Μονάδες 10)

129 – 14382

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4x - 3$ με $x \in \mathbb{R}$.

α)

i. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.

(Μονάδες 4)

ii. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $(1,1)$.

(Μονάδες 8)

β)

i. Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της f που έχει τεταγμένη 21.

(Μονάδες 9)

ii. Να παραστήσετε γραφικά την f .

(Μονάδες 4)

130 – 14821

ΘΕΜΑ 4

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ϵ) που διέρχεται από τα σημεία $M(3,6)$ και $O(0,0)$.

(Μονάδες 8)

β) Αν η εξίσωση της ευθείας (ϵ) είναι η $y = 2x$

i. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (η) που είναι παράλληλη στην ευθεία (ϵ) και διέρχεται από το σημείο $K(0,4)$.

(Μονάδες 9)

ii. Να βρείτε το σημείο τομής της ευθείας (η) με τον άξονα xx' .

(Μονάδες 8)

131 – 14708

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ευθεία $\epsilon: y = ax + 5$. Αν η ευθεία $\delta: y = -3x - 6$ είναι παράλληλη στην (ϵ), τότε:

α)

i. Να βρείτε την κλίση της ευθείας ϵ .

(Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε το είδος της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ϵ με τον άξονα $x'x$;

(Μονάδες 7)

β)

i. Να βρείτε σε ποια σημεία η ευθεία $\epsilon: y = -3x + 5$ τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

(Μονάδες 6)

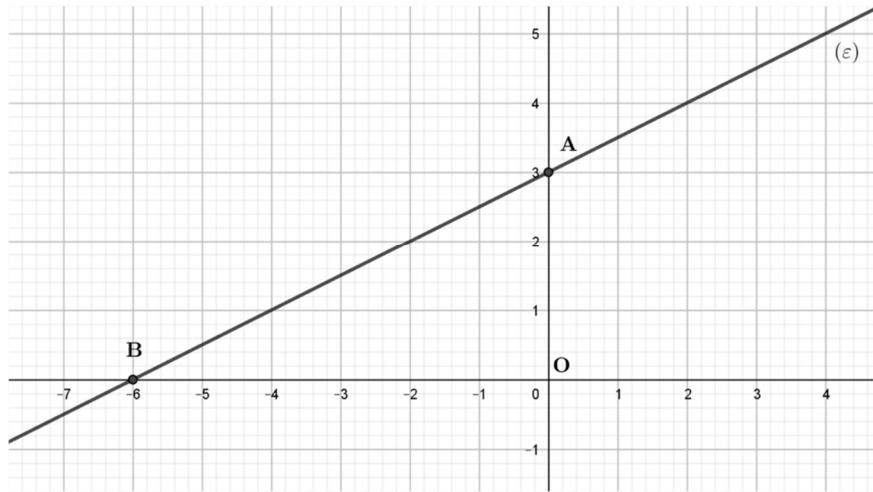
iii. Να σχεδιάσετε την ευθεία.

(Μονάδες 6)

132 – 14779

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η ευθεία (ε) με εξίσωση $y = \alpha x + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.



α) Να γράψετε τις συντεταγμένες του σημείου τομής A της ευθείας (ε) με τον άξονα $y'y$.

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι η κλίση της ευθείας (ε) ισούται με $\frac{1}{2}$.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β και στη συνέχεια να γράψετε την εξίσωση της ευθείας (ε) .

(Μονάδες 8)