2.1 ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΟΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥΣ

352 – 14555

ΘΕΜΑ 2

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει η σχέση

$(x - 2y)^2 - 2(3 - 2xy) = 5y^2 - 1$

α) Να αποδείξετε ότι $x^2 - y^2 = 5$.

(Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $P = (x+y)^3(x - y)^3$.

(Μονάδες 13)

353 – 14489

ΘΕΜΑ 2

Αν οι αριθμοί $2\alpha - 1$ και $\beta - 1$ είναι αντίστροφοι, με $\alpha \neq 1$ και $\beta \neq 1$ να δείξετε ότι:

α) $2\alpha + \beta = 2\alpha\beta$.

(Μονάδες 10)

β) Οι αριθμοί $x = \alpha - \beta$ και $y = \alpha(1 - 2\beta) + 2\beta$ είναι αντίθετοι.

(Μονάδες 15)

354 – 14458

ΘΕΜΑ 2

Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει:

$$(x+4y)(x+y)=9xy\ .$$

α) Να αποδείξετε ότι

i. $(2y-x)^2=0$

(Μονάδες 8)

ii. $y=\frac{x}{2}$.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι $\left(2y-\frac{x}{2}\right)^2+\left(2y+\frac{x}{2}\right)^2=10y^2$.

(Μονάδες 12)

355 – 13472

ΘΕΜΑ 2

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί, διαφορετικοί μεταξύ τους, για τους οποίους ισχύουν $\alpha^2=2\alpha+\beta$ και $\beta^2=2\beta+\alpha$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\alpha^2-\beta^2=\alpha-\beta$.

(Μονάδες 8)

ii. $\alpha+\beta=1$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A=\alpha^2+\beta^2$.

(Μονάδες 9)

2.2 ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

356 – 14492

ΘΕΜΑ 2

Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος x εκατοστά και πλάτος y εκατοστά, αντίστοιχα. Αν για τα μήκη x και y ισχύει: $4 \leq x \leq 7$ και $2 \leq y \leq 3$ τότε:

α) Να βρείτε μεταξύ ποιών τιμών κυμαίνεται η τιμή της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

(Μονάδες 12)

β) Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί, και να είναι μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, τότε να βρείτε μεταξύ ποιών τιμών κυμαίνεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

(Μονάδες 13)

357 – 14475

ΘΕΜΑ 2

Αν α και β πραγματικοί αριθμοί με $2 \leq \alpha \leq 4$ και $-4 \leq \beta \leq -3$, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

α) $\alpha + 2\beta$.

(Μονάδες 12)

β) $\alpha - \beta$.

(Μονάδες 13)

358 – 14820

ΘΕΜΑ 4

α) Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω ανισότητες ισχύουν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύουν ως ισότητες.

i. $x^2 + x + 1 \geq \frac{3}{4}$.

(Μονάδες 4)

ii. $x^2 - x + 1 \geq \frac{3}{4}$.

(Μονάδες 4)

β) Να δείξετε ότι $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) > \frac{9}{16}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 6)

γ) Δίνεται η παράσταση $A=\frac{(x^3-1)(x^3+1)}{x^2-1}$.

i. Να βρείτε για ποιες τιμές του $x\in\mathbb{R}$ ορίζεται η παράσταση A.

(Μονάδες 5)

ii. Με τη βοήθεια του β) ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο θέλετε, να εξετάσετε αν η παράσταση A μπορεί να πάρει την τιμή $\frac{9}{16}$.

(Μονάδες 6)

2.3 ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

359 – 14617

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η ανίσωση $|x-7|<1\ (I)$.

α) Να αποδείξετε ότι $x\in(6,8)$.

(Μονάδες 12)

β) Αν γνωρίζουμε ότι $k\in(6,8)$, να αποδείξετε ότι $\frac{24}{k}\in(3,4)$.

(Μονάδες 13)

360 – 14572

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται πραγματικός αριθμός x, για τον οποίο ισχύει: $|x+2|<1$.

Να δείξετε ότι:

α) $-3<x<-1$.

(Μονάδες 10)

β) $|2x+4|<2$.

(Μονάδες 15)

361 – 14599

ΘΕΜΑ 2

Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει $|2x|<2$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $-1<x<1$.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in(-1,1)$, ισχύει $x^2<1$.

(Μονάδες 13)

362 – 14412

ΘΕΜΑ 2

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α,β ισχύει $\alpha>\beta$, με $\beta>1$ και $\alpha>1$, τότε

α) Να δείξετε ότι $\dfrac{\alpha-\beta}{|\alpha-\beta|}-\dfrac{|1-\alpha|}{1-\alpha}=2$.

(Μονάδες 12)

β) Να δείξετε ότι $\alpha+\beta>\dfrac{\alpha-\beta}{|\alpha-\beta|}-\dfrac{|1-\alpha|}{1-\alpha}$.

(Μονάδες 13)

2.4 ΡΙΖΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

363 – 14774

ΘΕΜΑ 2

α) Να δείξετε ότι $\left(2+\sqrt{5}\right)^2=9+4\sqrt{5}$ και $\left(1-\sqrt{5}\right)^2=6-2\sqrt{5}$

(Μονάδες 13)

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος α) ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε, να δείξετε ότι $\sqrt{9+4\sqrt{5}}+\sqrt{6-2\sqrt{5}}=1+2\sqrt{5}$.

(Μονάδες 12)

364 – 14452

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha=\sqrt{3}-1$ και $\beta=\sqrt{3}+1$.

α) Να δείξετε ότι $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=10$.

(Μονάδες 15)

β) Να δείξετε ότι $\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}+1=5$.

(Μονάδες 10)

365 – 14682

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι αριθμοί: $A=(\sqrt{3})^6$ και $B=(\sqrt[3]{3})^6$.

α) Να δείξετε ότι: $A-B=18$.

(Μονάδες 12)

β) Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{3}$.

(Μονάδες 13)

366 – 14931

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β, με $\alpha = 1+\sqrt{2}$ και $\beta = 1-\sqrt{2}$.

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\mathrm{A} = \alpha^2 - \beta^2$.

(Μονάδες 7)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\mathrm{B} = \sqrt{\alpha^2} - \sqrt{\beta^2}$.

(Μονάδες 8)

γ) Αν $\mathrm{A} = 4\sqrt{2}$ και $\mathrm{B} = 2$, να δείξετε ότι $\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} > \sqrt{\alpha^2} - \sqrt{\beta^2}$.

(Μονάδες 10)

3.1 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 1ου ΒΑΘΜΟΥ

367 – 14224

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση: $\mathrm{A} = \dfrac{x^2-1}{x^2-x}, x \neq 0, x \neq 1$.

α) Να δείξετε ότι $\mathrm{A} = \dfrac{x+1}{x}$.

(Μονάδες 8)

β)

i. Να βρείτε για ποια τιμή του x η παράσταση A μηδενίζεται.

(Μονάδες 8)

ii. Μπορεί η παράσταση A να πάρει την τιμή 2; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

368 – 14649

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση $K = |x+1| + 2$, όπου $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $K = \begin{cases} x+3, & \alpha\nu\ x \geq -1 \\ 1-x, & \alpha\nu\ x < -1 \end{cases}$.

(Μονάδες 12)

β)

i. Να λυθεί η εξίσωση $|x-2| = 4$.

ii. Να βρείτε την τιμή της παράστασης K αν ο αριθμός x είναι λύση της παραπάνω εξίσωσης.

(Μονάδες 13)

369 – 13170

ΘΕΜΑ 4

Υποθέτουμε ότι κάθε κεφάλαιο που κατατίθεται σε έναν λογαριασμό μιας τράπεζας, αυξάνεται στο τέλος κάθε έτους κατά ε % (το επίσημο επιτόκιο αύξησης που δίνει δηλαδή η τράπεζα είναι ε %).

α) Αποδείξτε ότι αν καταθέσουμε στη συγκεκριμένη τράπεζα κεφάλαιο x € με επιτόκιο ε %, ύστερα από δύο έτη θα εισπράξουμε κεφάλαιο $x \cdot \left(1+\frac{\varepsilon}{100}\right)^2$ €.

(Μονάδες 7)

β) Ένα κεφάλαιο 15.000 € το χωρίζουμε σε δύο ποσά. Το ένα από τα δύο, κατατέθηκε σε μια τράπεζα Α με επιτόκιο 2% και το άλλο, κατατέθηκε σε μια άλλη τράπεζα Β με επιτόκιο 3%. Ύστερα από 2 χρόνια, εισπράχθηκε, με βάση το α) ερώτημα, και από τις δύο τράπεζες συνολικό κεφάλαιο 15.811 €. Ονομάζουμε y το ποσό που κατατέθηκε στην τράπεζα Β.

i) Να αποδείξετε ότι το ποσό y είναι λύση της εξίσωσης

$$(1{,}03^2 - 1{,}02^2)\cdot y = 15811 - 15000 \cdot 1{,}02^2$$

(Μονάδες 10)

ii) Να βρείτε το κεφάλαιο που κατατέθηκε σε κάθε τράπεζα.

(Μονάδες 8)

3.3 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

370 – 14759

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^2 + 6\alpha x + 6\beta,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι: $f(\alpha) + f(\beta) \geq \beta^2 - 36$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $f(\alpha) + f(\beta) = \beta^2 - 36$.

(Μονάδες 6)

γ) Αν $\alpha = 2$ και $\beta = -6$

i. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 6x$.

(Μονάδες 6)

ii. Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος γi), να δείξετε ότι ισχύει:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{6}.$$

(Μονάδες 5)

371 – 14543

ΘΕΜΑ 4

Κάθε περιττός ακέραιος αριθμός α γράφεται στη μορφή $a=2k+1$, k ακέραιος.

α) Να γράψετε τους αριθμούς 3,5,7 ως διαφορά τετραγώνων δύο ακεραίων.

(Μονάδες 6)

β) i) Να αποδείξετε ότι η διαφορά των τετραγώνων δύο διαδοχικών ακεραίων ισούται πάντα με έναν περιττό ακέραιο.

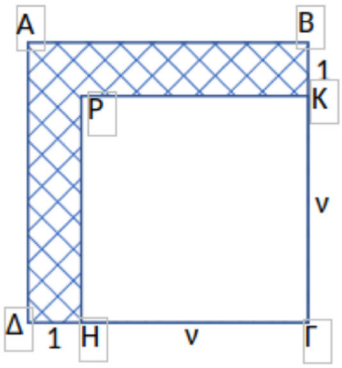
(Μονάδες 6)

ii) Να γράψετε τον αριθμό 2021 ως διαφορά δύο τετραγώνων ακεραίων αριθμών.

(Μονάδες 6)

γ) Στο σχήμα τα τετράπλευρα ΑΒΓΔ και ΓΗΡΚ είναι τετράγωνα με (ΓΗ)=(ΓΚ)=ν και (ΒΚ)=(ΔΗ)=1. Αν γνωρίζουμε ότι το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν είναι ίσο με το εμβαδόν ενός τετραγώνου πλευράς 45, να βρεθεί η τιμή του θετικού ακεραίου ν.

(Μονάδες 7)



372 – 14406

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί α, β, με $\alpha \neq \beta$ για τους οποίους ισχύει:

$\frac{\alpha^2+1}{\beta^2+1}=\frac{\alpha}{\beta}$.

α) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι αντίστροφοι.

(Μονάδες 5)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $K = \frac{\alpha^{22}\cdot(\beta^3)^8}{\alpha^{-2}\cdot(\alpha\beta)^{25}}$.

(Μονάδες 7)

γ) Αν επιπλέον οι μη μηδενικοί αριθμοί α και β εκφράζουν τα μήκη των πλευρών ορθογωνίου παραλληλογράμμου με άθροισμα $\frac{5}{2}$, να τους υπολογίσετε.

(Μονάδες 8)

δ) Να βρείτε τον αριθμό που πρέπει να προσθέσετε στο α ή στο β, έτσι ώστε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο να γίνει τετράγωνο.

(Μονάδες 5)

373 – 14490

ΘΕΜΑ 4

Έστω Ω το σύνολο που έχει ως στοιχεία τους αριθμούς που είναι οι ενδείξεις ενός ζαριού.

α) Να γράψετε με αναγραφή το σύνολο Ω.

(Μονάδες 5)

β) Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2x + \lambda - 2 = 0$, με $\lambda \in R$.

Να βρείτε:

i. Το σύνολο Α που περιέχει ως στοιχεία τις τιμές του $\lambda \in \Omega$, αν επιπλέον γνωρίζετε ότι η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες.

(Μονάδες 10)

ii. Την πραγματική τιμή του λ, αν η εξίσωση έχει ρίζες αντίστροφες.

(Μονάδες 6)

γ) Για την τιμή του λ που βρήκατε στο ερώτημα β ii να υπολογίσετε τις ρίζες της εξίσωσης.

(Μονάδες 4)

374 – 12912

ΘΕΜΑ 4

α) Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση: $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$.

Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε.

(Μονάδες 10)

β) Γενικεύοντας το παράδειγμα του προηγούμενου ερωτήματος, θεωρούμε τη διτετράγωνη εξίσωση: $x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$ (1) με παραμέτρους $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

Αν $\beta < 0$, $\gamma > 0$ και $\beta^2 - 4\gamma > 0$, τότε η εξίσωση (1) έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

(Μονάδες 15)

4.1 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 1ου ΒΑΘΜΟΥ

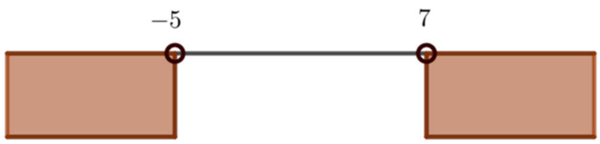
375 – 14295

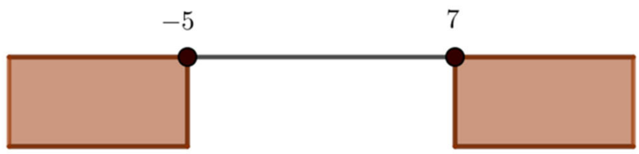
ΘΕΜΑ 2

α) Να διατυπώσετε γεωμετρικά το ζητούμενο της ανίσωσης $|x-1| \geq 6$ και στη συνέχεια να βρείτε τη θέση του πραγματικού αριθμού x πάνω στον άξονα, επιλέγοντας μια από τις παρακάτω αναπαραστάσεις:

1. 

2. 

3. 

4. 

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο α) ερώτημα.

(Μονάδες 13)

376 – 14319

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η ανίσωση $|2x-5|<3$

α) Να λύσετε την ανίσωση.

(Μονάδες 12)

β) αν ο αριθμός α είναι μια λύση της ανίσωσης να βρείτε το πρόσημο του γινομένου:

$$A=(\alpha-1)(\alpha-5).$$

(Μονάδες 13)

377 – 14650

ΘΕΜΑ 4

α) Να λύσετε την ανίσωση: $|x-1| \leq 3$ (1).

(Μονάδες 7)

β) Να απεικονίσετε το σύνολο των λύσεων της ανίσωσης αυτής πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να ερμηνεύσετε το αποτέλεσμα, με βάση τη γεωμετρική σημασία της παράστασης $|x-1|$.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε όλους τους ακέραιους αριθμούς x που ικανοποιούν την ανίσωση $|x-1| \leq 3$.

(Μονάδες 5)

δ) Να βρείτε τους ακέραιους αριθμούς x που ικανοποιούν την ανίσωση $\big||x|-1\big| \leq 3$. Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

(Μονάδες 8)

4.2 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

378 – 14577

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - x - 2 = 0$ (1).

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό -1 .

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε και τη δεύτερη ρίζα της εξίσωσης (1).

(Μονάδες 8)

γ) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $\mathrm{A} = \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 + x}$, $x \neq 0, x \neq -1$.

(Μονάδες 9)

379 – 14189

ΘΕΜΑ 2

α) Αν $x^2 - 3x - 4 < 0$, να δείξετε ότι $-1 < x < 4$.

(Μονάδες 12)

β) Δίνεται η παράσταση $A = |2x+2| + |x-5|$ με τις τιμές του x να επαληθεύουν την ανίσωση του ερωτήματος α). Να αποδείξετε ότι: $A = x + 7$.

(Μονάδες 13)

380 – 14474

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το τριώνυμο $2x^2 + 3x - 5$.

α) Να εξετάσετε αν το 1 είναι ρίζα του τριωνύμου.

(Μονάδες 12)

β) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο.

(Μονάδες 13)

381 – 14615

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in R$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί η εξίσωση έχει, για οποιαδήποτε τιμή του λ, πραγματικές και άνισες ρίζες.

(Μονάδες 6)

β) Να λύσετε την εξίσωση.

(Μονάδες 7)

Έστω ρ_1 , ρ_2 οι ρίζες της εξίσωσης με $\rho_1 < \rho_2$.

γ) Να βρείτε για ποιες της παραμέτρου λ, η απόσταση των αριθμών ρ_2 και $-\rho_1$ πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών, είναι τουλάχιστον 8.

(Μονάδες 6)

δ) Θεωρούμε έναν αριθμό k ώστε $\rho_1 < k < \rho_2$. Να βρείτε, με απόδειξη, το πρόσημο του αριθμού $k^2 - 2\lambda k + \lambda^2 - 1$

(Μονάδες 6)

382 – 14924

ΘΕΜΑ 4

α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 - x - 12$ για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι $\left(\dfrac{\pi+9}{3}\right)^2 - \left(\dfrac{\pi+9}{3}\right) - 12 > 0$, όπου $\pi = 3{,}1415...$.

(Μονάδες 9)

γ) Αν για τον πραγματικό αριθμό α ισχύει ότι $(|\alpha|+3)^2 - (|\alpha|+3) - 12 < 0$, να δείξετε ότι $\alpha \in (-1,1)$.

(Μονάδες 8)

383 – 14652

ΘΕΜΑ 4

α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 > x$ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

(Μονάδες 8)

β) Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός α με $\alpha > 1$.

i. Να βάλετε στη σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο τους αριθμούς: $0, 1, \alpha, \alpha^2, \sqrt{\alpha}$ αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

ii. Να κάνετε το ίδιο για τους αριθμούς: $\alpha, \alpha^2, \dfrac{\alpha+\alpha^2}{2}$.

(Μονάδες 7)

384 – 14654

ΘΕΜΑ 4

α) Δίνεται το τριώνυμο $x^2-3x+2,\ x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου.

(Μονάδες 10)

β) Θεωρούμε πραγματικούς αριθμούς α,β με $\alpha<\beta$ για τους οποίους ισχύει

$$\left(\alpha^2-3\alpha+2\right)\left(\beta^2-3\beta+2\right)<0\ .$$

i. Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $\alpha-1$ και $\beta-2$ είναι ομόσημοι .

(Μονάδες 10)

ii. Να δείξετε ότι $\left|(\alpha-1)(\beta-2)\right|=(\alpha-1)(\beta-2)$.

(Μονάδες 5)

385 – 14653

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η ανίσωση $|x-1|\leq 3$. (1)

α) Να λύσετε την ανίσωση (1).

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε όλες τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1).

(Μονάδες 3)

γ) Να βρείτε μία ανίσωση 2ου βαθμού που να έχει τις ίδιες ακριβώς λύσεις με την (1).

(Μονάδες 8)

δ) Να δείξετε ότι αν το τετράγωνο ενός αριθμού ελαττωμένο κατά 8 δεν ξεπερνάει το διπλάσιό του, τότε η απόσταση του από το 1 δεν ξεπερνάει το 3.

(Μονάδες 7)

5.2 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ

386 – 14512

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε τις εξισώσεις $x^2=1$ και $x^2=9$.

(Μονάδες 9)

β) Να διατάξετε τις λύσεις των εξισώσεων του α) ερωτήματος σε αύξουσα σειρά και στη συνέχεια

i. να δείξετε ότι με αυτή τη σειρά αποτελούν διαδοχικούς αριθμητικής προόδου (α_ν) της οποίας να βρείτε τη διαφορά ω.

(Μονάδες 9)

ii. να δείξετε ότι ο αριθμός 46 δεν αποτελεί όρο της προόδου (α_ν).

(Μονάδες 7)

387 – 14656

ΘΕΜΑ 2

Σε μία αριθμητική πρόοδο (αν) δίνονται $\alpha_1 = 41$ και $\alpha_6 = 26$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι ίση με -3.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε το θετικό ακέραιο ν, ώστε $\alpha_\nu = \nu$.

(Μονάδες 13)

388 – 14597

ΘΕΜΑ 2

Ένα μικρό γήπεδο μπάσκετ έχει δέκα σειρές καθισμάτων και κάθε επόμενη σειρά έχει τέσσερα καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη. Η έβδομη σειρά έχει 36 καθίσματα.

α) Αποτελούν τα καθίσματα κάθε σειράς του γηπέδου όρους αριθμητικής προόδου; Αιτιολογήσετε τον συλλογισμό σας.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το πλήθος των καθισμάτων της πρώτης σειράς.

(Μονάδες 8)

γ) Πόσα καθίσματα έχει το γήπεδο συνολικά.

(Μονάδες 9)

389 – 14574

ΘΕΜΑ 2

Ο 1^{ος} όρος μιας αριθμητικής προόδου (α_ν) ισούται με 2 και ο 3^{ος} όρος ισούται με 8.

α) Να βρείτε τη διαφορά ω της προόδου.

(Μονάδες 12)

β) Αν είναι $\omega = 3$, να βρείτε ποιος όρος της προόδου ισούται με 35.

(Μονάδες 13)

390 – 14476

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) των θετικών περιττών αριθμών: $1,\ 3, 5, 7,...$

α)

i. Να γράψετε τον πρώτο όρο και τη διαφορά της προόδου.

(Μονάδες 4)

ii. Να βρείτε τον τριακοστό της όρο.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των 30 πρώτων όρων της προόδου ισούται με 30^2.

(Μονάδες 13)

391 – 14616

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) με διαφορά ω για την οποία πρόοδο ισχύει η σχέση $\alpha_{20} - \alpha_{10} = 40$, ενώ ο πρώτος όρος της προόδου είναι $\alpha_1 = 5$.

α) Να αποδείξετε ότι $\omega = 4$.

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha_\nu = 4\nu + 1$, όπου ν θετικός ακέραιος.

γ) Να βρείτε τον μικρότερο δυνατό όρο της προόδου, ο οποίος είναι μεγαλύτερος του αριθμού 1589.

δ) Έστω ν τυχαίος θετικός ακέραιος και $k = \nu(\nu+1)$. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός α_k είναι τετράγωνο θετικού ακέραιου.

392 – 14927

ΘΕΜΑ 4

Ένας χώρος δεξίωσης γάμων διαφημίζεται ως εξής: το κόστος για 50 καλεσμένους είναι 6560 ευρώ, ενώ για 100 καλεσμένους είναι 11910 ευρώ. Επιπλέον, μόνο για τη δέσμευση του χώρου πρέπει ο ενδιαφερόμενος να πληρώσει ένα πάγιο ποσό, ακόμα κι αν τελικά δεν γίνει η δεξίωση. Υποθέτουμε ότι οι τιμές του κόστους για τους καλεσμένους είναι όροι αριθμητικής προόδου (α_ν).

α) Να δείξετε ότι το κόστος για ν καλεσμένους είναι $\alpha_\nu = 107\nu + 1210$. (1)

(Μονάδες 9)

β) Να ερμηνεύσετε τη σημασία

i. του αριθμού 1210 στη σχέση (1).

(Μονάδες 5)

ii. της διαφοράς $\omega = 107$ της προόδου στο πλαίσιο του προβλήματος.

(Μονάδες 5)

γ) Να υπολογίσετε το κόστος για 80 καλεσμένους.

(Μονάδες 6)

393 – 14809

ΘΕΜΑ 4

Ο Θοδωρής γράφει διαδοχικά και επαναλαμβανόμενα τα γράμματα της λέξης «ΑΛΓΕΒΡΑ». Στην πρώτη θέση το Α, στη δεύτερη το Λ, κοκ. Έτσι, σχηματίζεται η διαδοχή γραμμάτων

ΑΛΓΕΒΡΑΑΛΓΕΒΡΑΑΛΓΕΒΡΑΑΛΓΕΒΡΑ…

α) Να αποδείξετε ότι οι θέσεις, στην διαδοχή, όπου συναντάμε το γράμμα Β σχηματίζουν αριθμητική πρόοδο (α_ν) με $\alpha_1 = 5$ και να βρείτε τη διαφορά της.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε σε ποια θέση της διαδοχής συναντάμε για 23η φορά το γράμμα Β.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε το γράμμα που βρίσκεται στην 200η θέση στην παραπάνω διαδοχή.

(Μονάδες 9)

394 – 14758

ΘΕΜΑ 4

Ένα εργοστάσιο κατασκευής πολυτελών αυτοκινήτων κατασκευάζει ένα νέο μοντέλο. Τον πρώτο μήνα κατασκευάστηκαν 5 τέτοια οχήματα. Στη συνέχεια όμως, κάθε μήνα κατασκευάζονταν 13 νέα οχήματα.

α) Πόσα αυτοκίνητα θα είναι κατασκευασμένα συνολικά στο τέλος κάθε μήνα στο διάστημα του πρώτου εξαμήνου;

(Μονάδες 6)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί ο συνολικός αριθμός των αυτοκινήτων που είναι κατασκευασμένα στο τέλος κάθε μήνα αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.

(Μονάδες 6)

γ) Πόσα αυτοκίνητα κατασκευάστηκαν τα τέσσερα πρώτα χρόνια;

(Μονάδες 6)

δ) Μετά από πόσους μήνες θα έχει κατασκευαστεί το $250^{ο}$ αυτοκίνητο;

(Μονάδες 7)

5.3 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ

395 – 14375

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - \mu x - 2,\ \mu \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές άνισες για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τις τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ για τις οποίες οι αριθμοί $x = -2$ και $x = 3$ βρίσκονται εκτός του διαστήματος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$ ενώ ο $x = 1$ βρίσκεται εντός του διαστήματος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$.

(Μονάδες 6)

γ) Αν επιπλέον οι τιμές $f(-2),\ f(1),\ f(3)$ με τη σειρά που δίνονται αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου τότε:

i. Να βρείτε τις τιμές του μ.

(Μονάδες 7)

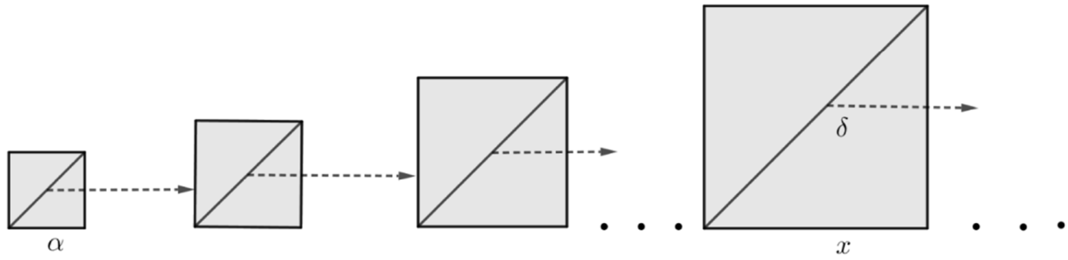
ii. Για $\mu = \frac{13}{7}$ να βρείτε το λόγο της παραπάνω γεωμετρικής προόδου.

(Μονάδες 6)

396 – 14645

ΘΕΜΑ 4

Ένας ζωγράφος ξεκινώντας από ένα τετράγωνο πλευράς α, σχεδιάζει διαδοχικά τετράγωνα παίρνοντας κάθε φορά ως πλευρά του νέου τετραγώνου, τη διαγώνιο του προηγούμενου τετραγώνου όπως φαίνεται στο σχήμα:



α)

i. Αν η πλευρά ενός τετραγώνου έχει μήκος x, να αποδείξετε ότι η διαγώνιός του δ έχει μήκος $\delta = \sqrt{2} \cdot x$.

(Μονάδες 4)

ii. Να αποδείξετε ότι τα εμβαδά των διαδοχικών τετραγώνων είναι όροι γεωμετρικής προόδου (α_ν) με λόγο $\lambda = 2$ και γενικό όρο $\alpha_\nu = \alpha^2 2^{\nu-1}$.

(Μονάδες 7)

β) Αν το εμβαδόν του τέταρτου κατά σειρά τετραγώνου ισούται με $8\ \tau.\mu.$, να βρείτε:

i. την πλευρά α του αρχικού τετραγώνου.

(Μονάδες 8)

ii. το πλήθος των αρχικών τετραγώνων με συνολικό εμβαδόν $255\ \tau.\mu.$

(Μονάδες 6)

6.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

397 – 14728

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x < 0 \\ x^2 + 1, & x \geq 0 \end{cases}$.

α) Να βρείτε τις τιμές της συνάρτησης $f(-1)$ και $f(1)$.

(Μονάδες 12)

β) Για $x \geq 0$ να λύσετε την ανίσωση: $f(x) \geq 2$.

(Μονάδες 13)

398 – 14681

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < 0 \\ 2x + 2, & x \geq 0 \end{cases}$

α) Να βρείτε τις τιμές $f(3)$ και $f(-3)$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει: $f(x) = 8$.

(Μονάδες 13)

399 – 14781

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας τιμών μιας αντιστοίχισης $x \to y$ με το x να παίρνει μόνο τις τιμές: $-2, -1, 0, \frac{1}{2}, 1$ και 3.

x	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	3
y	0	-4	-6	$-\frac{25}{4}$	-6	0

α)

i. Να αιτιολογήσετε γιατί η παραπάνω αντιστοίχιση $x \to y$ είναι συνάρτηση.

ii. Είναι η αντιστοίχιση $y \to x$ συνάρτηση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)

β) Να γράψετε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης $x \to y$.

(Μονάδες 12)

400 – 14562

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2}$.

α)

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f.

(Μονάδες 7)

ii. Να δείξετε ότι $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$ για κάθε $x \in A$.

(Μονάδες 8)

β) Να εξετάσετε αν η ευθεία $y = 1$ έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της $|f(x)|$.

(Μονάδες 10)

401 – 14629

ΘΕΜΑ 4

Σε μια γραπτή εξέταση 100 ερωτήσεων Σ-Λ (Σωστό - Λάθος) σε κάποιο Πανεπιστήμιο, κάθε σωστή απάντηση βαθμολογείται με 1 μονάδα και κάθε λανθασμένη απάντηση βαθμολογείται με $-\frac{1}{3}$ της μονάδας (για κάθε τριάδα λανθασμένων απαντήσεων αφαιρείται μια μονάδα).

α) Να αποδείξετε ότι αν ένας φοιτητής απαντήσει σωστά σε x από τις 100 ερωτήσεις, τότε η βαθμολογία του $E(x)$ δίνεται από τον τύπο $E(x)=\frac{4}{3}(x-25)$.

(Μονάδες 7)

β) Ένας φοιτητής βαθμολογήθηκε με 88. Πόσες ήταν οι σωστές και πόσες οι λανθασμένες απαντήσεις που έδωσε;

(Μονάδες 4)

γ) Να αποδείξετε ότι η βαθμολογία ενός φοιτητή δεν μπορεί να είναι ίση με 50. Πόσες σωστές απαντήσεις πρέπει να δώσει ένας φοιτητής για να πάρει βαθμολογία μεγαλύτερη από τη βάση που είναι 50;

(Μονάδες 8)

δ) Το άθροισμα των επιδόσεων δυο φοιτητών ήταν 140. Πόσες ήταν οι λανθασμένες απαντήσεις και των δυο μαζί;

(Μονάδες 6)

402 – 14702

ΘΕΜΑ 4

Για της ανάγκες ενός αρχιτεκτονικού σχεδίου ενός κτηρίου, απαιτείται η κατασκευή μιας μακέτας ενός πάρκου, σχήματος ορθογώνιου ΑΒΓΔ, με διαστάσεις x και $2x-1$, όπου $x>\frac{1}{2}$.

α) Να εκφράσετε την περίμετρο Π και το εμβαδόν Ε της μακέτας σε συνάρτηση του x.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνονται οι διαστάσεις της μακέτας, ώστε η περίφραξη του πάρκου στη μακέτα, να μη ξεπερνά τα 8 μέτρα.

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε τις τιμές του x, ώστε το εμβαδόν της μακέτας, να είναι το πολύ 1 τετραγωνικό μέτρο.

(Μονάδες 10)

6.2 ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

403 – 14306

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{5} + 3$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης .

(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε το f(-24).

(Μονάδες 7)

γ) Να εξετάσετε αν το σημείο (1,3) ανήκει στην γραφική παράσταση;

(Μονάδες 8)

404 – 14072

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f.

(Μονάδες 8)

β) Ανήκει το σημείο $\mathrm{M}(1,3)$ στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f;

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

(Μονάδες 9)

405 – 14628

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2-4}{x}, x \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση C_f διέρχεται από το σημείο $A(4, 3)$.

(Μονάδες 7)

β) Να εξετάσετε αν το σημείο $B(-4, -3)$ είναι σημείο της C_f.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης C_f της f με την ευθεία $y = 3$.

(Μονάδες 10)

406 – 14596

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\frac{x^2-2x-3}{x+1}$ με $x \neq -1$.

α) Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης και να δείξετε ότι $f(x)=x-3$ για κάθε $x \neq -1$.

(Μονάδες 13)

β) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(1,-4)$.

(Μονάδες 12)

407 – 14603

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση f, με: $f(x)=\begin{cases} 2x-5, & x \leq 3 \\ x^2, & 3<x<10 \end{cases}$

α) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(-1)$, $f(3)$ και $f(5)$.

(Μονάδες 6)

β) Διέρχεται η γραφική παράσταση της f από την αρχή των αξόνων; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον $y'y$ άξονα.

(Μονάδες 9)

408 – 14745

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $g(x)$. Κάποια σημεία της γραφικής παράστασης που έχουν ακέραιες συντεταγμένες έχουν σημειωθεί με έντονο τρόπο.

α) Να λύσετε την ανίσωση $-2 \leq g(x) \leq 0$.

(Μονάδες 6)

β) Να λύσετε την ανίσωση $|g(x)| \leq 2$.

(Μονάδες 7)

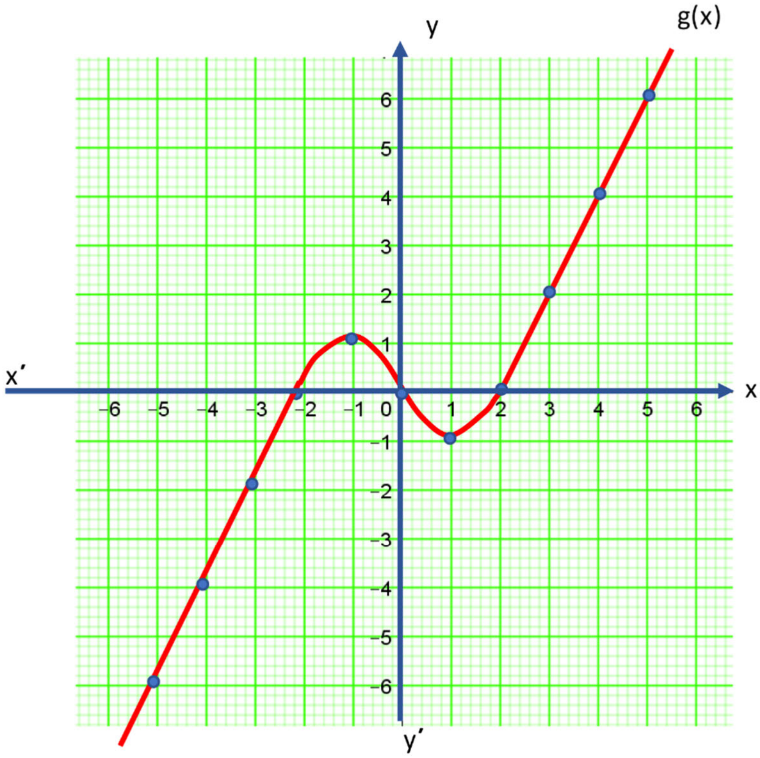
γ)

i. Να βρείτε το πλήθος λύσεων των εξισώσεων $g(x)=\frac{4}{5}$ και $g(x)=-1$.

(Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε το πλήθος λύσεων της εξίσωσης $g(x)=k$ για τις διάφορες πραγματικές τιμές της παραμέτρου k.

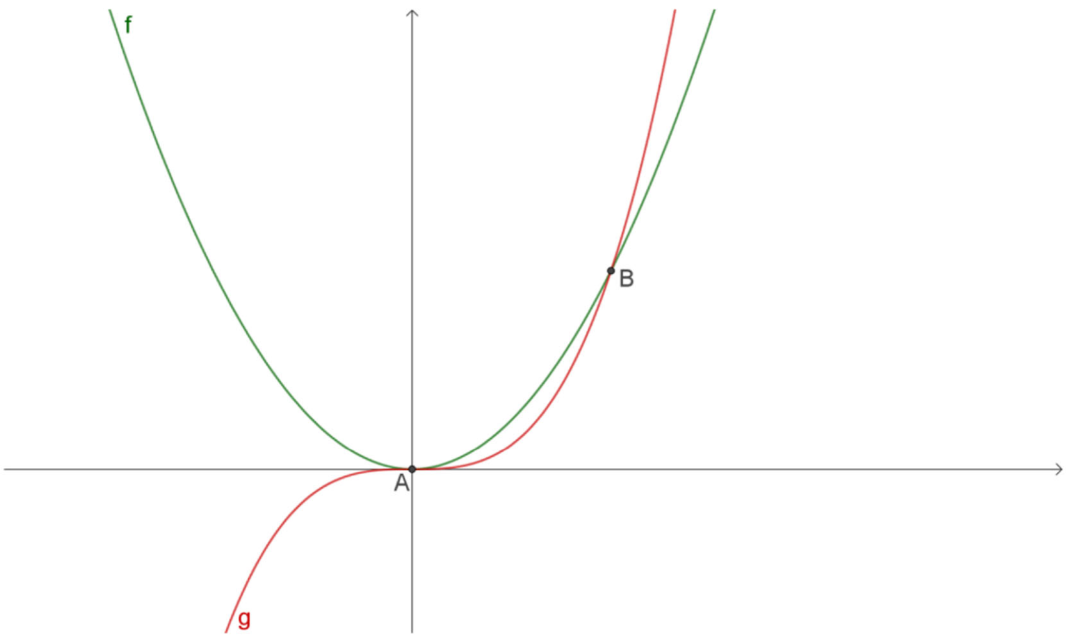
(Μονάδες 6)



409 – 14665

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=x^2$ και $g(x)=x^3$ που τέμνονται στα σημεία A,B.



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A,B.

(Μονάδες 8)

Έστω $A(0,0), B(1,1)$.

β) Με βάση το παραπάνω σχήμα ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο θέλετε, να δείξετε ότι για κάθε $x \in (0,1)$ ισχύει ότι $x^3 < x^2$.

(Μονάδες 6)

γ) Είναι ο κύβος οποιουδήποτε αριθμού μεγαλύτερος από το τετράγωνό του;
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

δ) Για τον πραγματικό αριθμό $\pi = 3{,}1415...$ να δείξετε ότι

i. $(\pi - 3)^3 < (\pi - 3)^2$.

(Μονάδες 3)

ii. $\pi^3 - 10\pi^2 + 33\pi - 36 < 0$.

(Μονάδες 3)

410 – 14190

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + x + 1\,, x \in R$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό $\alpha \neq -\frac{1}{2}$, τα σημεία της γραφικής παράστασης της f με τετμημένες α και $-\alpha - 1$ έχουν την ίδια τεταγμένη.

(Μονάδες 8)

γ) Θεωρούμε μεταβλητό σημείο Μ της γραφικής παράστασης της f με τετμημένη $\beta > 0$. Από το Μ φέρνουμε παράλληλες ευθείες προς τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και έστω Α και Δ τα σημεία τομής αυτών των ευθειών με τους άξονες, όπου το Α ανήκει στον $x'x$ και το Δ στον $y'y$. Αποδείξτε ότι η περίμετρος του ορθογωνίου ΟΑΜΔ είναι $\left[\sqrt{2}(\beta + 1)\right]^2$.

(Μονάδες 9)

411 – 14459

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ και η ευθεία $y=\alpha, \alpha\in\mathbb{R}$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση C_f της f είναι πάνω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι αν $0<\alpha<1$, τότε η C_f έχει με την ευθεία δυο κοινά σημεία των οποίων να βρείτε τις τετμημένες.

(Μονάδες 10)

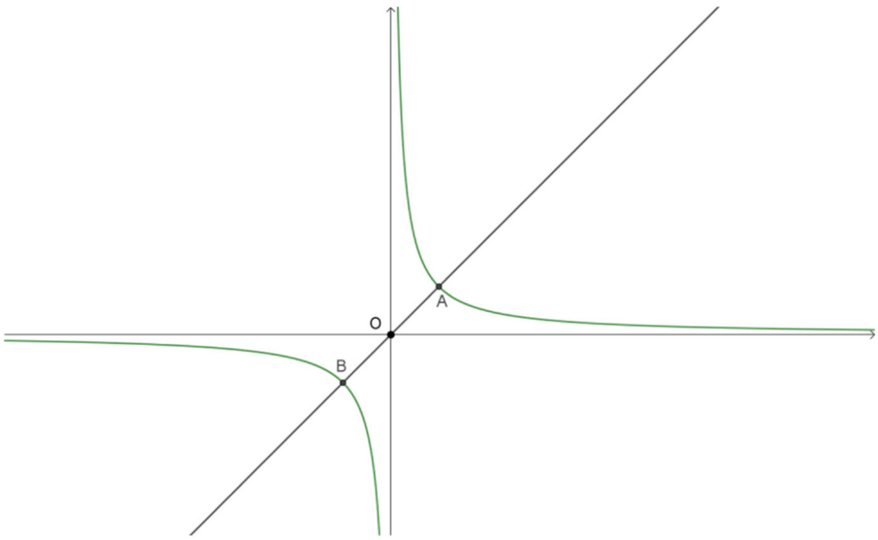
γ) Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό x ισχύει $|xf(x)|\leq\frac{1}{2}$.

(Μονάδες 10)

412 – 14925

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της $f(x)=\frac{1}{x}$ και η ευθεία AB με εξίσωση $y=x$.



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των A, B και να δείξετε ότι το $O(0,0)$ είναι το μέσο του AB.

(Μονάδες 9)

Έστω $M(x,y)$ τυχαίο σημείο της γραφική παράστασης της f.

β) Να δείξετε ότι και το συμμετρικό M' του M ως προς το O(0,0) ανήκει στη γραφική παράσταση της f.

(Μονάδες 8)

γ) Αν $A(1,1), B(-1,-1)$, $M'(-x,-y)$ να δείξετε ότι $(AB)\leq(MM')$ για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{0\}$ και να εξετάσετε πότε $(AB)=(MM')$.

(Μονάδες 8)

413 – 14810

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-7x+\kappa, \kappa\in\mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη $y=10$.

α) Να αποδείξετε ότι $\kappa=10$.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση C_f της f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 6)

γ) Έστω $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$, $\alpha<\beta$ δυο σημεία της C_f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$.

i. Να αποδείξετε ότι $\alpha<\frac{2\alpha+3\beta}{5}<\beta$

(Μονάδες 6)

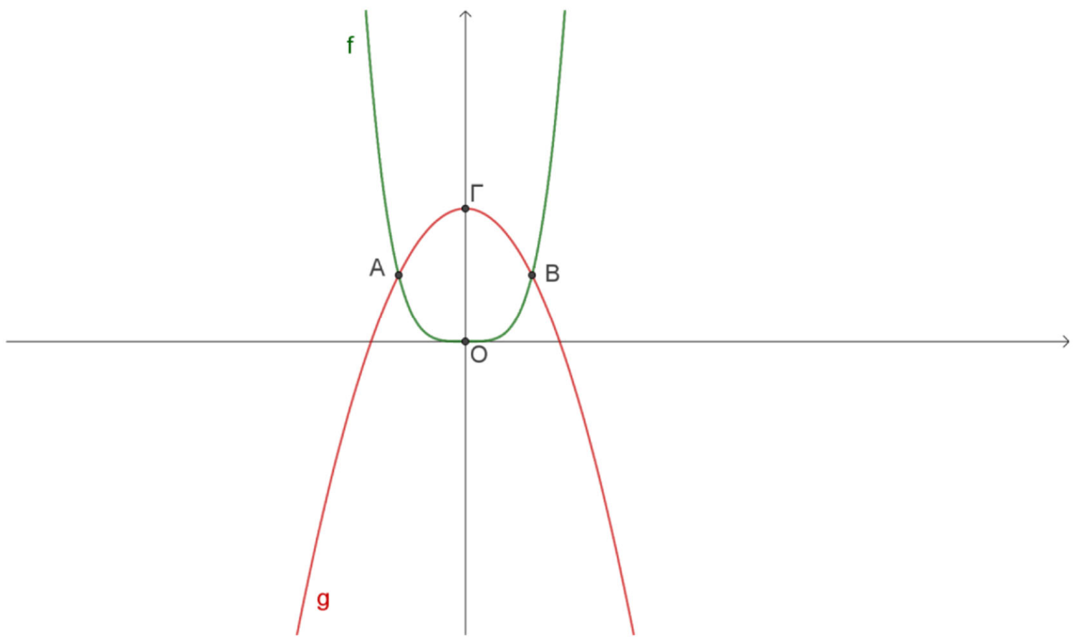
ii. Να εξετάσετε αν το σημείο της C_f με τετμημένη $x_o=\frac{2\alpha+3\beta}{5}$ βρίσκεται πάνω ή κάτω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 8)

414 – 14307

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=x^4$ και $g(x)=2-x^2$. Τα σημεία A,B είναι τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των f,g ενώ Γ είναι το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της g με τον άξονα $y'y$.



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων $Α, Β, Γ$.

(Μονάδες 9)

Αν $Α(-1,1), Β(1,1), Γ(0,2)$

β) Με βάση το παραπάνω σχήμα να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g.

(Μονάδες 6)

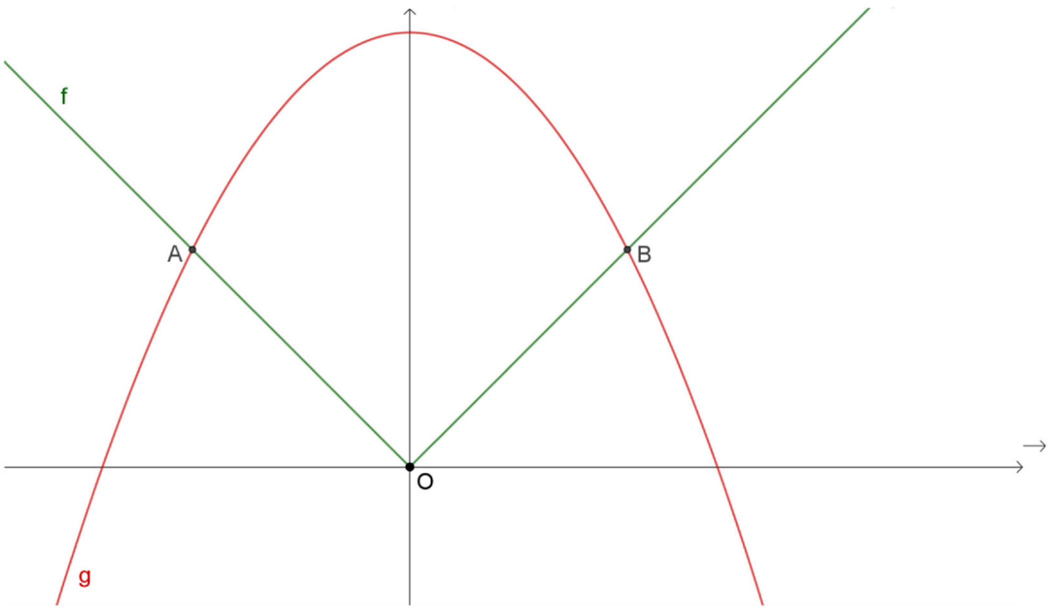
γ) Να επαληθεύσετε αλγεβρικά την απάντηση σας στο ερώτημα β).

(Μονάδες 10)

415 – 14926

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=|x|$ και $g(x)=2-x^2$. Τα $Α, Β$ είναι τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των f, g.



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων $Α$ και $Β$.

(Μονάδες 10)

β) Αν $Α(-1,1)$ και $Β(1,1)$,

i.Με βάση το παραπάνω σχήμα, να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύει ότι : $f(x)<g(x)$.

(Μονάδες 6)

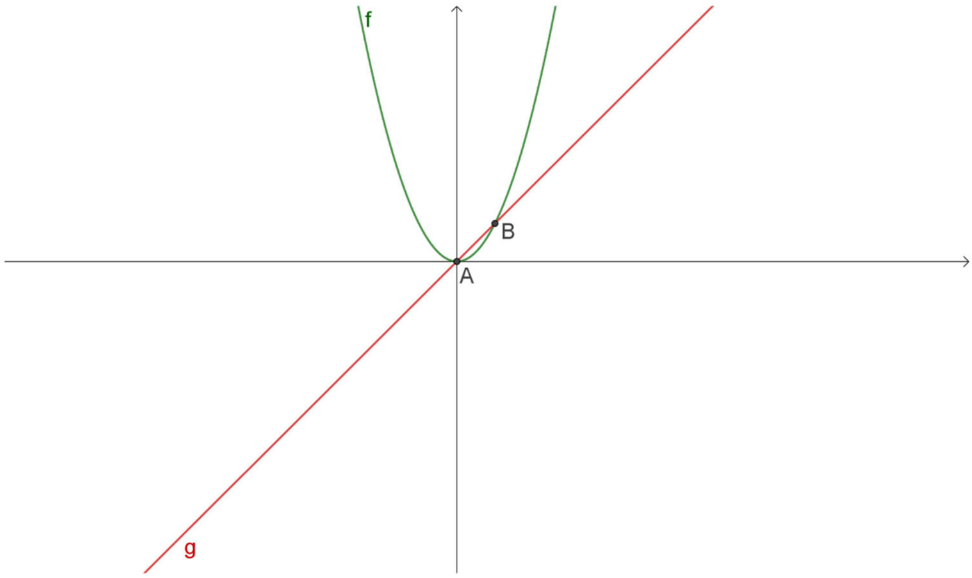
ii. Να λύσετε αλγεβρικά την ανίσωση $f(x)<g(x)$ επαληθεύοντας την απάντηση στο ερώτημα βi).

(Μονάδες 9)

416 – 13557

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=x^2$ και $g(x)=x$ που τέμνονται στα σημεία A,B.



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A,B.

(Μονάδες 7)

β) Αν $\mathrm{A}(0,0),\mathrm{B}(1,1)$, τότε:

i. Με βάση το σχήμα να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της g.

(Μονάδες 5)

ii. Να επαληθεύσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο i. ερώτημα.

(Μονάδες 7)

γ) Αν $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2<\frac{\alpha}{\beta}$ για τυχαίους πραγματικούς αριθμούς α,β με $\beta\neq 0$, να δείξετε (με βάση τα παραπάνω ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο θέλετε) ότι $|\alpha|<|\beta|$.

(Μονάδες 6)

417 – 14760

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση: $g(x)=\left[\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-x-12}}\right]^3\cdot(x^2-16)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g.

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι $g(x)=\frac{x+4}{x+3}$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με τους άξονες.

(Μονάδες 8)

418 – 14225

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{(x-2)(x^2-5x+4)}{x-1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A.

(Μονάδες 5)

β) Να δείξετε ότι $f(x)=x^2-6x+8, x\in A$.

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης f δεν είναι πάνω από την ευθεία $y=3$.

(Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης g με $g(x)=x^4-6x-4$ τέμνει την γραφική παράσταση της f.

(Μονάδες 7)

419 – 14185

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x}{x^3-2x^2+x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι : $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}$, για κάθε $x\in A$.

(Μονάδες 4)

γ) Να λύσετε την εξίσωση: $f(x)=1$.

(Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι πάνω από την ευθεία $y=1$.

(Μονάδες 8)

6.3 Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ f(x) = αx + β

420 – 14575

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\dfrac{x^2-3x}{x-3}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)=x$, για κάθε $x\in A$.

(Μονάδες 8)

γ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

(Μονάδες 9)

421 – 12913

ΘΕΜΑ 2

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο x^2+2x-3.

(Μονάδες 8)

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{x-1}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της παραπάνω συνάρτησης f.

(Μονάδες 5)

ii. Να δείξετε ότι $f(x)=x+3$ για κάθε $x\in \mathrm{A}$.

(Μονάδες 4)

iii. Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f.

(Μονάδες 8)

422 – 14641

ΘΕΜΑ 2

Η παρακάτω ευθεία ε σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45^o.

α) Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας ε.

(Μονάδες 7)

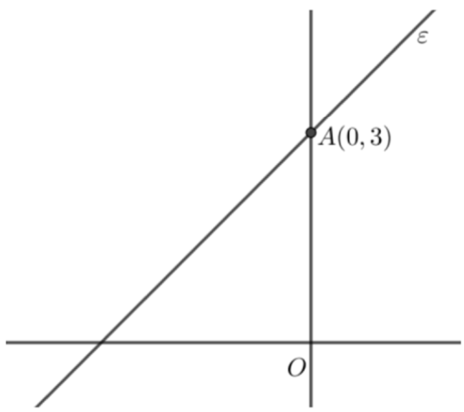
β) Να γράψετε την εξίσωση της ευθείας ε.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα $x'x$.

(Δίνεται ότι $\varepsilon\varphi 45^o = 1$)

(Μονάδες 9)



423 – 13471

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τα σημεία $A(2,1)$, $B(-1,-5)$, $\Gamma(27,50)$ και την ευθεία ε: $y=\lambda x-3$. Αν το σημείο Α είναι πάνω στην ευθεία, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $\lambda=2$.

(Μονάδες 11)

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο Β είναι πάνω στην ευθεία. Κατόπιν να εξετάσετε αν και το σημείο Γ είναι πάνω στην ίδια ευθεία.

(Μονάδες 14)

424 – 13473

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η παράσταση $A=\sqrt{x^2-6x+9}+\sqrt{1-2x+x^2}$.

α) Να απλοποιήσετε την παράσταση Α.

(Μονάδες 6)

Δίνεται επιπλέον $1\leq x\leq 3$.

β) i. Να δείξετε ότι Α=2.

(Μονάδες 4)

ii. Να λύσετε την εξίσωση $|x-3|-|x-1|=2$.

(Μονάδες 5)

γ) i. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=3-x$ και $g(x)=x-1$ για $1\leq x\leq 3$.

(Μονάδες 6)

ii. Για ποιες τιμές του x είναι $|f(x)-g(x)|=2$.

(Μονάδες 4)

425 – 14556

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα έχει σχεδιασθεί σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=f(x)=ax+\beta$, όπου α,β σταθεροί μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί και $x\in R$. Θεωρούμε τα σημεία Α και Β της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)$, των οποίων οι προβολές στους άξονες x΄x, y΄y είναι τα σημεία Η,Δ και Κ,Ε αντίστοιχα. Γνωρίζουμε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα ΗΚ και ΔΕ έχουν μήκη 6 και 9 αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι $a=-\frac{3}{2}$

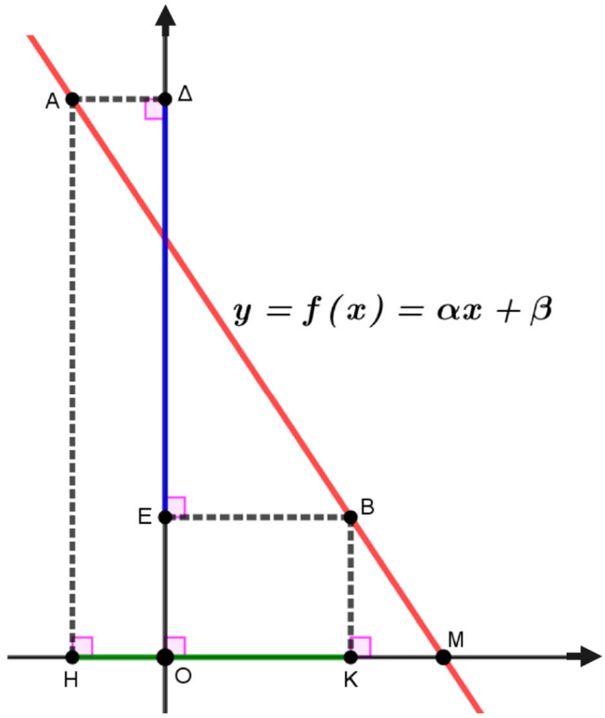
(Μονάδες 9)

β) Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι το σημείο Μ έχει τετμημένη 6, να αποδείξτε ότι $\beta=9$.

(Μονάδες 7)

γ) Υποθέτουμε ότι το ευθύγραμμο τμήμα ΟΚ έχει μήκος 4. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (δ) η οποία διέρχεται από το σημείο Ε και είναι παράλληλη προς την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$.

(Μονάδες 9)



426 – 13507

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = px^2 + (6-p)x + \left(\frac{5}{2}p - 3\right)$, με παράμετρο $p \in \mathbb{R}$.

α) Να γράψετε τον τύπο της συνάρτησης για $p=0$ και $p=2$. Για ποια από αυτές τις τιμές του p η γραφική παράσταση της συνάρτησης είναι ευθεία;

(Μονάδες 4)

β)

i. Για $p=0$ και $p=2$, να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει ένα κοινό σημείο με τον $x'x$ άξονα, το οποίο και να βρείτε.

(Μονάδες 6)

ii. Συμβαίνει το ίδιο (δηλαδή να έχει η γραφική παράσταση της συνάρτησης f ένα κοινό σημείο με τον $x'x$ άξονα) και για άλλες τιμές της παραμέτρου $p \in \mathbb{R}$;

(Μονάδες 6)

γ) Για $p \neq 0$, να βρείτε για ποιες τιμές του p η γραφική παράσταση της συνάρτησης f θα έχει δυο κοινά σημεία με τον $x'x$ άξονα.

(Μονάδες 9)

427 – 14184

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\frac{(x+2)(x+1)^2}{1+(x+2)x}$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 4)

β) Να απλοποιήσετε τον τύπο της και να σχεδιάσετε την γραφική της παράσταση.

(Μονάδες 8)

γ) Αν είναι $f(x)=x+2,\ x\neq -1$, τότε:

i. Να βρείτε τα σημεία στα οποία τέμνει η γραφική παράσταση της f τη γραφική παράσταση της $g(x)=x^2$.

(Μονάδες 7)

ii. Να βρείτε τις τιμές του x, για τις οποίες, η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g.

(Μονάδες 6)

428 – 14640

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=x^2-2x$ και η ευθεία $\varepsilon: y=\lambda^2-1$ με $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f και η ευθεία ε έχουν κοινά σημεία για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 6)

β) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f και η ευθεία ε έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο A, τότε:

i. να βρείτε την τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$,

ii. να δείξετε ότι το κοινό σημείο είναι το $A(1,-1)$.

(Μονάδες 7)

γ) Αν $\lambda\neq 0$, να δείξετε ότι τα σημεία τομής της ευθείας ε και της γραφικής παράστασης της f είναι τα $B(1-|\lambda|,\lambda^2-1)$ και $\Gamma(1+|\lambda|,\lambda^2-1)$.

(Μονάδες 7)

δ) Να δείξετε ότι οι τετμημένες των σημείων B, A και Γ είναι όροι αριθμητικής προόδου για κάθε τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 5)

429 – 14320

ΘΕΜΑ 4

Σε κάποιο τόπο, μια χειμερινή μέρα, ξεκινάμε να μετράμε τη θερμοκρασία από τις 6 το πρωί και μετά. Ο τύπος που δίνει τη θερμοκρασία, x ώρες μετά τις 6 το πρωί, είναι:

$$f(x)=\begin{cases}2x+4, & x\in[0,6]\\ 16, & x\in(6,9]\\ 25-x, & x\in(9,12]\end{cases}$$

και μετριέται σε βαθμούς Κελσίου.

α) Να βρείτε τη θερμοκρασία στον τόπο αυτό, στις 6 το πρωί, στις 12 το μεσημέρι και στις 5 το απόγευμα.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε σε ποιο χρονικό διάστημα της ημέρας η θερμοκρασία:

i. Διατηρείται σταθερή.

ii. Είναι μεγαλύτερη από 14 βαθμούς Κελσίου.

(Μονάδες 4+7=11)

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

(Μονάδες 8)