Αναστάσιος Χ. Μπάρλας

# Γεωμετρία

## Α΄ Λυκείου

**Τράπεζα Θεμάτων 2021**

**με λύσεις**

ΕΚΔΟΣΗ Μπάρλας

## ΘΕΜΑΤΑ ΤΡΑΠΕΖΑΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

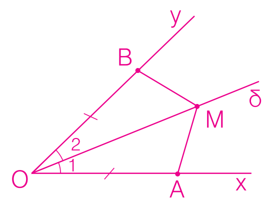
### 6. Στοιχεία και είδη τριγώνων – Κριτήρια ισότητας τριγώνων

### 1 Θέμα 2 - 1627

**Δίνεται γωνία $x\hat{O}y$ και η διχοτόμος της $O\delta$. Θεωρούμε σημείο $M$ της $O\delta$ και σημεία $A$ και $B$ στις ημιευθείες $Ox$ και $Oy$ αντίστοιχα, τέτοια ώστε $OA = OB$. Να αποδείξετε ότι:**

**α. $MA = MB$** **β. Η ημιευθεία $O\delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{M}B$.**

**Λύση**

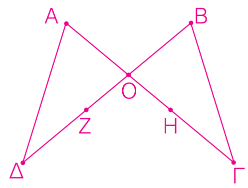



**α.** Τα τρίγωνα $OMA$, $OMB$ έχουν:
- $OA = OB$
- $OM$ κοινή
- $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ). Άρα $MA = MB$.

**β.** Επειδή τα τρίγωνα $OMA$, $OMB$ είναι ίσα, προκύπτει $O\hat{M}A = O\hat{M}B$. Οπότε η $O\delta$ είναι η διχοτόμος της $A\hat{M}B$.

### 2 Θέμα 2 - 1674




**Δίνονται τα τμήματα $A\Gamma = B\Delta$ που τέμνονται στο σημείο $O$ έτσι ώστε $OA = OB$, και τα σημεία $H$ και $Z$ στα τμήματα $A\Gamma$ και $B\Delta$ αντίστοιχα, έτσι ώστε $OH = OZ$. Να αποδείξετε ότι:**

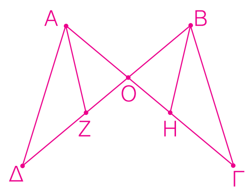
**α. Οι γωνίες $A\hat{\Delta}O$ και $B\hat{\Gamma}O$ είναι ίσες**

**β. $AZ = BH$**

**Λύση**

**α.** Είναι $O\Gamma = A\Gamma - OA = B\Delta - OB = O\Delta$.

Τα τρίγωνα $OA\Delta$, $OB\Gamma$ έχουν:
- $OA = OB$
- $O\Delta = O\Gamma$
- $A\hat{O}\Delta = B\hat{O}\Gamma$

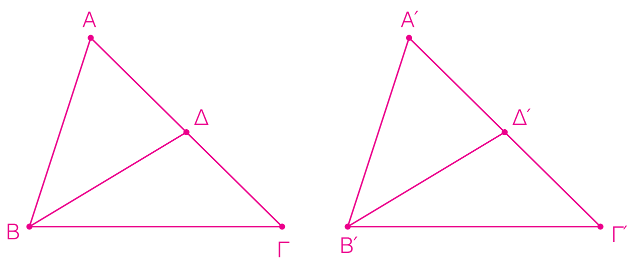



Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ). Άρα $A\hat{\Delta}O = B\hat{\Gamma}O$.

**β.** Τα τρίγωνα $OAZ$, $OBH$, έχουν:
- $OA = OB$
- $OZ = OH$
- $A\hat{O}Z = B\hat{O}H$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ). Άρα $AZ = BH$.

### 3 Θέμα 2 - 13518



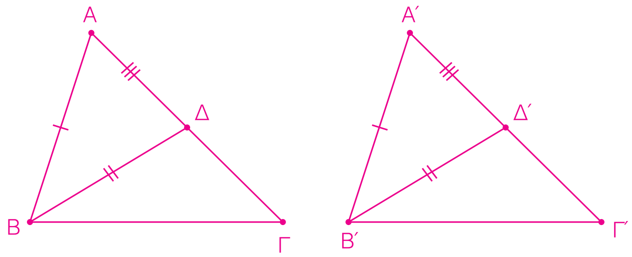

**Δίνονται τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ του σχήματος με $A\Gamma = A'\Gamma'$ και $AB = A'B'$. Αν οι διάμεσοι $B\Delta$ και $B'\Delta'$ είναι ίσες, να αποδείξετε ότι:**

**α. $\hat{A} = \hat{A}'$**

**β. Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα.**

**Λύση**

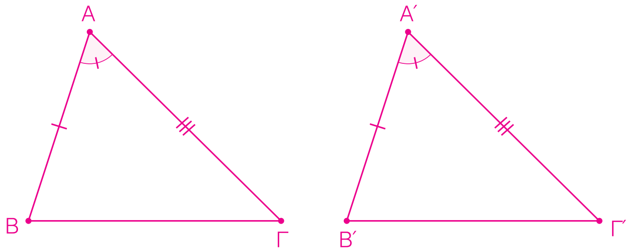
**α.** Τα τρίγωνα ΑΒΔ και Α΄Β΄Δ΄ έχουν:




- ΒΔ = Β΄Δ΄
- ΑΒ = Α΄Β΄
- ΑΔ = Α΄Δ΄ , ως μισά των ίσων πλευρών ΑΓ και Α΄Γ αντίστοιχα.

Επομένως, είναι ίσα, (ΠΠΠ), άρα $\hat{A} = \hat{A}'$.

**β.** Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έχουν:




- ΑΒ = Α΄Β΄
- ΑΓ = Α΄Γ΄
- $\hat{A} = \hat{A}'$

Επομένως, είναι ίσα επειδή έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες (ΠΓΠ).

## 4 Θέμα 2 - 1598

**Στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΑ και ΓΑ τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε τα τμήματα ΑΔ = ΑΒ και ΑΕ = ΑΓ .**

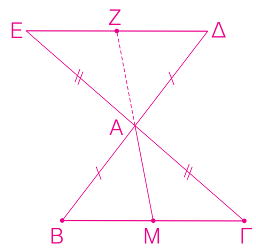
**α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι ίσα.**

**β. Αν ΑΜ είναι η διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ και η προέκταση της ΑΜ τέμνει την ΕΔ στο Ζ, να δείξετε ότι:**

**i. Τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΑΒΜ είναι ίσα.** **ii.** $\mathbf{Z\Delta = \dfrac{E\Delta}{2}}$

**Λύση**

**α.** Τα τρίγωνα ΑΒΓ , ΑΔΕ έχουν:




- ΑΒ = ΑΔ
- ΑΓ = ΑΕ
- $B\hat{A}\Gamma = \Delta\hat{A}E$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ).

**β. i.** Τα τρίγωνα ΑΔΖ , ΑΒΜ , έχουν:

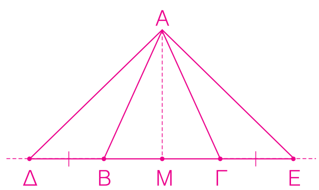
- ΑΔ = ΑΒ
- $\hat{\Delta} = \hat{B}$
- $\Delta\hat{A}Z = B\hat{A}M$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ).

**ii.** Επειδή τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΑΔΖ είναι ίσα έχουμε $Z\Delta = BM = \dfrac{B\Gamma}{2} = \dfrac{E\Delta}{2}$ .

## 5 Θέμα 2 - 1592

**Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) . Στην προέκταση της πλευράς ΒΓ και προς τα δύο της άκρα, θεωρούμε σημεία Δ και Ε αντίστοιχα έτσι ώστε ΒΔ = ΓΕ . Να αποδείξετε ότι:**




**α.** $\mathbf{\widehat{B}_{\varepsilon\xi} = \widehat{\Gamma}_{\varepsilon\xi}}$

**β. Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα.**

**γ. Η διάμεσος ΑΜ του τριγώνου ΑΒΓ είναι και διάμεσος του τριγώνου ΑΔΕ .**

**Λύση**

**α.** Επειδή το τρίγωνο $ΑΒΓ$, είναι ισοσκελές $(ΑΒ = ΑΓ)$, προκύπτει ότι $\hat{Β} = \hat{Γ}$,
οπότε και $\hat{Β}_{εξ} = \hat{Γ}_{εξ}$, ως παραπληρωματικές ίσων γωνιών.

**β.** Τα τρίγωνα $ΑΒΔ$, $ΑΓΕ$, έχουν:

- $ΑΒ = ΑΓ$
- $ΒΔ = ΓΕ$
- $\hat{Β}_{εξ} = \hat{Γ}_{εξ}$.

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ).

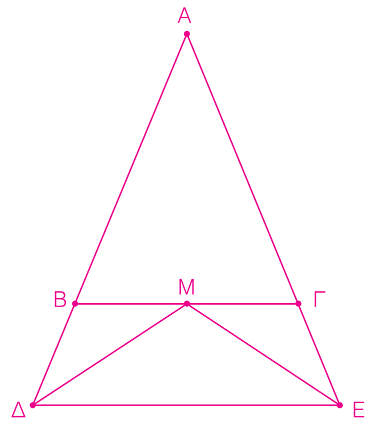
**γ.** Είναι $ΒΜ = ΜΓ$ και $ΒΔ = ΓΕ$ οπότε $ΒΜ + ΒΔ = ΜΓ + ΓΕ \Rightarrow ΜΔ = ΜΕ$.
Άρα $ΑΜ$ διάμεσος του τριγώνου $ΑΔΕ$.

## 6 Θέμα 2 - 12635

**Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και Μ είναι το μέσο της βάσης του ΒΓ. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ, ΑΓ προς τα Β,Γ αντίστοιχα, παίρνουμε τα τμήματα ΒΔ και ΓΕ ώστε ΒΔ = ΓΕ.**

**α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΜΒΔ και ΜΓΕ είναι ίσα.**

**β. Να αποδείξετε ότι η γωνία ΜΔΕ είναι ίση με τη γωνία ΜΕΔ.**




**Λύση**

**α.** Τα τρίγωνα $ΜΒΔ$ και $ΜΓΕ$ έχουν:

- $ΜΒ = ΜΓ$, αφού το Μ είναι μέσο της ΒΓ
- $ΒΔ = ΓΕ$, από την υπόθεση
- $Μ\hat{Β}Δ = Μ\hat{Γ}Ε$, ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιων $\hat{Β}$ και $\hat{Γ}$

Άρα τα τρίγωνα ΜΒΔ και ΜΓΕ είναι ίσα (ΠΓΠ).

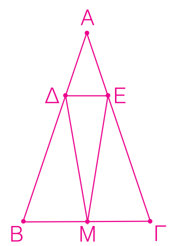
**β.** Επειδή τα τρίγωνα $ΜΒΔ$ και $ΜΓΕ$ είναι ίσα, έχουμε: $ΜΔ = ΜΕ$.

Επομένως το τρίγωνο ΜΔΕ είναι ισοσκελές, οπότε $Μ\hat{Δ}Ε = Μ\hat{Ε}Δ$.

## 7 Θέμα 2 - 1621

**Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ $(ΑΒ = ΑΓ)$ και στις ίσες πλευρές $ΑΒ$, $ΑΓ$ παίρνουμε αντίστοιχα τμήματα $ΑΔ = \frac{1}{3}ΑΒ$ και $ΑΕ = \frac{1}{3}ΑΓ$. Αν $Μ$ είναι μέσο της $ΒΓ$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $ΔΕΜ$ είναι ισοσκελές.**

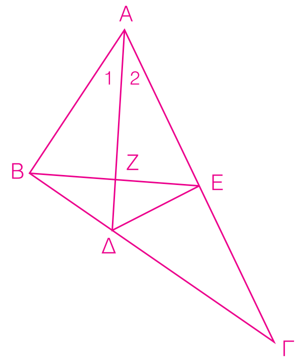
**Λύση**




- Είναι $ΒΔ = \frac{2}{3}ΑΒ = \frac{2}{3}ΑΓ = ΓΕ$.
- Τα τρίγωνα $ΒΔΜ$, $ΜΕΓ$ έχουν:
  - $ΜΒ = ΜΓ$
  - $ΒΔ = ΓΕ$
  - $\hat{Β} = \hat{Γ}$.

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ). Άρα $ΜΔ = ΜΕ$, οπότε το τρίγωνο $ΔΕΜ$ είναι ισοσκελές.

## 8 Θέμα 2 - 12705




**Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ τέτοιο, ώστε $ΑΓ = 2ΑΒ$. Η διχοτόμος του ΑΔ τέμνει την διάμεσο ΒΕ στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι:**

**α.** $ΑΒ = ΑΕ = \frac{ΑΓ}{2}$.

**β.** $ΔΒ = ΔΕ$.

**γ.** $ΑΖ \perp ΒΕ$.

**Λύση**

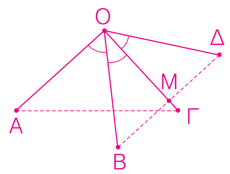
**α.** Η ΒΕ είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ, επομένως, $ΑΕ = \frac{ΑΓ}{2}$. Όμως $ΑΒ = \frac{ΑΓ}{2}$, οπότε $ΑΒ = ΑΕ = \frac{ΑΓ}{2}$.

**β.** Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΕΔ έχουν:
- $ΑΒ = ΑΕ$
- ΑΔ κοινή πλευρά
- $\hat{Α}_1 = \hat{Α}_2$, αφού η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Α.

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ), οπότε $ΔΒ = ΔΕ$.

**γ.** Το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές με $ΑΒ = ΑΕ$ και η ΑΖ είναι διχοτόμος του.
Επομένως, η ΑΖ είναι και ύψος, άρα, $ΑΖ \perp ΒΕ$.

## 9 Θέμα 2 - 1632




**Αν $Α\hat{Ο}Β = Β\hat{Ο}Γ = Γ\hat{Ο}Δ$ και $ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ = ΟΔ$, να αποδείξετε ότι:**

**α.** $ΑΓ = ΒΔ$

**β.** το Μ είναι μέσο της ΒΔ, όπου Μ το σημείο τομής των τμημάτων ΟΓ και ΒΔ.

**Λύση**

**α.** Τα τρίγωνα ΟΑΓ και ΟΒΔ έχουν:
- $ΟΑ = ΟΒ$
- $ΟΓ = ΟΔ$
- $Α\hat{Ο}Γ = Β\hat{Ο}Δ$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ). Άρα $ΑΓ = ΒΔ$.

**β.** Επειδή το τρίγωνο ΒΟΔ είναι ισοσκελές και η ΟΜ είναι διχοτόμος, θα είναι και διάμεσος. Άρα το Μ είναι το μέσο της ΒΔ.

## 10 Θέμα 2 - 1601

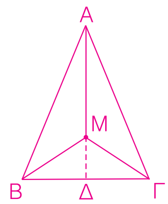
**Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($ΑΒ = ΑΓ$) και σημείο Μ εσωτερικό του τριγώνου, τέτοιο ώστε $ΜΒ = ΜΓ$.**

**Να αποδείξετε ότι:**

**α.** **Τα τρίγωνα ΑΜΒ και ΑΜΓ είναι ίσα.**

**β.** **Η ευθεία ΑΜ διχοτομεί τη γωνία $Β\widehat{Μ}Γ$.**

**Λύση**



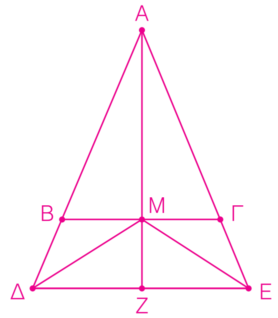

**α.** Τα τρίγωνα ΑΜΒ, ΑΜΓ έχουν:
- $ΑΒ = ΑΓ$
- $ΜΒ = ΜΓ$
- ΑΜ κοινή

Οπότε είναι ίσα (ΠΠΠ).

**β.** Έστω ότι η ΑΜ τέμνει την ΒΓ στο Δ. Επειδή τα τρίγωνα ΑΜΒ, ΑΜΓ είναι ίσα, προκύπτει ότι $Β\widehat{Μ}Α = Γ\widehat{Μ}Α$.

Οπότε και $Β\widehat{Μ}Δ = Γ\widehat{Μ}Δ$, άρα η ευθεία ΑΜ διχοτομεί τη $Β\widehat{Μ}Γ$.

## 11 Θέμα 2 - 12636




**Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και Μ είναι το μέσο της βάσης ΒΓ. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ, ΑΓ παίρνουμε τα τμήματα ΒΔ, ΓΕ αντίστοιχα ώστε ΒΔ = ΓΕ.**

**α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΜΒΔ και ΜΓΕ είναι ίσα.**

**β. Να αποδείξετε ότι η γωνία ΜΔΕ είναι ίση με τη γωνία ΜΕΔ.**

**γ. Αν η ΑΜ τέμνει την ΔΕ στο σημείο Ζ να αποδείξετε ότι η ΑΖ είναι κάθετη στην ΔΕ.**

**Λύση**

**α.** Τα τρίγωνα ΜΒΔ και ΜΓΕ έχουν:

- $ΜΒ = ΜΓ$ , αφού το Μ είναι μέσο της ΒΓ
- $ΒΔ = ΓΕ$ , από υπόθεση
- $Μ\hat{Β}Δ = Μ\hat{Γ}Ε$, ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $\hat{Β}$ και $\hat{Γ}$

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα (ΠΓΠ).

**β.** Επειδή τα τρίγωνα ΜΒΔ και ΜΓΕ είναι ίσα, έχουμε $ΜΔ = ΜΕ$.

Επομένως το τρίγωνο ΜΔΕ είναι ισοσκελές, οπότε $Μ\hat{Δ}Ε = Μ\hat{Ε}Δ$.

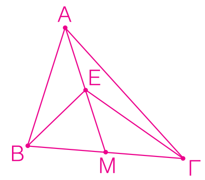
**γ.** Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ η ΑΜ είναι διάμεσος άρα και διχοτόμος.

Είναι $ΑΔ = ΑΒ + ΒΔ$ και $ΑΕ = ΑΓ + ΓΕ$ , οπότε $ΑΔ = ΑΕ$ ως άθροισμα ίσων τμημάτων.

Επομένως, στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΔΕ, η ΑΖ ως διχοτόμος θα είναι και ύψος.

Άρα η ΑΖ είναι κάθετη στην ΔΕ.

## 12 Θέμα 2 - 1660




**Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Ε το μέσο της διαμέσου του ΑΜ.**
**Αν $ΒΓ = 2ΒΕ$ να αποδείξετε ότι:**

**α. $Α\hat{Ε}Β = Ε\widehat{Μ}Γ$** **β. $ΑΒ = ΕΓ$**

**Λύση**

**α.** Επειδή το Μ είναι το μέσο της ΒΓ και $ΒΓ = 2ΒΕ \Leftrightarrow ΒΕ = \frac{ΒΓ}{2} \Leftrightarrow ΒΕ = ΒΜ$ , έχουμε $Β\hat{Ε}Μ = Β\widehat{Μ}Ε$.

Επομένως $Α\hat{Ε}Β = Ε\widehat{Μ}Γ$ ως παραπληρωματικές ίσων γωνιών.

**β.** Τα τρίγωνα ΑΒΕ , ΕΓΜ έχουν:

- $ΜΕ = ΑΕ$
- $ΕΒ = ΜΓ$
- $Α\hat{Ε}Β = Ε\widehat{Μ}Γ$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ). Άρα $ΑΒ = ΕΓ$ .

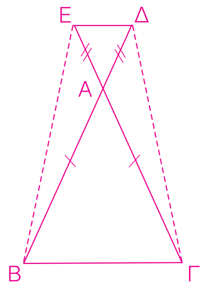
## 13 Θέμα 2 - 1648

**Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$ . Στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΑ και ΓΑ (προς το Α ) θεωρούμε τα σημεία Ε και Δ αντίστοιχα τέτοια ώστε $ΑΔ = ΑΕ$ . Να αποδείξετε ότι:**

**α. $ΒΕ = ΓΔ$** **β. $ΒΔ = ΓΕ$** **γ. $Δ\hat{Β}Γ = Ε\hat{Γ}Β$**

**Λύση**

**α.** Είναι $ΒΕ = ΑΒ + ΑΕ = ΑΓ + ΑΔ = ΓΔ$ .




**β.** Τα τρίγωνα $ΒΑΔ$ και $ΓΑΕ$ έχουν:

- $ΑΒ = ΑΓ$
- $ΑΔ = ΑΕ$
- $Δ\widehat{Α}Β = Ε\widehat{Α}Γ$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ). Άρα $ΒΔ = ΓΕ$ .

**γ.** Επειδή το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελές, έχουμε $\widehat{Β} = \widehat{Γ}$ .
Επειδή τα τρίγωνα $ΒΑΔ$, $ΓΑΕ$ είναι ίσα, έχουμε $Δ\widehat{Β}Α = Ε\widehat{Γ}Α$ .
Επομένως $Δ\widehat{Β}Γ = Ε\widehat{Γ}Β$ , ως αθροίσματα ίσων γωνιών.

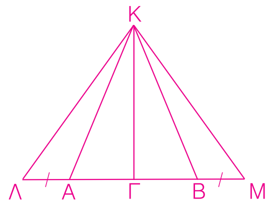
## 14 Θέμα 2 - 1622

**Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ΚΑΒ$ ($ΚΑ = ΚΒ$) και $ΚΓ$ διχοτόμος της γωνίας $\widehat{Κ}$ . Στην προέκταση της $ΒΑ$ (προς το $Α$ ) παίρνουμε σημείο $Λ$ και στην προέκταση της $ΑΒ$ (προς το $Β$ ) παίρνουμε σημείο $Μ$ , έτσι ώστε $ΑΛ = ΒΜ$ . Να αποδείξετε ότι:**

**α.** **το τρίγωνο $ΚΛΜ$ είναι ισοσκελές**

**β.** **η $ΚΓ$ είναι διάμεσος του τριγώνου $ΚΛΜ$.**

**Λύση**




**α.** Τα τρίγωνα $ΚΑΛ$ , $ΚΒΜ$ έχουν:

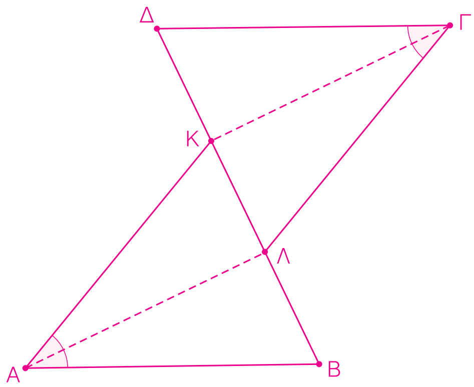
- $ΚΑ = ΚΒ$
- $ΑΛ = ΒΜ$
- $Κ\widehat{Α}Λ = Κ\widehat{Β}Μ$ , ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $\widehat{Α}$ και $\widehat{Β}$ του ισοσκελούς τριγώνου $ΚΑΒ$ . Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ), οπότε $ΚΛ = ΚΜ$ .

Επομένως το τρίγωνο $ΚΛΜ$ είναι ισοσκελές.

**β.** Επειδή το τρίγωνο $ΚΑΒ$ είναι ισοσκελές η διχοτόμος του $ΚΓ$ είναι και διάμεσος, οπότε $ΓΑ = ΓΒ$ .

Οπότε $ΛΓ = ΛΑ + ΑΓ = ΒΜ + ΓΒ = ΜΓ$ . Άρα η $ΚΓ$ είναι διάμεσος του τριγώνου $ΚΛΜ$ .

## 15 Θέμα 2 - 13826



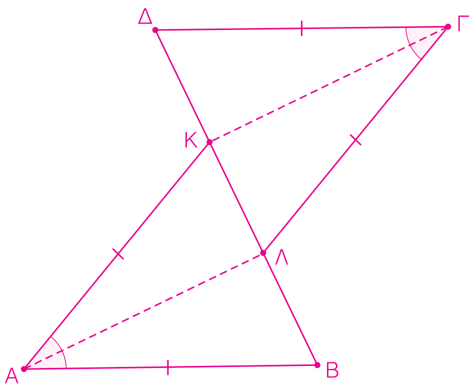

**Τα τρίγωνα ΑΒΚ και ΓΔΛ του σχήματος έχουν $ΑΒ = ΓΔ = ΑΚ = ΓΛ$ και $\hat{Α} = \hat{Γ}$ .**

**α.** **Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΚ και ΓΔΛ είναι ίσα και ότι έχουν $ΒΚ = ΔΛ$ .**

**β.** **Έστω ότι Λ και Κ είναι τα μέσα των ΒΚ και ΔΛ αντίστοιχα:**

- **i.** **Να εξετάσετε αν τα τμήματα ΒΛ, ΛΚ και ΚΔ είναι ίσα. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.**
- **ii.** **Να αποδείξετε ότι οι ΑΛ και ΓΚ είναι κάθετες στην ευθεία ΚΛ.**

**Λύση**




**α.** Τα τρίγωνα $ΑΒΚ$ και $ΓΔΛ$ έχουν:

- $ΑΒ = ΑΚ$
- $ΓΔ = ΓΛ$
- $\hat{Α} = \hat{Γ}$

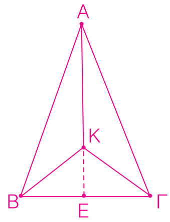
Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ), οπότε $ΒΚ = ΔΛ$ .

**β. i.** Αφού $Λ$ και $Κ$ είναι μέσα των $ΒΚ$ και $ΓΔ$ αντίστοιχα, τότε θα ισχύει ότι $ΒΛ = ΛΚ$ και $ΛΚ = ΚΔ$ , οπότε θα είναι $ΒΛ = ΛΚ = ΚΔ$ .

**ii.** Τα τρίγωνα $ΑΒΚ$ και $ΓΔΛ$ είναι ισοσκελή και τα $ΑΛ$ και $ΓΚ$ είναι διάμεσοι στις βάσεις τους, οπότε θα είναι και ύψη, άρα θα είναι κάθετα σε αυτές, δηλαδή $ΑΛ \perp ΒΚ$ και $ΓΚ \perp ΔΛ$ .

Οπότε οι ΑΛ και ΓΚ είναι κάθετες στην ευθεία ΚΛ.

## 16 Θέμα 2 - 1591




**Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και Κ εσωτερικό σημείο του τριγώνου τέτοιο ώστε ΚΒ = ΚΓ.**

**α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΒΑΚ και ΚΑΓ είναι ίσα.**

**β. Να αποδείξετε ότι η ΑΚ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{BAΓ}$.**

**γ. Η προέκταση της ΑΚ τέμνει την ΒΓ στο Ε. Να δείξετε ότι η ΚΕ είναι διάμεσος του τριγώνου ΒΚΓ.**

**Λύση**

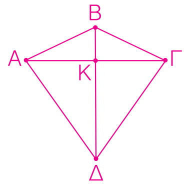
**α.** Τα τρίγωνα ΒΑΚ, ΚΑΓ, έχουν:
- ΑΒ = ΑΓ
- ΚΒ = ΚΓ
- ΑΚ κοινή

Άρα είναι ίσα (ΠΠΠ).

**β.** Επειδή τα τρίγωνα ΒΑΚ, ΚΑΓ είναι ίσα, έχουμε $B\widehat{A}K = K\widehat{A}Γ$.
Οπότε η ΑΚ είναι διχοτόμος της $B\widehat{A}Γ$.

**γ.** Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, η διχοτόμος του ΑΚ θα είναι και διάμεσος.
Άρα το Ε είναι το μέσο του ΒΓ, οπότε η ΚΕ είναι διάμεσος του τριγώνου ΒΚΓ.

## 17 Θέμα 2 - 1624




**Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με ΒΑ = ΒΓ και ΔΑ = ΔΓ. Οι διαγώνιοι ΑΓ, ΒΔ του τετράπλευρου είναι ίσες και τέμνονται κάθετα. Να αποδείξετε ότι:**

**α. Η ΒΔ είναι διχοτόμος των γωνιών $\widehat{B}$ και $\widehat{Δ}$ του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.**

**β. Η ΒΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΑΓ.**

**Λύση**

**α.** Είναι ΒΑ = ΒΓ και ΔΑ = ΔΓ, οπότε τα τρίγωνα ΒΑΓ και ΔΑΓ είναι ισοσκελή.

Τα ΒΚ, ΔΚ είναι ύψη στα ισοσκελή τρίγωνα, οπότε θα είναι και διχοτόμοι.

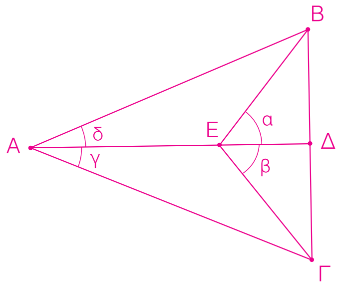
Επομένως η ΒΔ είναι διχοτόμος των γωνιών $\widehat{B}$ και $\widehat{Δ}$.

**β.** Είναι ΒΑ = ΒΓ και ΔΑ = ΔΓ, οπότε τα σημεία Β και Δ ισαπέχουν από τα Α και Γ.

Άρα τα Β και Δ ανήκουν στη μεσοκάθετο του ΑΓ.

Οπότε η ευθεία ΒΔ είναι η μεσοκάθετος του ΑΓ.

## 18 Θέμα 2 - 1587




**Αν για το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) του σχήματος ισχύουν $\hat{α} = \hat{β}$ και $\hat{γ} = \hat{δ}$, να γράψετε μια απόδειξη για καθέναν από τους ακόλουθους ισχυρισμούς:**

**α. Τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΕΓ είναι ίσα.**

**β. Το τρίγωνο ΓΕΒ είναι ισοσκελές.**

**γ. Η ευθεία ΑΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΒΓ.**

**Λύση**

**α.** Τα τρίγωνα ΑΕΒ, ΑΕΓ έχουν:
- ΑΒ = ΑΓ
- ΑΕ κοινή
- $\hat{δ} = \hat{γ}$

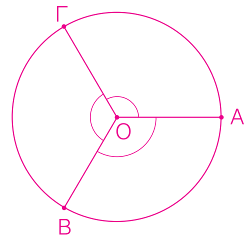
Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ).

**β.** Επειδή τα τρίγωνα ΑΕΒ, ΑΕΓ είναι ίσα, έχουμε ΕΒ = ΕΓ. Άρα το τρίγωνο ΓΕΒ είναι ισοσκελές.

**γ.** Επειδή ΑΒ = ΑΓ και ΕΒ = ΕΓ, η ευθεία ΑΔ είναι η μεσοκάθετος του τμήματος ΒΓ.

## 19 Θέμα 2 - 1588

**Σε κύκλο κέντρου $O$ θεωρούμε τρεις διαδοχικές ίσες γωνίες $A\widehat{O}B$ , $B\widehat{O}\Gamma$ και $\Gamma\widehat{O}A$ .**

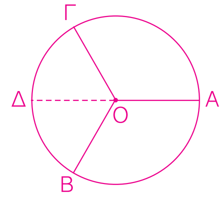



**α.** **Να αποδείξετε ότι η προέκταση της ακτίνας $AO$ διχοτομεί τη γωνία $B\widehat{O}\Gamma$ .**

**β.** **Να βρείτε το είδος του τριγώνου $AB\Gamma$ ως προς τις πλευρές του.**

**γ.** **Αν με κέντρο $O$ και ακτίνα $OK$ , όπου $K$ το μέσο της ακτίνας $OA$ , γράψουμε έναν άλλο κύκλο που θα τέμνει τις ακτίνες $OB$ και $O\Gamma$ στα σημεία $\Lambda$ και $M$ αντίστοιχα, τότε τα τόξα $KM$ και $AB$ είναι ίσα;**
**Δικαιολογήστε την απάντησή σας.**

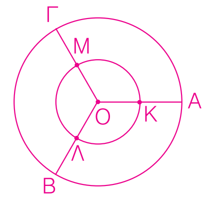
**Λύση**




**α.** Έστω $\Delta$ το σημείο που η προέκταση της $AO$ τέμνει τον κύκλο.

Είναι $\Gamma\hat{O}\Delta = 180^{o} - A\hat{O}\Gamma = 180^{o} - A\hat{O}B = B\hat{O}\Delta$ .

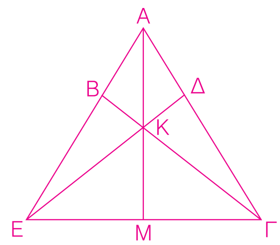
Οπότε η $OA$ διχοτομεί τη γωνία $B\hat{O}\Gamma$ .




**β.** Επειδή $A\hat{O}B = B\hat{O}\Gamma = \Gamma\hat{O}A$ , έχουμε $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{B\Gamma} = \overset{\frown}{\Gamma A}$ , οπότε $AB = B\Gamma = \Gamma A$ .
Άρα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο.

**γ.** Τα τόξα $\overset{\frown}{KM}$ και $\overset{\frown}{AB}$ έχουν το ίδιο μέτρο, αλλά δεν είναι τόξα του ίδιου κύκλου ή ίσων κύκλων. Οπότε δεν είναι ίσα.

## 20 Θέμα 4 - 1846




**Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ .**
**Στην προέκταση της $AB$ (προς το $B$) θεωρούμε σημείο $E$ έτσι ώστε $AE = A\Gamma$ .**
**Στην πλευρά $A\Gamma$ θεωρούμε σημείο $\Delta$ έτσι ώστε $A\Delta = AB$ . Αν τα τμήματα $\Delta E$ και $B\Gamma$ τέμνονται στο $K$ και η προέκταση της $AK$ τέμνει την $E\Gamma$ στο $M$, να αποδείξετε ότι:**

**α.** **$B\Gamma = \Delta E$**

**β.** **$BK = K\Delta$**

**γ.** **Η $AK$ είναι διχοτόμος της γωνίας $A$ .**

**δ.** **Η $AM$ είναι μεσοκάθετος της $E\Gamma$ .**

**Λύση**

**α.** Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ , $A\Delta E$ έχουν:
- $A\Gamma = AE$
- $AB = A\Delta$
- $\widehat{A}$ κοινή

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ). Άρα $B\Gamma = \Delta E$ .

**β.** Επειδή τα τρίγωνα $AB\Gamma$ , $A\Delta E$ είναι ίσα, έχουμε:
- $B\hat{E}K = \Delta\hat{\Gamma}K$
- $A\hat{B}K = A\hat{\Delta}K$

Οπότε $E\hat{B}K = \Gamma\hat{\Delta}K$ ως παραπληρωματικές ίσων γωνιών.
Τα τρίγωνα $BEK$ και $\Delta\Gamma K$ έχουν:
- $BE = \Delta\Gamma$ ως διαφορές ίσων τμημάτων
- $B\hat{E}K = \Delta\hat{\Gamma}K$
- $E\hat{B}K = \Gamma\hat{\Delta}K$

Οπότε είναι ίσα (ΓΠΓ). Άρα $BK = K\Delta$ .

**γ.** Τα τρίγωνα $ΑΒΚ$, $ΑΔΚ$ έχουν:

- $ΑΒ = ΑΔ$
- $ΒΚ = ΚΔ$
- $ΑΚ$ κοινή

Οπότε είναι ίσα (ΠΠΠ). Άρα $Β\widehat{Α}Κ = Δ\widehat{Α}Κ$.

Επομένως η $ΑΚ$ είναι διχοτόμος της $\widehat{Α}$.

**δ.** Στο ισοσκελές τρίγωνο $ΑΕΓ$ η $ΑΜ$ είναι διχοτόμος, οπότε είναι διάμεσος και ύψος.
Άρα η $ΑΜ$ είμαι μεσοκάθετος της $ΕΓ$.

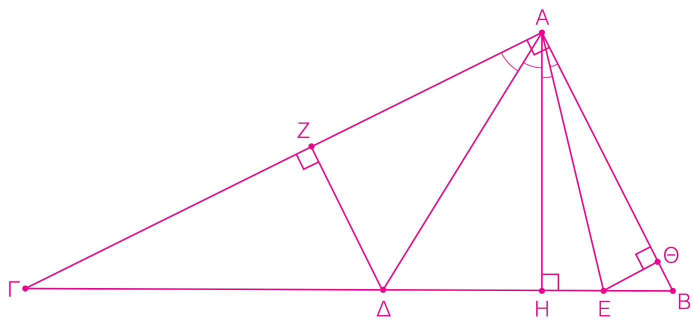
## 21 Θέμα 4 - 13499

**Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ(\hat{Α} = 90^o)$ με $ΑΒ < ΑΓ$ και ΑΗ το ύψος προς την υποτείνουσα. Στην πλευρά ΒΓ θεωρούμε τα σημεία Δ και Ε τέτοια ώστε $ΔΒ = ΑΒ$ και $ΓΕ = ΓΑ$. Αν ΔΖ και ΕΘ είναι οι αποστάσεις των Δ και Ε από τις πλευρές ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:**

**α.** $Γ\hat{Α}Δ = Δ\hat{Α}Η$ **και** $Ε\hat{Α}Β = Η\hat{Α}Ε$

**β.** $ΔΕ = ΔΖ + ΕΘ$.

**Λύση**




**α.** • Είναι: $Γ\hat{Α}Δ = Γ\hat{Α}Β - Δ\hat{Α}Β = 90^o - Δ\hat{Α}Β$, (1).

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΔΗ$ είναι

$Δ\hat{Α}Η = 90^o - Α\hat{Δ}Η$, (2).

Αφού $ΒΔ = ΒΑ$, το τρίγωνο $ΒΔΑ$ θα είναι ισοσκελές οπότε $Δ\hat{Α}Β = Α\hat{Δ}Η$, (3).

Από τις σχέσεις (1), (2) και (3) έχουμε

$Γ\hat{Α}Δ = Δ\hat{Α}Η$, (4).

• Είναι: $Ε\hat{Α}Β = Γ\hat{Α}Β - Γ\hat{Α}Ε = 90^o - Γ\hat{Α}Ε$, (5).

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΕΗ$ είναι $Η\hat{Α}Ε = 90^o - Α\hat{Ε}Η$, (6).

Αφού $ΓΕ = ΓΑ$, το τρίγωνο ΓΕΑ θα είναι ισοσκελές, οπότε $Γ\hat{Α}Ε = Α\hat{Ε}Η$, (7).

Από τις σχέσεις (5), (6) και (7) έχουμε $Ε\hat{Α}Β = Η\hat{Α}Ε$, (8).

**β.** • Από **α.** ερώτημα έχουμε $Ε\hat{Α}Β = Η\hat{Α}Ε$, οπότε η $ΑΕ$ είναι διχοτόμος της γωνίας $Η\hat{Α}Β$ του τριγώνου ΑΗΒ.

Άρα, το σημείο Ε ισαπέχει από τις πλευρές $ΑΗ$ και $ΑΒ$, επομένως $ΕΗ = ΕΘ$.

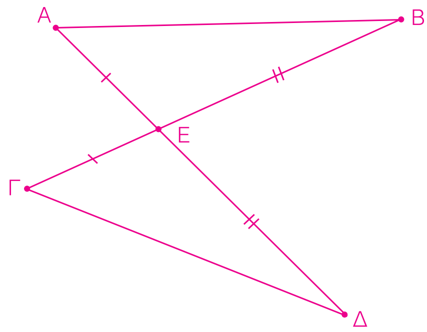
• Από **α.** ερώτημα έχουμε $Γ\hat{Α}Δ = Δ\hat{Α}Η$, οπότε η $ΑΔ$ είναι διχοτόμος της γωνίας $Η\hat{Α}Γ$ του τριγώνου ΑΗΓ.

Άρα, το σημείο $Δ$ ισαπέχει από τις πλευρές $ΑΗ$ και $ΑΓ$ κι επομένως είναι $ΔΗ = ΔΖ$.

Επομένως, $ΔΕ = ΔΗ + ΕΗ = ΔΖ + ΕΘ$.

## 22 Θέμα 4 - 13839

**Τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΔ και ΒΓ τέμνονται στο σημείο Ε έτσι ώστε $AE = \Gamma E$ και $BE = E\Delta$.**

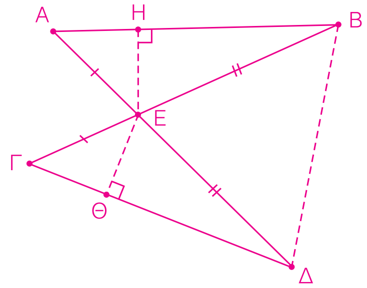



**α.** **Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΓΔΕ είναι ίσα.**

**β.** **Να αποδείξετε ότι οι αποστάσεις ΕΗ και ΕΘ του σημείου Ε από τις πλευρές ΑΒ και ΓΔ, αντίστοιχα, είναι ίσες.**

**γ.** **Αν οι προεκτάσεις των ΑΒ και ΓΔ προς τα Α και Γ αντίστοιχα τέμνονται στο Ζ, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΔΖ είναι ισοσκελές.**

**Λύση**




**α.** Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΓΔΕ έχουν:

- $AE = \Gamma E$
- $BE = \Delta E$
- $A\hat{E}B = \Gamma\hat{E}\Delta$, ως κατακορυφήν

Άρα είναι ίσα επειδή έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες.

**β.** Τα τρίγωνα ΑΕΗ και ΓΕΘ έχουν:

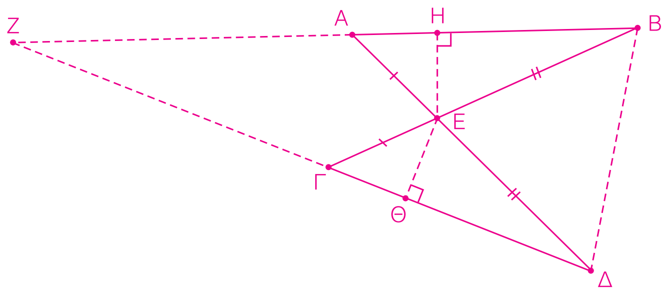
- $AE = \Gamma E$
- $\hat{H} = \hat{\Theta} = 90^\circ$
- $E\hat{A}H = E\hat{\Gamma}\Theta$ (από σύγκριση) του ερωτήματος **α.**

Άρα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια, που έχουν την υποτείνουσα και μια οξεία γωνία ίσες μία προς μία, άρα και $EH = E\Theta$.

**γ.** Από την ισότητα των τριγώνων του **α.** ερωτήματος έχουμε ότι $A\hat{B}E = \Gamma\hat{\Delta}E$.

Είναι $EB = E\Delta$ άρα το τρίγωνο ΕΒΔ είναι ισοσκελές με βάση ΒΔ, άρα $E\hat{B}\Delta = E\hat{\Delta}B$.

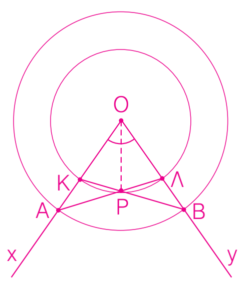
Οπότε $A\hat{B}E + E\hat{B}\Delta = \Gamma\hat{\Delta}E + E\hat{\Delta}B \Leftrightarrow Z\hat{B}\Delta = Z\hat{\Delta}B$, άρα το τρίγωνο ΒΔΖ είναι ισοσκελές.




## 23 Θέμα 4 - 1725

**Δίνεται οξεία γωνία $x\hat{O}y$ και δύο ομόκεντροι κύκλοι $(O, \rho_1)$ και $(O, \rho_2)$ με $\rho_1 < \rho_2$, που τέμνουν την Οx στα σημεία Κ, Α και την Οy στα Λ, Β αντίστοιχα.**

**Να αποδείξετε ότι:**




**α.** **$A\Lambda = BK$**

**β.** **Το τρίγωνο ΑΡΒ είναι ισοσκελές, όπου Ρ το σημείο τομής των ΑΛ και ΒΚ.**

**γ.** **Η ΟΡ διχοτομεί την $x\hat{O}y$.**

**Λύση**

**α.** Τα τρίγωνα ΟΑΛ, ΟΒΚ, έχουν:

- $O\Lambda = OK \quad (= \rho_1)$
- $OA = OB \quad (= \rho_2)$
- $\hat{O}$ κοινή

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ).

Άρα $A\Lambda = BK$.

**β.** Τα τρίγωνα ΟΑΛ και ΟΒΚ είναι ίσα, οπότε $O\hat{A}\Lambda = O\hat{B}K$ και $O\hat{K}B = O\hat{\Lambda}A$.

Τα τρίγωνα ΡΚΑ, ΡΛΒ έχουν:
- $KA = \Lambda B$, ως διαφορές ίσων τμημάτων
- $K\hat{A}P = P\hat{B}\Lambda$
- $A\hat{K}P = B\hat{\Lambda}P$, ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $O\hat{K}P$ και $O\hat{\Lambda}P$

Οπότε είναι ίσα (ΓΠΓ), άρα $PA = PB$.

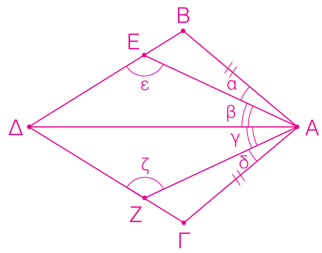
Επομένως το τρίγωνο ΑΡΒ είναι ισοσκελές.

**γ.** Τα τρίγωνα ΟΡΚ, ΟΡΛ έχουν:
- $OK = O\Lambda$
- ΟΡ κοινή
- $KP = P\Lambda$ (αφού τα τρίγωνα ΡΚΑ, ΡΛΒ είναι ίσα).

Οπότε είναι ίσα (ΠΠΠ), άρα $K\hat{O}P = P\hat{O}\Lambda$.

Επομένως η ΟΡ είναι η διχοτόμος της γωνίας $x\hat{O}y$.

## 24 Θέμα 4 - 1582




**Αν στο διπλανό σχήμα είναι $\hat{\alpha} = \hat{\delta}$, $\hat{\beta} = \hat{\gamma}$ και $AB = A\Gamma$, να αποδείξετε ότι:**

**α. Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι ίσα.**

**β. Οι γωνίες ε και ζ είναι ίσες.**

**Λύση**

**α.** Τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΓΔ έχουν:
- $AB = A\Gamma$
- ΑΔ κοινή
- $B\hat{A}\Delta = \Gamma\hat{A}\Delta$, ως αθροίσματα ίσων γωνιών.

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ).

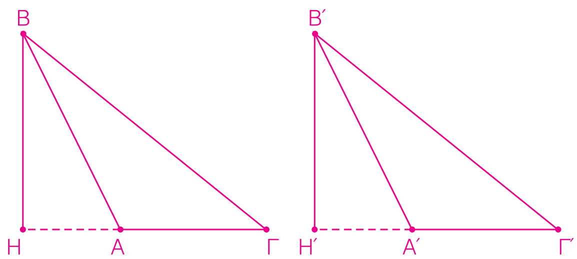
**β.** Τα τρίγωνα ΔΕΑ, ΔΖΑ έχουν:
- ΑΔ κοινή
- $E\hat{A}\Delta = Z\hat{A}\Delta$
- $E\hat{\Delta}A = Z\hat{\Delta}A$, αφού τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι ίσα.

Οπότε είναι ίσα (ΓΠΓ), άρα $\hat{\varepsilon} = \hat{\zeta}$.

## 7. Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων

## 25 Θέμα 2 - 12149

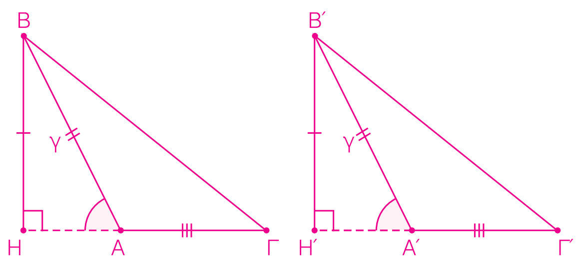
**Δίνονται τα αμβλυγώνια τρίγωνα $AB\Gamma(\hat{A} > 90^o)$ και $A'B'\Gamma'(\hat{A}' > 90^o)$ με $\gamma = \gamma'$ και $\beta = \beta'$. Αν τα ύψη ΒΗ και Β΄Η΄ των τριγώνων ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ αντίστοιχα είναι ίσα, να αποδείξετε ότι:**




**α.** $\mathbf{B\hat{A}H = B'\hat{A}'H'}$.

**β.** **Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι ίσα.**

**Λύση**




**α.** Τα τρίγωνα ΒΗΑ και Β΄Η΄Α΄ έχουν:
- $\hat{H} = \hat{H}' = 90^o$, αφού τα ΒΗ και Β΄Η΄ είναι ύψη
- $BH = B'H'$, από υπόθεση
- $\gamma = \gamma'$, από υπόθεση

Επομένως είναι ίσα, άρα $B\hat{A}H = B'\hat{A}'H'$ (1).

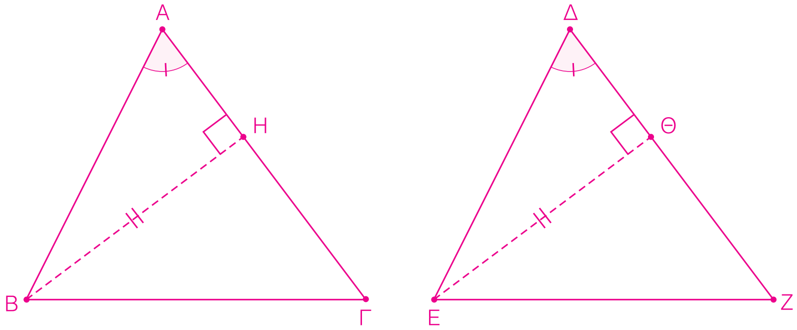
**β.** Τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $Α΄Β΄Γ΄$ έχουν:

- $γ = γ΄$ , από υπόθεση
- $β = β΄$ , από υπόθεση
- $Β\hat{Α}Γ = Β΄\hat{Α}΄Γ΄$ ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $Β\hat{Α}Η = Β΄\hat{Α}΄Η΄$ .

Επομένως, τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $Α΄Β΄Γ΄$ είναι ίσα, αφού έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες (ΠΓΠ).

## 26 Θέμα 2 - 13517

**Δίνονται δύο οξυγώνια τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΔΕΖ$ με $\hat{Α} = \hat{Δ}$ , $Α\hat{Β}Γ = Δ\hat{Ε}Ζ$ . Αν τα ύψη τους $ΒΗ$ και $ΕΘ$ είναι ίσα τότε να αποδείξετε ότι:**




**α.** **$ΑΒ = ΔΕ$ .**

**β.** **Τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΔΕΖ$ είναι ίσα .**

**Λύση**

**α.** Τα τρίγωνα $ΑΒΗ$ και $ΔΕΘ$ έχουν:

- $ΒΗ = ΕΘ$ , από (1)
- $\hat{Α} = \hat{Δ}$
- $\hat{Η} = \hat{Θ} = 90^{o}$

Επομένως, είναι ίσα, οπότε $ΑΒ = ΔΕ$ .

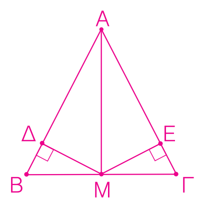
**β.** Τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΔΕΖ$ έχουν:

- $ΑΒ = ΔΕ$
- $\hat{Α} = \hat{Δ}$
- $Α\hat{Β}Γ = Δ\hat{Ε}Ζ$

Επομένως τα τρίγωνα είναι ίσα γιατί έχουν μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία (ΠΓΠ).

## 27 Θέμα 2 - 1657

**Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ και από σημείο $Μ$ της πλευράς $ΒΓ$ φέρουμε τα κάθετα τμήματα $ΜΔ$ και $ΜΕ$ στις πλευρές $ΑΒ$ και $ΑΓ$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:**




**α.** **Αν $ΜΔ = ΜΕ$ , τότε τα τρίγωνα $ΑΜΔ$ και $ΑΜΕ$ είναι ίσα.**

**β.** **Αν $ΑΒ = ΑΓ$ και $Μ$ μέσο του $ΒΓ$, τότε $ΜΔ = ΜΕ$ .**

**Λύση**

**α.** Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΑΜΔ$ και $ΑΜΕ$ έχουν:

- $ΜΔ = ΜΕ$
- $ΑΜ$ κοινή

Οπότε είναι ίσα.

**β.** Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΜΒΔ$ και $ΜΓΕ$ έχουν:

- $ΜΒ = ΜΓ$
- $\hat{Β} = \hat{Γ}$ , αφού το $\overset{\Delta}{ΑΒΓ}$ είναι ισοσκελές.

Άρα είναι ίσα, οπότε $ΜΔ = ΜΕ$ .

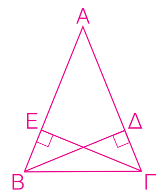
## 28 Θέμα 2 - 1568

**Θεωρούμε τρίγωνο $ΑΒΓ$ και τα ύψη του $ΒΔ$ και $ΓΕ$ που αντιστοιχούν στις πλευρές του $ΑΓ$ και $ΑΒ$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:**

**α. Αν το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελές με $ΑΒ = ΑΓ$ , τότε τα ύψη $ΒΔ$ και $ΓΕ$ είναι ίσα.**

**β. Αν τα ύψη $ΒΔ$ και $ΓΕ$ είναι ίσα, τότε το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελές με $ΑΓ = ΑΒ$ .**

**Λύση**




**α.** Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΔΑΒ$ και $ΕΑΓ$ έχουν:

- $ΑΒ = ΑΓ$
- $\hat{Α}$ κοινή

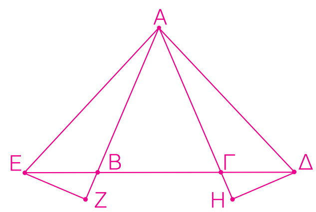
Οπότε είναι ίσα, άρα $ΒΔ = ΓΕ$ .

**β.** Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΔΑΒ$ και $ΕΑΓ$ έχουν:

- $ΒΔ = ΓΕ$
- $\hat{Α}$ κοινή

Οπότε είναι ίσα, άρα $ΑΓ = ΑΒ$ .

## 29 Θέμα 2 - 1659




**Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $ΑΒ = ΑΓ$ .**
**Στην προέκταση της $ΒΓ$ (προς το $Γ$ ) θεωρούμε σημείο $Δ$ και στην προέκταση της $ΓΒ$ (προς το $Β$ ) θεωρούμε σημείο $Ε$ έτσι ώστε $ΓΔ = ΒΕ$ . Από το $Δ$ φέρουμε $ΔΗ$ κάθετη στην ευθεία $ΑΓ$ και από το $Ε$ φέρουμε $ΕΖ$ κάθετη στην ευθεία $ΑΒ$ . Να αποδείξετε ότι:**

**α. $ΑΔ = ΑΕ$** **β. $ΕΖ = ΔΗ$**

**Λύση**

**α.** Τα τρίγωνα $ΑΒΕ$ και $ΑΓΔ$ έχουν:

- $ΑΒ = ΑΓ$
- $ΒΕ = ΓΔ$
- $Α\hat{Β}Ε = Α\hat{Γ}Δ$ ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $Α\hat{Β}Γ$ και $Α\hat{Γ}Β$

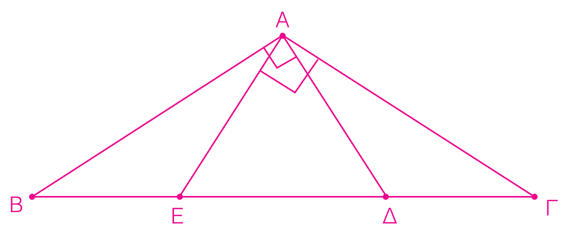
Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ), άρα $ΑΔ = ΑΕ$ .

**β.** Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΖΒΕ$ και $ΗΓΔ$ έχουν:

- $ΒΕ = ΓΔ$
- $Ε\hat{Β}Ζ = Δ\hat{Γ}Η$ , ως κατακορυφήν των ίσων γωνιών $Α\hat{Β}Γ$ και $Α\hat{Γ}Β$ .

Οπότε είναι ίσα, άρα $ΕΖ = ΔΗ$ .

## 30 Θέμα 2 - 13533




**Δίνεται ισοσκελές και αμβλυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$ .**
**Η κάθετη στην ΑΒ στο σημείο Α τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Δ και η κάθετη στην ΑΓ στο σημείο Α τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:**

**α. τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα.**

**β. το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.**

**γ. $ΒΕ = ΓΔ$ .**

**Λύση**

**α.** Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ έχουν:

- $B\hat{A}\Delta = \Gamma\hat{A}E = 90^o$
- $AB = A\Gamma$
- $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ , ως προσκείμενες γωνίες στη βάση ΒΓ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.

Άρα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια και έχουν μια κάθετη πλευρά και την προσκείμενη σε αυτή οξεία γωνία ίσες μία προς μία.

**β.** Από την ισότητα των τριγώνων ΑΒΔ και ΑΓΕ προκύπτει ότι $A\Delta = AE$ .

Άρα το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.

**γ.** Από την ισότητα των τριγώνων ΑΒΔ και ΑΓΕ έχουμε ότι $B\Delta = \Gamma E$ .
Άρα $BE = B\Delta - \Delta E = \Gamma E - \Delta E = \Gamma\Delta$ .

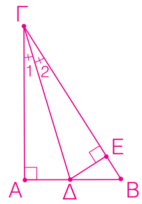
## 31 Θέμα 2 - 1574

**Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^o$) και η διχοτόμος της γωνίας του $\hat{\Gamma}$ , η οποία τέμνει την πλευρά ΑΒ στο Δ. Από το Δ φέρουμε $\Delta E \perp B\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι:**

**α. Τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΔΓΕ είναι ίσα.**

**β. Το Γ ισαπέχει από τα σημεία Α και Ε και η ευθεία ΓΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΑΕ.**

**Λύση**




**α.** Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΓΔ και ΔΓΕ έχουν:

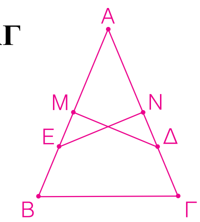
- ΓΔ κοινή
- $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2$

Οπότε είναι ίσα.

**β.** Επειδή τα τρίγωνα ΑΓΔ, ΔΓΕ είναι ίσα, προκύπτει $\Gamma A = \Gamma E$ και $\Delta A = \Delta E$ .
Τα σημεία Γ, Δ ισαπέχουν από τα σημεία Α και Ε, άρα τα Γ, Δ ανήκουν στη μεσοκάθετο του ΑΕ.
Επομένως η ευθεία ΓΔ είναι η μεσοκάθετος του ΑΕ.

## 32 Θέμα 2 - 1656

**Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ΜΔ, ΝΕ οι μεσοκάθετοι των πλευρών του ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:**




**α. αν $M\Delta = NE$ , τότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές**

**β. αν $AB = A\Gamma$ , τότε $M\Delta = NE$ .**

**Λύση**

**α.** Τα ορθογώνια τρίγωνα ΜΑΔ και ΝΑΕ έχουν:

- $M\Delta = NE$
- $\hat{A}$ κοινή.

Οπότε είναι ίσα, άρα: $AM = AN \Rightarrow 2AM = 2AN \Rightarrow AB = A\Gamma$ .

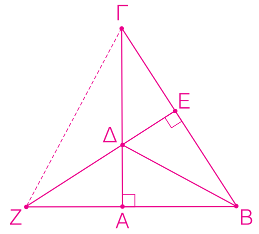
Επομένως το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

**β.** Τα ορθογώνια τρίγωνα ΜΑΔ και ΝΑΕ έχουν:

- $AM = AN$ , ως μισά των ίσων τμημάτων ΑΒ και ΑΓ
- $\hat{A}$ κοινή.

Οπότε είναι ίσα, άρα $M\Delta = NE$ .

## 33 Θέμα 2 - 1705




**Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}=90^o$) και η διχοτόμος του ΒΔ. Από το Δ φέρουμε ΔΕ ⊥ ΒΓ που τέμνει την προέκταση της ΑΒ (προς το Α) στο Ζ.**
**Να αποδείξετε ότι:**

**α. ΒΕ = ΑΒ** **β. το τρίγωνο ΒΓΖ είναι ισοσκελές.**

**Λύση**

**α.** Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ και ΕΒΔ έχουν:

- ΒΔ κοινή
- $A\hat{B}\Delta = \Delta\hat{B}E$, αφού ΒΔ διχοτόμος

Οπότε είναι ίσα, άρα ΒΕ = ΑΒ.

**β.** Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΖΕΒ έχουν:
- ΑΒ = ΒΕ (από το **α.** ερώτημα)
- $\hat{B}$ κοινή

Οπότε είναι ίσα. Άρα ΒΓ = ΒΖ.
Οπότε το τρίγωνο ΒΓΖ είναι ισοσκελές.

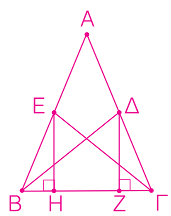
## 34 Θέμα 2 - 1532

**Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και οι διχοτόμοι του ΒΔ και ΓΕ. Αν ΕΗ ⊥ ΒΓ και ΔΖ ⊥ ΒΓ, να αποδείξετε ότι:**

**α. τα τρίγωνα ΒΓΔ και ΓΒΕ είναι ίσα**

**β. ΕΗ = ΔΖ**

**Λύση**




**α.** Τα τρίγωνα ΒΓΔ και ΓΒΕ έχουν:

- ΒΓ κοινή
- $\Gamma\hat{B}E = B\hat{\Gamma}\Delta$
- $\Delta\hat{B}\Gamma = E\hat{\Gamma}B$ ως μισά ίσων γωνιών.

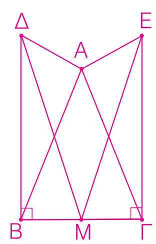
Οπότε είναι ίσα (ΓΠΓ).

**β.** Τα ορθογώνια τρίγωνα ΗΕΒ και ΖΔΓ έχουν:

- ΕΒ = ΓΔ, αφού τα τρίγωνα ΓΒΕ, ΒΓΔ είναι ίσα
- $\hat{B}=\hat{\Gamma}$

Οπότε είναι ίσα, άρα ΕΗ = ΔΖ.

## 35 Θέμα 2 - 1698




**Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ. Στα σημεία Β και Γ της ΒΓ φέρουμε προς το ίδιο μέρος της ΒΓ, τα τμήματα ΒΔ ⊥ ΒΓ και ΓΕ ⊥ ΒΓ τέτοια ώστε ΒΔ = ΓΕ.**
**Αν Μ το μέσο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι:**

**α. τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ είναι ίσα.**

**β. ΑΔ = ΑΕ**

**Λύση**

**α.** Τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ έχουν:

- ΜΒ = ΜΓ
- ΒΔ = ΓΕ

Οπότε είναι ίσα.

**β.** Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ έχουν:

- $AB = A\Gamma$
- $B\Delta = \Gamma E$
- $A\hat{B}\Delta = A\hat{\Gamma}E$ , ως συμπληρωματικές των ίσων γωνιών $A\hat{B}\Gamma$ και $A\hat{\Gamma}B$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ), άρα $A\Delta = AE$ .

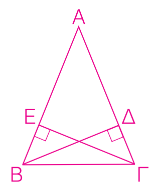
## 36 Θέμα 2 - 1545

**Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ $(AB = A\Gamma)$ και τα ύψη του $B\Delta$ και $\Gamma E$ . Να αποδείξετε ότι:**

**α. Τα τρίγωνα $B\Delta\Gamma$ και $\Gamma EB$ είναι ίσα.**

**β. $A\Delta = AE$**

**Λύση**




**α.** Τα ορθογώνια τρίγωνα $B\Delta\Gamma$ και $\Gamma EB$ έχουν:
- $B\Gamma$ κοινή
- $\hat{\Gamma} = \hat{B}$ ( $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ ισοσκελές)

Άρα είναι ίσα.
**β.** Επειδή τα τρίγωνα $B\Delta\Gamma$ , $\Gamma EB$ είναι ίσα, έχουμε $\Delta\Gamma = EB$ .
Είναι $A\Delta = A\Gamma - \Delta\Gamma = AB - BE = AE$ .

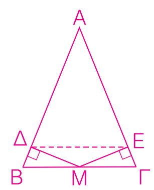
## 37 Θέμα 2 - 1547

**Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ . Από το μέσο $M$ της $B\Gamma$ φέρουμε τα κάθετα τμήματα $M\Delta$ και $ME$ στις πλευρές $AB$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:**

**α. $M\Delta = ME$**

**β. το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές**

**Λύση**




**α.** Τα ορθογώνια τρίγωνα $\Delta BM$ και $E\Gamma M$ έχουν:
- $MB = M\Gamma$
- $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, αφού το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

Άρα είναι ίσα, οπότε $M\Delta = ME$ .
**β.** Είναι:
- $AB = A\Gamma$
- $\Delta B = E\Gamma$ , αφού τα τρίγωνα $\Delta BM$ , $E\Gamma M$ είναι ίσα.

Οπότε $A\Delta = AB - \Delta B = A\Gamma - E\Gamma = AE$ , άρα το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές.

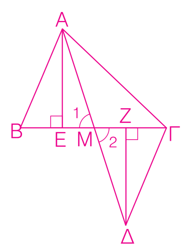
## 38 Θέμα 2 - 1569

**Σε οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ προεκτείνουμε τη διάμεσο $AM$ (προς το $M$ ) κατά ίσο τμήμα $M\Delta$.**
**Να αποδείξετε ότι:**

**α. Τα τρίγωνα $ABM$ και $M\Gamma\Delta$ είναι ίσα.**

**β. Τα σημεία $A$ και $\Delta$ ισαπέχουν από την πλευρά $B\Gamma$ .**

**Λύση**

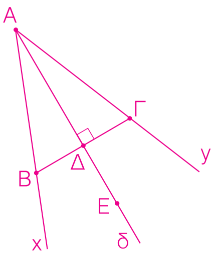



**α.** Τα τρίγωνα $ABM$ , $M\Gamma\Delta$ έχουν:
- $MB = M\Gamma$
- $AM = M\Delta$
- $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ).
**β.** Τα ορθογώνια τρίγωνα $EAM$ και $Z\Delta M$ έχουν:
- $MA = M\Delta$
- $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$

Οπότε είναι ίσα, άρα $AE = \Delta Z$ .

## 39 Θέμα 2 - 1670




**Δίνεται γωνία $x\hat{A}y$ και η διχοτόμος της $A\delta$. Από τυχαίο σημείο $B$ της $Ax$ φέρουμε κάθετη στη διχοτόμο, η οποία τέμνει την $A\delta$ στο $\Delta$ και την $Ay$ στο $\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:**

**α. Τα τμήματα $AB$ και $A\Gamma$ είναι ίσα.**

**β. Το τυχαίο σημείο $E$ της $A\delta$ ισαπέχει από τα $B$ και $\Gamma$.**

**Λύση**

**α.** Στο τρίγωνο $AB\Gamma$, το $A\Delta$ είναι διχοτόμος και ύψος.
Οπότε το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$.

**β.** Στο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ το ύψος $A\Delta$ είναι και διάμεσος.
Οπότε η ευθεία $A\Delta$ είναι η μεσοκάθετος του $B\Gamma$, άρα $EB = E\Gamma$.

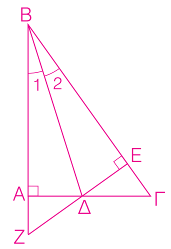
## 40 Θέμα 2 - 1571

**Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ $(\widehat{A} = 90^o)$ και $B\Delta$ η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{B}$. Από το $\Delta$ φέρουμε $\Delta E \perp B\Gamma$ και έστω $Z$ το σημείο στο οποίο η ευθεία $E\Delta$ τέμνει την προέκταση της $BA$ (προς το $A$). Να αποδείξετε ότι:**

**α. $AB = BE$**

**β. Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $ZEB$ είναι ίσα.**

**Λύση**




**α.** Τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Delta$ $(\widehat{A} = 90^o)$ και $EB\Delta$ $(\widehat{E} = 90^o)$ έχουν:

- $B\Delta$ κοινή
- $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$

Οπότε είναι ίσα, άρα $AB = BE$.

**β.** Τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ και $ZEB$ έχουν:
- $AB = BE$
- $\widehat{B}$ κοινή

Οπότε είναι ίσα.

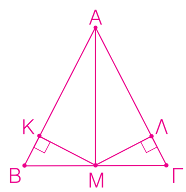
## 41 Θέμα 2 - 1546

**Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ $(AB = A\Gamma)$ και το μέσο $M$ της βάσης του $B\Gamma$. Φέρουμε τις αποστάσεις $MK$ και $M\Lambda$ του σημείου $M$ από τις ίσες πλευρές του τριγώνου $AB\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:**

**α. $MK = M\Lambda$**

**β. Η $AM$ είναι διχοτόμος της γωνίας $KM\Lambda$.**

**Λύση**



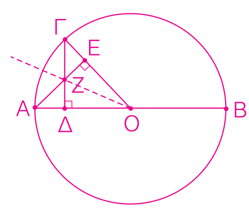

**α.** Επειδή η $AM$ είναι διάμεσος του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$, θα είναι και διχοτόμος, οπότε $MK = M\Lambda$.

**β.** Τα ορθογώνια τρίγωνα $KAM$ και $\Lambda AM$ έχουν:
- $AM$ κοινή
- $MK = M\Lambda$

Οπότε είναι ίσα, άρα $K\hat{M}A = \Lambda\hat{M}A$.

Άρα η $AM$ είναι διχοτόμος της $K\hat{M}\Lambda$.

## 42 Θέμα 2 - 1677

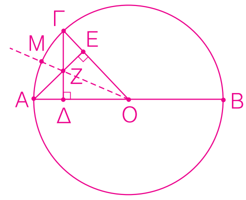



**Έστω κύκλος με κέντρο $O$ και ακτίνα $\rho$. Θεωρούμε διάμετρο $AB$ και τυχαίο σημείο $\Gamma$ του κύκλου. Αν $AE$ κάθετο στην $O\Gamma$ και $\Gamma\Delta$ κάθετο στην $AO$ να αποδείξετε ότι:**

**α. Το τρίγωνο $\overset{\Delta}{\Delta OE}$ είναι ισοσκελές.**

**β. Η $OZ$ διχοτομεί τη γωνία $A\hat{O}\Gamma$ και προεκτεινόμενη διέρχεται από το μέσο του τόξου $A\Gamma$.**

**Λύση**




**α.** Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΕΑΟ$, $ΔΓΟ$ έχουν:
- $ΟΑ = ΟΓ$, ως ακτίνες του κύκλου
- $\hat{O}$ κοινή

Οπότε είναι ίσα, άρα $ΟΔ = ΟΕ$.
Επομένως το τρίγωνο $ΔΟΕ$ είναι ισοσκελές.

**β.** • Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΕΖΟ$, $ΔΖΟ$ έχουν:
- $ΟΖ$ κοινή
- $ΟΔ = ΟΕ$

Οπότε είναι ίσα, άρα $Δ\hat{O}Ζ = Ε\hat{O}Ζ$.

Επομένως η $ΟΖ$ είναι η διχοτόμος της $Α\hat{O}Γ$.

• Έστω ότι η $ΟΖ$ τέμνει το κύκλο στο $Μ$.

Έχουμε $Α\hat{O}Μ = Μ\hat{O}Γ$, άρα $\overset{\frown}{ΜΑ} = \overset{\frown}{ΜΓ}$, επομένως το $Μ$ είναι το μέσο του τόξου $\overset{\frown}{ΑΓ}$.

## 43 Θέμα 4 - 1724

**Έστω $ΑΒΓ$ τρίγωνο και τα ύψη του $ΒΕ$ και $ΓΔ$ που αντιστοιχούν στις πλευρές $ΑΓ$ και $ΑΒ$ αντίστοιχα. Δίνεται η ακόλουθη πρόταση:**

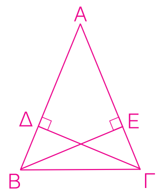
**Π: Αν το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελές με $ΑΒ = ΑΓ$, τότε τα ύψη $ΒΕ$ και $ΓΔ$ που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές του είναι ίσα.**

**α. Να εξετάσετε αν ισχύει η πρόταση Π αιτιολογώντας την απάντησή σας.**

**β. Να διατυπώσετε την αντίστροφη πρόταση της Π και να αποδείξετε ότι ισχύει.**

**γ. Να διατυπώσετε την πρόταση Π και την αντίστροφή της ως ενιαία πρόταση.**

**Λύση**




**α.** Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΕΑΒ$ και $ΔΑΓ$ έχουν:
- $ΑΒ = ΑΓ$
- $\hat{Α}$ κοινή

Οπότε είναι ίσα, άρα $ΒΕ = ΓΔ$.
Επομένως η πρόταση Π ισχύει.

**β.** Η αντίστροφη πρόταση της Π είναι:
Π΄: Αν σε ένα τρίγωνο $ΑΒΓ$ τα ύψη του $ΒΕ$ και $ΓΔ$ είναι ίσα, τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές με $ΑΒ = ΑΓ$.

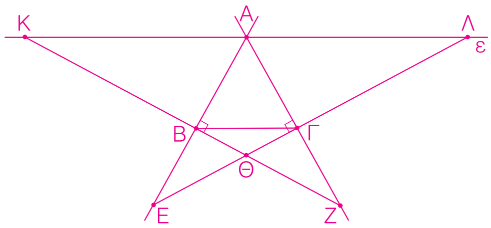
Απόδειξη

Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΕΑΒ$ και $ΔΑΓ$ έχουν:
- $ΒΕ = ΓΔ$
- $\hat{Α}$ κοινή

Οπότε είναι ίσα, άρα $ΑΒ = ΑΓ$.
Επομένως η πρόταση Π΄ ισχύει.

**γ.** Ένα τρίγωνο είναι ισοσκελές, αν και μόνο αν τα ύψη που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές τους είναι ίσα.

## 44 Θέμα 4 - 1875




**Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ $(ΑΒ = ΑΓ)$, και την ευθεία $ε$ της εξωτερικής διχοτόμου της γωνίας $Α$. Η κάθετη στην πλευρά $ΑΒ$ στο $Β$ τέμνει την $ε$ στο $Κ$ και την ευθεία $ΑΓ$ στο $Ζ$. Η κάθετη στην πλευρά $ΑΓ$ στο $Γ$ τέμνει την $ε$ στο $Λ$ και την ευθεία $ΑΒ$ στο $Ε$.**

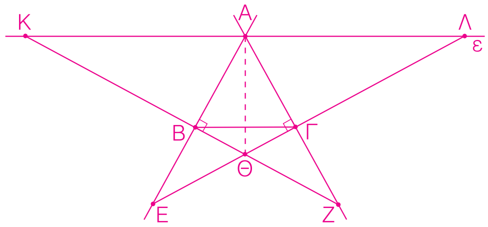
**α. Να αποδείξετε ότι:**

**i. $ΑΖ = ΑΕ$ ii. $ΑΚ = ΑΛ$**

**β. Ένας μαθητής κοιτώντας το σχήμα, διατύπωσε την άποψη ότι η $ΑΘ$ είναι διχοτόμος της γωνίας $Α$ του τριγώνου $ΑΒΓ$, όπου $Θ$ το σημείο τομής των $ΚΖ$ και $ΕΛ$. Συμφωνείτε με την παραπάνω σκέψη του μαθητή ή όχι; Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας.**

**Λύση**

**α. i.** Τα ορθογώνια τρίγωνα $AZB$ και $AE\Gamma$ έχουν:




- $AB = A\Gamma$
- $\hat{A}$ κοινή

Άρα είναι ίσα, οπότε $AZ = AE$ .

**ii.** Τα ορθογώνια τρίγωνα $ABK$ και $A\Gamma\Lambda$ έχουν:

- $AB = A\Gamma$
- $B\hat{A}K = \Gamma\hat{A}\Lambda \quad (= \frac{\hat{A}_{\varepsilon\xi}}{2})$

Άρα είναι ίσα, οπότε $AK = A\Lambda$ .

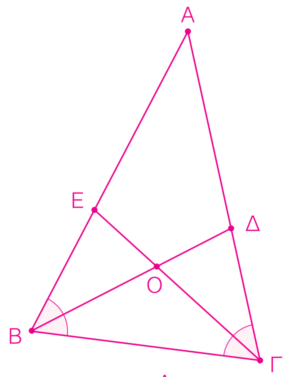
**β.** Συμφωνούμε διότι: Τα ορθογώνια τρίγωνα $A\Theta B$ και $A\Theta\Gamma$ έχουν:

- $AB = A\Gamma$
- $A\Theta$ κοινή

Οπότε είναι ίσα, άρα $B\hat{A}\Theta = \Gamma\hat{A}\Theta$ .

Επομένως η $A\Theta$ είναι η διχοτόμος της $\hat{A}$ .

## 45 Θέμα 4 - 13854



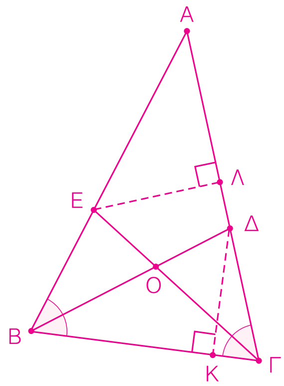

**Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma (AB = A\Gamma)$ . Οι διχοτόμοι ΒΔ και ΓΕ των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ αντίστοιχα, τέμνονται στο σημείο Ο.**

**α. Να αποδείξετε ότι $B\Delta = \Gamma E$ .**

**β. Από τα σημεία Ε και Δ φέρνουμε κάθετες ΕΛ και ΔΚ στις πλευρές ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι: $\Delta K = E\Lambda$ .**

**γ. Να εντοπίσετε και να σχεδιάσετε σημείο Ζ της πλευράς ΒΓ που η απόστασή του από το σημείο Ε να ισούται με την απόσταση των σημείων Δ και Κ αιτιολογώντας πλήρως την απάντησή σας.**

**Λύση**

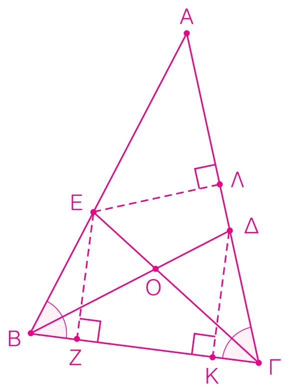



**α.** Τα τρίγωνα ΒΓΔ και ΒΓΕ έχουν:

- ΒΓ κοινή
- $\Gamma\hat{B}\Delta = B\hat{\Gamma}E$ (μισά των ίσων γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$)
- $\Delta\hat{\Gamma}B = E\hat{B}\Gamma$ (ως προσκείμενες στη βάση ΒΓ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ)

Άρα είναι ίσα (ΓΠΓ), οπότε $B\Delta = \Gamma E$.

**β.** Τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΔΚ και ΓΕΛ έχουν:




- $\hat{K} = \hat{\Lambda} = 90^{o}$
- $B\Delta = \Gamma E$
- $K\hat{B}\Delta = \Lambda\hat{\Gamma}E$

Άρα είναι ίσα γιατί είναι ορθογώνια, που έχουν την υποτείνουσα και μια οξεία γωνία ίσες μία προς μία, οπότε

$\Delta K = E\Lambda$.

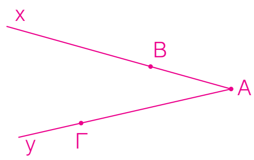
**γ.** Αναζητούμε ένα σημείο Ζ της πλευράς ΒΓ για το οποίο να ισχύει $ZE = \Delta K$.

Έχουμε ότι $\Delta K = E\Lambda$, οπότε $ZE = E\Lambda$. Το σημείο Ε ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας $\hat{\Gamma}$ οπότε $E\Lambda = EZ$. Συνεπώς το ζητούμενο σημείο Ζ θα είναι το ίχνος της κάθετης από το σημείο Ε στην πλευρά ΒΓ.

## 8. Βασικοί γεωμετρικοί τόποι

### 46 Θέμα 2 - 1688

**Στο διπλανό σχήμα έχουμε το χάρτη μίας περιοχής όπου είναι κρυμμένος ένας θησαυρός. Οι ημιευθείες $Ax$ και $Ay$ παριστάνουν δύο ποτάμια και στα σημεία $B$ και $\Gamma$ βρίσκονται δύο πλατάνια. Να προσδιορίσετε γεωμετρικά τις δυνατές θέσεις του θησαυρού, αν είναι γνωστό ότι:**




**α.** **ισαπέχει από τα δύο πλατάνια**

**β.** **ισαπέχει από τα δύο ποτάμια**

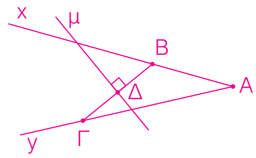
**γ.** **ισαπέχει και από τα δύο πλατάνια και από τα δύο ποτάμια.**

**Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας σε κάθε περίπτωση.**

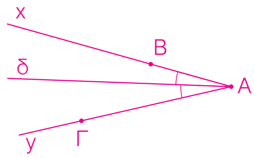
**Λύση**

Γεωμετρικά οι δυνατές θέσεις του θησαυρού είναι:

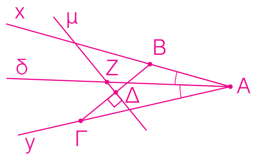
**α.** Πάνω στη μεσοκάθετο του $B\Gamma$, αφού κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ισαπέχει από τα άκρα του τμήματος.




**β.** Πάνω στη διχοτόμο της γωνίας $\hat{A}$, αφού κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της.




**γ.** Πάνω στη μεσοκάθετο του ΒΓ και στη διχοτόμο της γωνίας $\hat{A}$, άρα είναι το σημείο τομής της μεσοκαθέτου του $B\Gamma$ και της διχοτόμου της γωνίας $\hat{A}$.



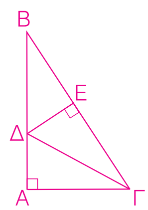

## 10. Ανισοτικές σχέσεις

### 47 Θέμα 2 - 1540

**Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ $(A = 90^o)$, η διχοτόμος τη γωνίας $\hat{\Gamma}$ τέμνει την πλευρά $AB$ στο σημείο $\Delta$. Από το $\Delta$ φέρουμε προς την πλευρά $B\Gamma$ την κάθετο $\Delta E$, η οποία τέμνει τη $B\Gamma$ στο σημείο $E$. Να αποδείξετε ότι:**

**α.** $A\Delta = \Delta E$  **β.** $A\Delta < \Delta B$

**Λύση**




**α.** Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΓΔ, ΓΔΕ έχουν:

- $\Gamma\Delta$ κοινή
- $A\hat{\Gamma}\Delta = \Delta\hat{\Gamma}E$, αφού ΓΔ διχοτόμος

Οπότε είναι ίσα, άρα $A\Delta = \Delta E$.

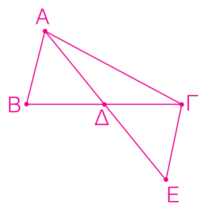
$2^{ος}$ τρόπος

Το $\Delta$ είναι σημείο της διχοτόμου της γωνίας $\hat{\Gamma}$, οπότε το $\Delta$ ισαπέχει από τις πλευρές της $\hat{\Gamma}$, άρα $A\Delta = \Delta E$.

**β.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο $EB\Delta$ η $\Delta B$ είναι υποτείνουσα, οπότε είναι η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου. Άρα $\Delta E < \Delta B$, οπότε $A\Delta < \Delta B$.

### 48 Θέμα 2 - 1573

**Στο διπλανό σχήμα, η $A\Delta$ είναι διάμεσος του τριγώνου $AB\Gamma$ και το $E$ είναι σημείο στην προέκταση της $A\Delta$, ώστε $\Delta E = A\Delta$. Να αποδείξετε ότι:**




**α.** $AB = \Gamma E$  **β.** $AE < AB + A\Gamma$

**Λύση**

**α.** Τα τρίγωνα $\Delta AB$, $\Delta E\Gamma$ έχουν:

- $\Delta B = \Delta\Gamma$
- $A\Delta = \Delta E$
- $A\hat{\Delta}B = \Gamma\hat{\Delta}E$

Οπότε είναι ίσα $(\Pi\Gamma\Pi)$.

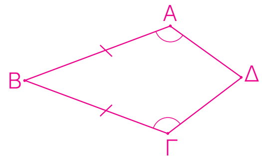
Άρα $AB = \Gamma E \quad (1)$.

**β.** Στο τρίγωνο $A\Gamma E$ εφαρμόζουμε την τριγωνική ανισότητα και έχουμε

$$AE < \Gamma E + A\Gamma \overset{(1)}{\Rightarrow} AE < AB + A\Gamma$$

## 49 Θέμα 2 - 1585

**Έστω κυρτό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $BA = B\Gamma$ και $\hat{A} = \hat{\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι:**

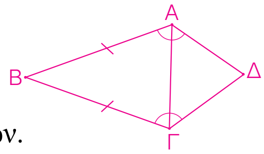



**α. $B\hat{A}\Gamma = B\hat{\Gamma}A$**

**β. Το τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές.**

**γ. Η ευθεία $B\Delta$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος $A\Gamma$.**

**Λύση**




**α.** Το τρίγωνο $BA\Gamma$ είναι ισοσκελές, με $BA = B\Gamma$, οπότε $B\hat{A}\Gamma = B\hat{\Gamma}A$.

**β.** Επειδή $B\hat{A}\Delta = B\hat{\Gamma}\Delta$ και $B\hat{A}\Gamma = B\hat{\Gamma}A$, έχουμε $\Delta\hat{A}\Gamma = \Delta\hat{\Gamma}A$, ως διαφορές ίσων γωνιών. Οπότε το τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές.

**γ.** Επειδή $BA = B\Gamma$ και $\Delta A = \Delta\Gamma$, τα σημεία Β, Δ ισαπέχουν από τα Α, Γ οπότε τα Β, Δ ανήκουν στη μεσοκάθετο του $A\Gamma$. Άρα η ευθεία $B\Delta$ είναι μεσοκάθετος του $A\Gamma$.

## 50 Θέμα 2 - 1558

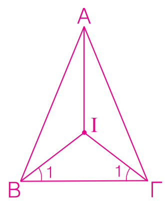
**Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ $(AB = A\Gamma)$ και $I$ το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι:**

**α. Το τρίγωνο $BI\Gamma$ είναι ισοσκελές.**

**β. Οι γωνίες $A\hat{I}\Gamma$ και $A\hat{I}B$ είναι ίσες.**

**γ. Η ευθεία $AI$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος $B\Gamma$.**

**Λύση**




**α.** Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές, έχουμε $\hat{B} = \hat{\Gamma}$. Οπότε και $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$, ως μισά ίσων γωνιών. Άρα το τρίγωνο $BI\Gamma$ είναι ισοσκελές.

**β.** Τα τρίγωνα $ABI$, $A\Gamma I$ έχουν:

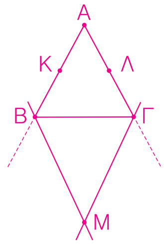
- $AB = A\Gamma$
- $AI$ κοινή
- $IB = I\Gamma$, αφού το τρίγωνο $BI\Gamma$ είναι ισοσκελές

Οπότε είναι ίσα $(\Pi\Pi\Pi)$.

Άρα $A\hat{I}B = A\hat{I}\Gamma$.

**γ.** Επειδή $AB = A\Gamma$ και $IB = I\Gamma$, τα Α, Ι ισαπέχουν από τα Β, Γ, οπότε τα Α, Ι ανήκουν στη μεσοκάθετο του $B\Gamma$. Άρα η ευθεία $AI$ είναι μεσοκάθετος του $B\Gamma$.

## 51 Θέμα 2 - 1553




**Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ $(ΑΒ = ΑΓ)$. Οι διχοτόμοι των εξωτερικών γωνιών $Β$ και $Γ$ τέμνονται στο σημείο $Μ$ και $Κ$, $Λ$ είναι αντίστοιχα τα μέσα των πλευρών $ΑΒ$ και $ΑΓ$.**

**α. Να δείξετε ότι το τρίγωνο $ΒΜΓ$ είναι ισοσκελές με $ΜΒ = ΜΓ$.**

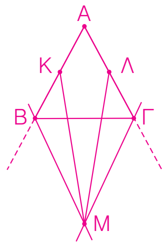
**β. Να δείξετε ότι $ΜΚ = ΜΛ$.**

**Λύση**

**α.** Επειδή το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελές, έχουμε

$$\hat{Β} = \hat{Γ} \Rightarrow \hat{Β}_{εξ} = \hat{Γ}_{εξ} \Rightarrow \frac{\hat{Β}_{εξ}}{2} = \frac{\hat{Γ}_{εξ}}{2} \Rightarrow Μ\hat{Β}Γ = Μ\hat{Γ}Β$$

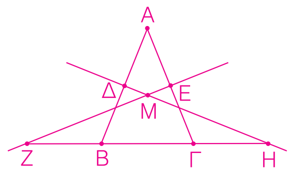
Άρα το τρίγωνο $ΒΜΓ$ είναι ισοσκελές με $ΜΒ = ΜΓ$.




**β.** Τα τρίγωνα $ΜΚΒ$ και $ΜΛΓ$ έχουν:
- $ΜΒ = ΜΓ$
- $ΒΚ = ΓΛ$
- $Μ\hat{Β}Κ = Μ\hat{Γ}Λ$, ως άθροισμα ίσων γωνιών

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ).
Άρα $ΜΚ = ΜΛ$.

## 52 Θέμα 2 - 1578




**Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ $(ΑΒ = ΑΓ)$. Οι μεσοκάθετες ευθείες των ίσων πλευρών του τέμνονται στο $Μ$ και προεκτεινόμενες τέμνουν τη βάση $ΒΓ$ στα $Ζ$ και $Η$.**

**α. Να συγκρίνετε τα τρίγωνα $ΔΒΗ$ και $ΕΖΓ$.**

**β. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $ΜΖΗ$ είναι ισοσκελές.**

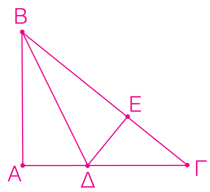
**Λύση**

**α.** Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΔΒΗ$ και $ΕΓΖ$ έχουν:
- $ΔΒ = ΓΕ$, ως μισά ίσων πλευρών
- $\hat{Β} = \hat{Γ}$, ως γωνίες της βάσης του ισοσκελούς τριγώνου $ΑΒΓ$

Οπότε είναι ίσα.

**β.** Επειδή τα τρίγωνα $ΔΒΗ$, $ΕΓΖ$ είναι ίσα, προκύπτει $\hat{Η} = \hat{Ζ}$.
Άρα το τρίγωνο $ΜΖΗ$ είναι ισοσκελές.

## 53 Θέμα 2 - 1646




**Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία $Α$. Η $ΒΔ$ είναι διχοτόμος της γωνίας $Β$, η $ΔΕ$ είναι κάθετη στην $ΒΓ$ και η γωνία $Γ$ είναι μικρότερη της γωνίας $Β$. Να αποδείξετε ότι:**

**α. $ΑΔ = ΔΕ$  β. $ΑΔ < ΔΓ$  γ. $ΑΓ > ΑΒ$**

**Λύση**

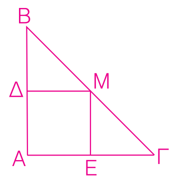
**α.** Επειδή το σημείο $Δ$ είναι σημείο της διχοτόμου της γωνίας $\hat{Β}$, ισαπέχει από τις πλευρές της.
Άρα $ΑΔ = ΔΕ$, (1).

**β.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΔΕΓ$ η $ΔΓ$ είναι υποτείνουσα, οπότε είναι η μεγαλύτερη πλευρά, οπότε

$$ΔΕ < ΔΓ \overset{(1)}{\Rightarrow} ΑΔ < ΔΓ$$

**γ.** Στο τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι $\hat{Β} > \hat{Γ}$, οπότε οι απέναντι πλευρές είναι όμοια άνισες, άρα $ΑΓ > ΑΒ$.

## 54 Θέμα 2 - 1658




**Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με τη γωνία Α ορθή και από το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ φέρουμε τα κάθετα τμήματα ΜΔ και ΜΕ στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:**

**α. Αν $ΜΔ = ΜΕ$ τότε:**

**i. τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ είναι ίσα**

**ii. το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.**

**β. Αν $ΑΒ = ΑΓ$ τότε $ΜΔ = ΜΕ$ .**

**Λύση**

**α. i.** Τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ έχουν:
- $ΜΔ = ΜΕ$
- $ΜΒ = ΜΓ$ , αφού Μ μέσο της ΒΓ

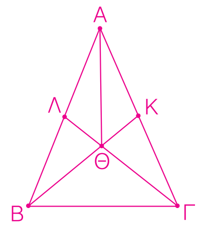
Άρα είναι ίσα.

**ii.** Επειδή τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ είναι ίσα, έχουμε $\hat{Β} = \hat{Γ}$ , οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

**β.** Αν $ΑΒ = ΑΓ$ , τότε τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ έχουν:
- $ΜΒ = ΜΓ$
- $\hat{Β} = \hat{Γ}$

Οπότε είναι ίσα, άρα $ΜΔ = ΜΕ$ .

## 55 Θέμα 2 - 1664




**Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(ΑΒ = ΑΓ)$ και τις διαμέσους του ΒΚ και ΓΛ , οι οποίες τέμνονται στο σημείο Θ . Να αποδείξετε ότι:**

**α. Οι διάμεσοι ΒΚ και ΓΛ είναι ίσες.**

**β. Τα τρίγωνα ΑΒΘ και ΑΓΘ είναι ίσα.**

**Λύση**

**α.** Τα τρίγωνα ΒΚΓ , ΓΛΒ έχουν:
- $ΚΓ = ΛΒ$ , ως μισά ίσων πλευρών
- ΒΓ κοινή
- $\hat{Β} = \hat{Γ}$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ), άρα $ΒΚ = ΓΛ$ .

**β.** • Επειδή τα τρίγωνα ΒΚΓ και ΓΛΒ είναι ίσα, έχουμε $Κ\hat{Β}Γ = Λ\hat{Γ}Β$ .

Οπότε το τρίγωνο ΘΒΓ είναι ισοσκελές, άρα $ΘΒ = ΘΓ$ .

- Τα τρίγωνα ΑΒΘ και ΑΘΓ έχουν:
  - $ΑΒ = ΑΓ$
  - ΑΘ κοινή
  - $ΘΒ = ΘΓ$

Άρα είναι ίσα (ΠΠΠ).

## 56 Θέμα 2 - 1749

**Θεωρούμε δυο σημεία Α και Β τα οποία βρίσκονται στο ίδιο μέρος ως προς μια ευθεία ε , τέτοια ώστε η ευθεία ΑΒ δεν είναι κάθετη στην ε . Έστω Α΄ το συμμετρικό του Α ως προς την ευθεία ε .**

**α. Αν η Α΄Β τέμνει την ευθεία ε στο σημείο Ο, να αποδείξετε ότι:**

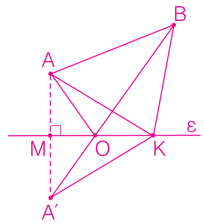
**i. Η ευθεία ε διχοτομεί τη γωνία $Α\hat{Ο}Α'$ .**

**ii. Οι ημιευθείες ΟΑ και ΟΒ σχηματίζουν ίσες οξείες γωνίες με την ευθεία ε .**

**β. Αν Κ είναι ένα άλλο σημείο πάνω στην ευθεία ε , να αποδείξετε ότι:**

**i. $ΚΑ = ΚΑ'$** **ii. $ΚΑ + ΚΒ > ΑΟ + ΟΒ$**

**Λύση**




**α. i.** Στο τρίγωνο $OAA'$ η $OM$ είναι ύψος και διάμεσος, οπότε είναι και διχοτόμος.

**ii.** Η $OM$ είναι διχοτόμος στο τρίγωνο $OAA'$, οπότε $A\hat{O}M = M\hat{O}A'$.

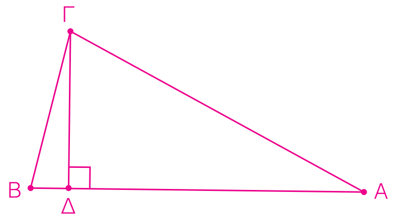
Είναι $M\hat{O}A' = K\hat{O}B$, ως κατακορυφήν, οπότε $A\hat{O}M = K\hat{O}B$.

**β. i.** Επειδή η ευθεία $\varepsilon$ είναι η μεσοκάθετος του τμήματος $AA'$, έχουμε $KA = KA'$.

**ii.** Από την τριγωνική ανισότητα $\overset{\Delta}{KA'B}$ έχουμε

$KA' + KB > A'B \Leftrightarrow KA + KB > OA' + OB \Leftrightarrow KA + KB > OA + OB$.

## 57 Θέμα 2 - 13844




**Στο διπλανό σχήμα ισχύει ότι $B\Delta < A\Delta$, και $A\hat{\Delta}\Gamma = 90^o$.**

**α. Να αποδείξετε ότι $A\Gamma > B\Gamma$.**

**β. Ποια είναι η μικρότερη γωνία του τριγώνου ΑΒΓ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.**

**Λύση**

**α.** Από το σημείο Γ που είναι εκτός της ευθείας ΑΒ έχουμε το κάθετο τμήμα ΓΔ και τα πλάγια τμήματα ΓΒ και ΓΑ.

Είναι $A\Delta > B\Delta$, οπότε $A\Gamma > B\Gamma$.

**β.** Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $A\Gamma > B\Gamma$, οπότε ομοίως άνισες είναι και οι απέναντι γωνίες, άρα $\hat{B} > \hat{A}$.

Επιπλέον, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ, οπότε $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, άρα $\hat{\Gamma} > \hat{A}$

Επομένως η μικρότερη γωνία του τριγώνου ΑΒΓ είναι η $\hat{A}$.

# 11. Ευθεία και κύκλος

## 58 Θέμα 2 - 13759

**Δίνεται κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα $\rho = 6$. Έστω d η απόσταση του κέντρου Ο του κύκλου από μια ευθεία (ε). Να βρείτε τη σχετική θέση του κύκλου και της ευθείας (ε) στις εξής περιπτώσεις:**

**α. $d = 3$.**

**β. $d = 6$.**

**γ. $d = 9$.**

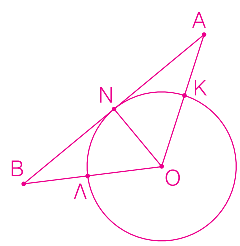
**Λύση**

**α.** Επειδή η απόσταση $d = 3$ του κέντρου από την ευθεία (ε) είναι μικρότερη από την ακτίνα $\rho = 6$ του κύκλου, η ευθεία (ε) έχει δύο κοινά σημεία με τον κύκλο, δηλαδή είναι τέμνουσα του κύκλου.

**β.** Επειδή η απόσταση $d = 6$ του κέντρου από την ευθεία (ε) είναι ίση με την ακτίνα $\rho = 6$ του κύκλου, η ευθεία (ε) έχει ένα κοινό σημείο με τον κύκλο, δηλαδή είναι εφαπτόμενη του κύκλου.

**γ.** Επειδή η απόσταση $d = 9$ του κέντρου από την ευθεία (ε) είναι μεγαλύτερη από την ακτίνα $\rho = 6$ του κύκλου, η ευθεία (ε) δεν έχει κοινά σημεία με τον κύκλο, δηλαδή είναι εξωτερική του κύκλου.

## 59 Θέμα 2 - 1676




**Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Σε σημείο Ν του κύκλου φέρουμε την εφαπτόμενή του, και εκατέρωθεν του Ν θεωρούμε σημεία Α και Β, τέτοια ώστε $NA = NB$. Οι ΟΑ και ΟΒ τέμνουν τον κύκλο στα Κ και Λ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:**

**α. Το τρίγωνο ΑΟΒ είναι ισοσκελές.**

**β. Το σημείο Ν είναι μέσο του τόξου ΚΛ.**

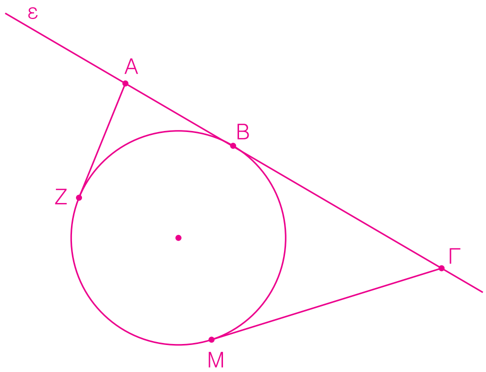
**Λύση**

Στο τρίγωνο $OAB$ το $ON$ είναι το ύψος και διάμεσος, οπότε:

**α.** το τρίγωνο $AOB$ είναι ισοσκελές

**β.** η $ON$ είναι διχοτόμος της $K\hat{O}\Lambda$, άρα $N\hat{O}\Lambda = N\hat{O}K$, οπότε και τα αντίστοιχα τόξα είναι ίσα, δηλαδή $\overset{\frown}{N\Lambda} = \overset{\frown}{NK}$.

## 60 Θέμα 2 - 13817




**Δίνεται κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Σε σημείο Β του κύκλου φέρουμε εφαπτόμενη ευθεία (ε). Θεωρούμε στην ευθεία (ε) δύο σημεία Α και Γ εκατέρωθεν του Β έτσι ώστε $BA < B\Gamma$ και από τα σημεία αυτά, φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΑΖ και ΓΜ στον κύκλο.**

**α.** **Να γράψετε τα ευθύγραμμα τμήματα τα οποία είναι ίσα, αιτιολογώντας την απάντησή σας.**

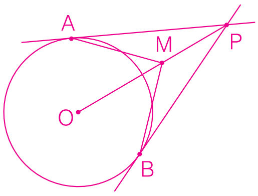
**β.** **Να αποδείξετε ότι $A\Gamma = AZ + M\Gamma$.**

**Λύση**

**α.** Τα ευθύγραμμα τμήματα $AB$ και $AZ$ είναι εφαπτόμενα στον κύκλο από σημείο εκτός αυτού, άρα $AB = AZ$.
Όμοια τα ευθύγραμμα τμήματα $\Gamma B$, $\Gamma M$ είναι εφαπτόμενα τμήματα, άρα $\Gamma B = \Gamma M$.

**β.** Από το ερώτημα **α.** έχουμε $A\Gamma = AB + B\Gamma = AZ + M\Gamma$.

## 61 Θέμα 2 - 1617




**Από εξωτερικό σημείο $P$ ενός κύκλου $(O, \rho)$ φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα $PA$ και $PB$. Αν $M$ είναι ένα τυχαίο εσωτερικό σημείο του ευθυγράμμου τμήματος $OP$, να αποδείξετε ότι:**

**α.** **τα τρίγωνα $PAM$ και $PMB$ είναι ίσα**

**β.** **οι γωνίες $M\hat{A}O$ και $M\hat{B}O$ είναι ίσες.**

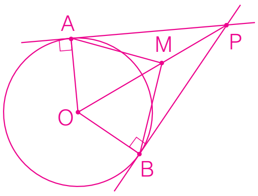
**Λύση**

**α.** Τα τρίγωνα $PAM$ και $PMB$ έχουν:

- $PA = PB$, αφού τα $PA$, $PB$ είναι εφαπτόμενα τμήματα
- $PM$ κοινή
- $O\hat{P}A = O\hat{P}B$, αφού η διακεντρική ευθεία $PO$ διχοτομεί τη γωνία $A\hat{P}B$.

Οπότε είναι ίσα.

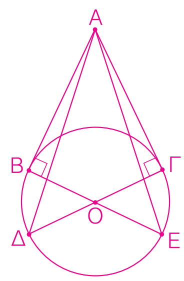
**β.** Από το **α.** ερώτημα προκύπτει $M\hat{A}P = M\hat{B}P$.




Είναι $O\hat{A}P = O\hat{B}P = 90^{o}$, αφού οι ακτίνες που καταλήγουν στα σημεία επαφής είναι κάθετες στις εφαπτόμενες.

Οπότε $M\hat{A}O = M\hat{B}O$, ως διαφορές ίσων γωνιών.

## 62 Θέμα 2 - 1684




**Έστω κύκλος με κέντρο $O$ και ακτίνα $\rho$. Από σημείο $A$ εκτός του κύκλου, φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα $AB$ και $A\Gamma$. Τα σημεία $E$ και $\Delta$ είναι τα αντιδιαμετρικά σημεία των $B$ και $\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:**

**α.** **Τα τρίγωνα $ABE$ και $A\Gamma\Delta$ είναι ίσα.**

**β.** **Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ είναι ίσα.**

**Λύση**

**α.** Τα τρίγωνα $ΑΒΕ$ και $ΑΓΔ$ είναι ορθογώνια $(\hat{Β} = \hat{Γ} = 90^{o})$ και έχουν:

- $ΑΒ = ΑΓ$ , ως εφαπτόμενα τμήματα
- $ΒΕ = ΓΔ = 2ρ$

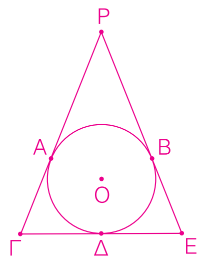
Άρα είναι ίσα.

**β.** Είναι $Β\hat{Ο}Δ = Γ\hat{Ο}Ε$ , άρα $ΒΔ = ΓΕ$ .

Τα τρίγωνα $ΒΑΔ$ και $ΑΓΕ$ έχουν:
- $ΑΒ = ΑΓ$
- $ΑΔ = ΑΕ$ , αφού τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΓΔ είναι ίσα
- $ΒΔ = ΕΓ$

Οπότε είναι ίσα.

## 63 Θέμα 2 - 1751




**Έστω ότι ο κύκλος $(Ο, ρ)$ εφάπτεται των πλευρών του τριγώνου $ΡΓΕ$ στα σημεία $Α$, $Δ$ και $Β$ .**

**α. Να αποδείξετε ότι:**

**i. $ΡΓ = ΓΔ + ΑΡ$**

**ii. $ΡΓ - ΓΔ = ΡΕ - ΔΕ$**

**β. Αν $ΑΓ = ΒΕ$ , να αποδείξετε ότι:**

**i. Το τρίγωνο $ΡΓΕ$ είναι ισοσκελές.**

**ii. Τα σημεία $Ρ$ , $Ο$ και $Δ$ είναι συνευθειακά.**

**Λύση**

**α.** Επειδή τα εφαπτόμενα τμήματα είναι ίσα, έχουμε:

$ΡΑ = ΡΒ$ , $ΑΓ = ΓΔ$ και $ΕΒ = ΕΔ$ . Οπότε:

**i.** $ΡΓ = ΓΑ + ΑΡ = ΓΔ + ΑΡ$

**ii.** $ΡΓ - ΓΔ \overset{α.}{=} ΓΔ + ΑΡ - ΓΔ = ΑΡ = ΒΡ = ΡΕ - ΒΕ = ΡΕ - ΔΕ$

**β.** Είναι:

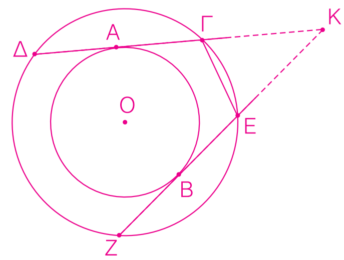
**i.** $ΡΓ = ΡΑ + ΑΓ = ΡΒ + ΒΕ = ΡΕ$ . Οπότε το τρίγωνο $ΡΓΕ$ είναι ισοσκελές.

**ii.** • $ΟΔ \perp ΓΕ$ , αφού $ΓΕ$ εφαπτομένη και $ΟΔ$ ακτίνα

• $ΡΔ \perp ΓΕ$ , αφού το τρίγωνο $ΡΓΕ$ είναι ισοσκελές και $ΡΔ$ διάμεσος γιατί $ΑΓ = ΒΕ \Rightarrow ΓΔ = ΔΕ$ , οπότε το $ΡΔ$ είναι και ύψος.

Άρα οι ευθείες $ΟΔ$ και $ΡΔ$ ταυτίζονται, οπότε τα $Ρ$ , $Ο$ και $Δ$ είναι συνευθειακά.

## 64 Θέμα 2 - 1667

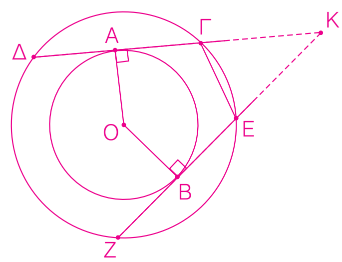



**Δίνονται δύο ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο $Ο$ και ακτίνες $ρ$ και $R$ $(ρ < R)$ . Οι χορδές $ΔΓ$ και $ΖΕ$ του κύκλου $(Ο, R)$ εφάπτονται του κύκλου $(Ο, ρ)$ στα σημεία $Α$ και $Β$ αντίστοιχα.**

**α. Να αποδείξετε ότι $ΔΓ = ΖΕ$ .**

**β. Αν οι $ΔΓ$ και $ΖΕ$ προεκτεινόμενες τέμνονται στο σημείο $Κ$ , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $ΚΕΓ$ είναι ισοσκελές.**

**Λύση**




**α.** Οι ακτίνες $ΟΑ$ , $ΟΒ$ είναι κάθετες στις εφαπτόμενες $ΓΔ$ και $ΕΖ$ του κύκλου $(ο, ρ)$, οπότε $ΟΑ \perp ΓΔ$ και $ΟΒ \perp ΕΖ$ . Επομένως τα $ΟΑ, ΟΒ$ είναι αποστήματα των χορδών $ΔΓ$, $ΖΕ$ του κύκλου $(Ο, R)$ και είναι ίσα, αφού $ΟΑ = ΟΒ = ρ$ . Άρα οι αντίστοιχες χορδές είναι ίσες, οπότε $ΔΓ = ΖΕ$ .

**β.** Είναι:
- $ΚΑ = ΚΒ$ , ως εφαπτόμενα τμήματα
- $ΑΓ = ΒΕ$ , ως μισά των ίσων τμημάτων $ΔΓ$ , $ΖΕ$

Οπότε $ΚΓ = ΚΕ$ , ως διαφορά ίσων τμημάτων.

## 65 Θέμα 2 - 13758

**Δίνονται δύο κύκλοι $(K, 3)$ και $(\Lambda, 8)$. Να βρείτε τη σχετική θέση των δύο κύκλων, αιτιολογώντας την απάντησή σας, όταν:**

**α.** $K\Lambda = 13$.

**β.** $K\Lambda = 2$.

**γ.** $K\Lambda = 5$.

**δ.** $K\Lambda = 11$.

**ε.** $K\Lambda = 9$.

**Λύση**

Έστω $R = 8$ και $\rho = 3$, οπότε $R - \rho = 8 - 3 = 5$ και $R + \rho = 8 + 3 = 11$.

**α.** Είναι $K\Lambda = 13$, οπότε $K\Lambda > R + \rho$, άρα ο κύκλος $(\Lambda, 8)$ βρίσκεται στο εξωτερικό του κύκλου $(K, 3)$.

**β.** Είναι $K\Lambda = 2$, οπότε $K\Lambda < R - \rho$, άρα ο κύκλος $(K, 3)$ βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου $(\Lambda, 8)$.

**γ.** Είναι $K\Lambda = 5$, οπότε $K\Lambda = R - \rho$, άρα οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά.

**δ.** Είναι $K\Lambda = 11$, οπότε $K\Lambda = R + \rho$, άρα οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.

**ε.** Είναι $K\Lambda = 9$, οπότε $R - \rho < K\Lambda < R + \rho$, άρα οι κύκλοι τέμνονται.

## 66 Θέμα 2 - 13757

**Δίνονται δύο κύκλοι $(K, 2)$ και $(\Lambda, 5)$.**

**α. Να υπολογίσετε το μήκος της διακέντρου ΚΛ, αν οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.**

**β. Να υπολογίσετε το μήκος της διακέντρου ΚΛ, αν οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά.**

**γ. Μεταξύ ποιών τιμών βρίσκεται το μήκος της διακέντρου ΚΛ, αν ο κύκλος $(K, 2)$ βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου $(\Lambda, 5)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.**

**δ. Μεταξύ ποιών τιμών βρίσκεται το μήκος της διακέντρου ΚΛ, αν οι κύκλοι τέμνονται; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.**

**Λύση**

Έστω $R = 5$ και $\rho = 2$.

**α.** Αν οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά, τότε για τη διάκεντρο $K\Lambda$ έχουμε :

$K\Lambda = R + \rho = 5 + 2 = 7$

**β.** Αν οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά, τότε:

$K\Lambda = R - \rho = 5 - 2 = 3$

**γ.** Για να είναι ο κύκλος $(K, 2)$ στο εσωτερικό του κύκλου $(\Lambda, 5)$ θα πρέπει

$K\Lambda < R - \rho \Leftrightarrow K\Lambda < 5 - 2 \Leftrightarrow K\Lambda < 3$

**δ.** Για να τέμνονται οι κύκλοι θα πρέπει $R - \rho < K\Lambda < R + \rho \Leftrightarrow 5 - 2 < K\Lambda < 5 + 2 \Leftrightarrow 3 < K\Lambda < 7$.

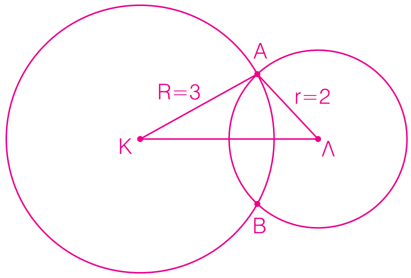
## 67 Θέμα 2 - 12417

**Έστω δύο κύκλοι $(K, R)$ και $(\Lambda, r)$, με $R = 3$, $r = 2$ και $K\Lambda = 4$. Να αποδείξετε ότι:**

**α. Οι κύκλοι $(K, R)$ και $(\Lambda, r)$ τέμνονται σε δύο σημεία, έστω Α και Β.**

**β.** $K\hat{A}\Lambda > A\hat{\Lambda}K$.

**Λύση**




**α.** Για τους κύκλους $(K\,,R)$ και $(\Lambda\,,r)$ , έχουμε $K\Lambda=4$ , $R+r=5$ και $R-r=1$.

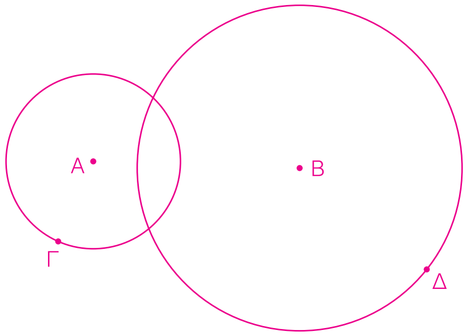
Άρα $R-r<K\Lambda<R+r$ , οπότε οι κύκλοι $(K\,,R)$ και $(\Lambda\,,r)$ τέμνονται σε δύο σημεία Α και Β.

**β.** Στο τρίγωνο $AK\Lambda$ είναι $K\Lambda>AK$ , αφού $K\Lambda=4$ και $AK=R=3$.

Οπότε, οι απέναντι γωνίες $K\hat{A}\Lambda$ και $A\hat{\Lambda}K$ των άνισων πλευρών $K\Lambda$ και $AK$ αντίστοιχα, θα είναι ομοίως άνισες.

Δηλαδή, $K\hat{A}\Lambda>A\hat{\Lambda}K$ .

## 68 Θέμα 2 - 13836

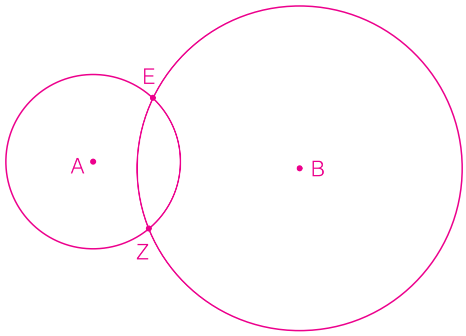



**α.** **Στο διπλανό σχήμα για τους κύκλους $(A\,,\rho)$ και $(B\,,R)$ ισχύει $\rho<R$.**

**Να αποδείξετε ότι $B\Delta-A\Gamma<AB<A\Gamma+B\Delta$.**

**β.** **Ο χάρτης ενός κρυμμένου θησαυρού έχει δύο σταθερά σημεία Α και Β, τα οποία απέχουν μεταξύ τους 6. Επίσης γράφει ότι ο θησαυρός είναι κρυμμένος σε ένα σημείο το οποίο απέχει 3 από το Α του χάρτη και 5 από το Β του χάρτη. Ποια είναι τα σημεία του χάρτη στα οποία μπορεί να είναι κρυμμένος ο θησαυρός;**

**Λύση**

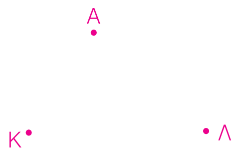



**α.** Οι κύκλοι είναι τεμνόμενοι, άρα
$R-\rho<AB<R+\rho\Leftrightarrow B\Delta-A\Gamma<AB<B\Delta+A\Gamma$ .

**β.** Ο θησαυρός είναι σημείο του κύκλου $(A,\rho)$ και του κύκλου $(B,R)$ με $\rho=3$ και $R=5$. Είναι
$AB=6$, $R-\rho=2$ και $R+\rho=8$, οπότε $R-\rho<AB<R+\rho$.

Επομένως οι κύκλοι είναι τεμνόμενοι οπότε έχουν δύο κοινά σημεία τα Ε και Ζ. Αυτά τα σημεία είναι τα σημεία που μπορεί να κρύβεται ο θησαυρός.

## 69 Θέμα 2 - 13835

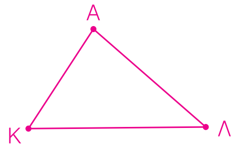



**Τα σημεία Α, Κ και Λ δε βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Το σημείο Α απέχει 4 από το Κ και 5 από το Λ.**

**α.** **Να αποδείξετε ότι $1<K\Lambda<9$.**

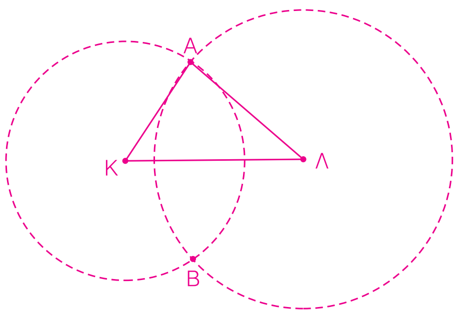
**β.** **Να βρείτε ένα σημείο Β του επιπέδου διαφορετικό από το Α, που να απέχει 4 από το Κ και 5 από το Λ.**

**Λύση**




**α.** Τα τρία μη συνευθειακά σημεία Α, Κ και Λ ορίζουν το τρίγωνο ΑΚΛ. Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε $A\Lambda-AK<K\Lambda<A\Lambda+AK\Leftrightarrow 5-4<K\Lambda<5+4\Leftrightarrow 1<K\Lambda<9$.

**β.** Το ζητούμενο σημείο είναι σημείο του κύκλου (Κ, 4) και του κύκλου (Λ, 5). Από το **α.** ερώτημα για τη διάκεντρο των κύκλων έχουμε ότι:




$A\Lambda-AK<K\Lambda<A\Lambda+AK$ ή $R-\rho<K\Lambda<R+\rho$, όπου R είναι η ακτίνα του κύκλου με κέντρο το Λ και ρ είναι η ακτίνα του κύκλου με κέντρο το Κ. Άρα οι κύκλοι τέμνονται σε δύο σημεία. Το ένα είναι το Α και το άλλο είναι το Β, που είναι και το ζητούμενο σημείο.

## 70 Θέμα 4 - 1752

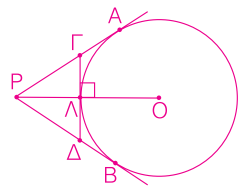
**Θεωρούμε κύκλο κέντρου $Ο$ και εξωτερικό σημείο του $Ρ$. Από το $Ρ$ φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα $ΡΑ$ και $ΡΒ$. Η διακεντρική ευθεία $ΡΟ$ τέμνει τον κύκλο στο σημείο $Λ$. Η εφαπτόμενη του κύκλου στο $Λ$ τέμνει τα $ΡΑ$ και $ΡΒ$ στα σημεία $Γ$ και $Δ$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:**

**α.** **το τρίγωνο $ΡΓΔ$ είναι ισοσκελές**

**β.** **$ΓΑ = ΔΒ$**

**γ.** **η περίμετρος του τριγώνου $ΡΓΔ$ είναι ίση με $ΡΑ + ΡΒ$.**

**Λύση**



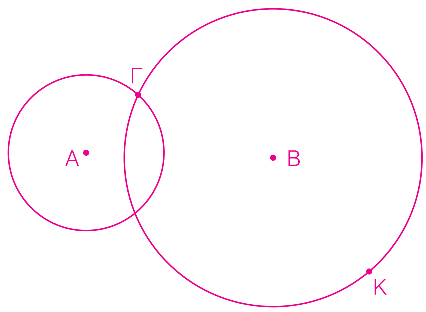

**α.** Η $ΡΟ$ είναι διακεντρική ευθεία, οπότε είναι διχοτόμος της $Α\hat{Ρ}Β$.
Η ακτίνα ΟΛ είναι κάθετη στην εφαπτόμενη $ΓΔ$, άρα $ΟΛ \perp ΓΔ$, οπότε $ΟΡ \perp ΓΔ$.
Στο τρίγωνο $ΡΓΔ$ το $ΡΛ$ είναι ύψος και διχοτόμος του, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

**β.** Είναι:
- $ΡΑ = ΡΒ$, ως εφαπτόμενα τμήματα
- $ΡΓ = ΡΔ$, αφού το τρίγωνο $ΡΓΔ$ είναι ισοσκελές

Οπότε και $ΑΓ = ΒΔ$, ως διαφορές ίσων τμημάτων.

**γ.** Είναι $ΓΑ = ΓΛ$ και $ΔΒ = ΔΛ$, ως εφαπτόμενα τμήματα.
Η περίμετρος του τριγώνου $ΡΓΔ$ είναι $Π = ΡΓ + ΡΔ + ΓΔ = ΡΓ + ΡΔ + ΓΛ + ΛΔ = ΡΓ + ΡΔ + ΓΑ + ΔΒ = ΡΑ + ΡΒ$.

## 71 Θέμα 4 - 13823




**α.** **Στο διπλανό σχήμα για τους κύκλους $(Α, ρ)$ και $(Β, R)$ ισχύει $ρ < R$ και $ΑΒ = 6$.**

**i.** **Να αποδείξετε ότι $ΒΚ - ΑΓ < ΑΒ < ΒΚ + ΑΓ$.**

**ii.** **Παρακάτω γράφονται οι ιδιότητες 1 και 2. Ποιο σημείο από τα Κ και Γ έχει την ιδιότητα 1, ποιο την ιδιότητα 2 και ποιο έχει και τις δύο;**

**Ιδιότητα 1: «Το σημείο απέχει R από το Β.»**

**Ιδιότητα 2: «Το σημείο απέχει ρ από το Α.»**

**Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.**

**β.** **Ο χάρτης ενός κρυμμένου θησαυρού έχει δύο σταθερά σημεία Α και Β, τα οποία απέχουν μεταξύ τους 6. Επίσης γράφει ότι ο θησαυρός είναι κρυμμένος σε ένα σημείο το οποίο απέχει 3 από το Α του χάρτη και 2 από το Β του χάρτη. Μπορεί να είναι σωστή η πληροφορία που δίνει ο χάρτης για να βρει κανείς το θησαυρό;**

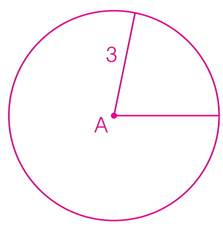
**Λύση**

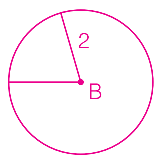
**α. i.** Οι κύκλοι είναι τεμνόμενοι.

Άρα $R - ρ < δ < R + ρ \Leftrightarrow ΒΚ - ΑΓ < ΑΒ < ΒΚ + ΑΓ$.

**ii.** Το σημείο $Κ$ έχει μόνο την ιδιότητα 1, γιατί είναι σημείο του κύκλου $(Β, R)$ και όχι του κύκλου $(Α, ρ)$.

Το σημείο $Γ$ έχει και τις δύο ιδιότητες γιατί είναι σημείο και των δύο κύκλων, δηλαδή απέχει $ρ$ από το $Α$ και $R$ από το $Β$.




**β.** Έστω $Α$ και $Β$ τα δύο σημεία του χάρτη.

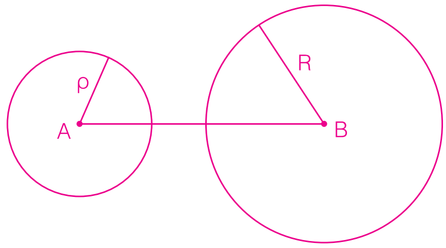
Το σημείο του θησαυρού ανήκει σε ένα κύκλο κέντρου $Α$ και ακτίνας $3$ και σε κύκλο κέντρου $Β$ και ακτίνας $2$, οπότε θα είναι το σημείο τομής των δύο αυτών κύκλων, αν υπάρχει.

Είναι $ΑΒ = 6$, $R + ρ = 5$, οπότε $ΑΒ > R + ρ$. Άρα οι κύκλοι δεν έχουν κοινά σημεία και μάλιστα ο ένας είναι εξωτερικός του άλλου.

Επομένως η οδηγία δεν είναι σωστή, γιατί δεν υπάρχει σημείο του επιπέδου (άρα και του χάρτη) για το οποίο να ισχύει αυτό που περιγράφει η οδηγία.

## 72 Θέμα 4 - 13846

**Δίνεται το διπλανό σχήμα με τους κύκλους $(A\,,\rho)$ και $(B\,,R)$ με $R>\rho$ . Επίσης $AB=9$ .**




**α. Να αποδείξετε ότι $R+\rho<9$ .**

**β. Να σχεδιάσετε ένα τρίγωνο ΚΛΜ με ΚΛ να είναι ίση με ρ και η πλευρά ΛΜ να είναι ίση με R. Να περιγράψετε τον τρόπο που το σχεδιάσατε και να αποδείξετε ότι η τρίτη πλευρά του είναι μικρότερη από 9.**

**γ. Έστω το τρίγωνο ΚΛΜ που σχεδιάσατε στο β. ερώτημα. Πόσα σημεία του επιπέδου έχουν και τις δύο ιδιότητες Ι1 και Ι2 που περιγράφονται παρακάτω;**

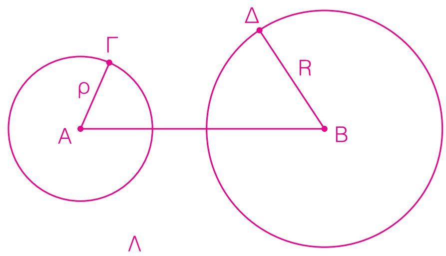
**Ι1: «Η απόσταση των σημείων από το Κ είναι ίση με ρ».**

**Ι2: «Η απόσταση των σημείων από το Μ είναι ίση με R».**

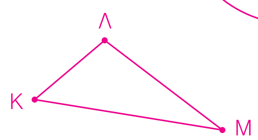
**Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.**

**Λύση**

**α.** Ο ένας κύκλος είναι εξωτερικός του άλλου άρα $R+\rho<AB \Leftrightarrow R+\rho<9$ .




**β.** Έστω Γ σημείο του κύκλου με κέντρο Α και ακτίνα ρ και Δ σημείο του κύκλου με κέντρο Β και ακτίνα R, όπως στο παρακάτω σχήμα. Με το διαβήτη «μεταφέρουμε» τα ΑΓ = ρ και ΒΔ = Κ έτσι ώστε να σχηματίζονται τα ευθύγραμμα τμήματα ΚΛ και ΛΜ. Στη συνέχεια σχεδιάζουμε και την ΚΜ.

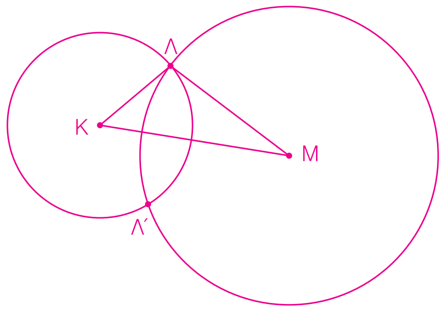



Από την τριγωνική ανισότητα για το τρίγωνο ΚΛΜ έχουμε ότι

$$\Lambda M-K\Lambda<KM<\Lambda M+K\Lambda \Rightarrow R-\rho<KM<R+\rho \Rightarrow KM<9 .$$

Δηλαδή η τρίτη πλευρά του τριγώνου είναι μικρότερη από 9.

**γ.** Έστω το τρίγωνο ΚΛΜ που έχουμε σχεδιάσει. Τα σημεία του επιπέδου που έχουν την ιδιότητα Ι1 είναι τα σημεία του κύκλου με κέντρο Κ και ακτίνα ρ, ενώ τα σημεία του επιπέδου που έχουν την ιδιότητα Ι2 είναι τα σημεία του κύκλου με κέντρο Μ και ακτίνα R. Επομένως, τα σημεία του επιπέδου που έχουν και τις δύο ιδιότητες Ι1 και Ι2 είναι εκείνα που βρίσκονται και στους δύο αυτούς κύκλους. Δηλαδή είναι τα κοινά σημεία των δύο κύκλων.

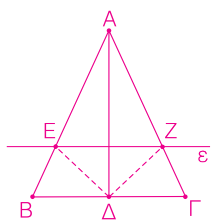



Είναι $R-\rho<KM<R+\rho$, επομένως οι κύκλοι είναι τεμνόμενοι και έχουν δύο σημεία τομής. Άρα δύο είναι τα σημεία του επιπέδου που έχουν και τις δύο ιδιότητες: τα σημεία τομής των κύκλων (Κ, ρ) και (Μ, R), δηλαδή τα Λ και Λ'.

# 14. Παράλληλες ευθείες

## 73 Θέμα 2 - 1544

**Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB=A\Gamma)$ φέρουμε τη διχοτόμο ΑΔ και μια ευθεία ε παράλληλη προς την ΒΓ , που τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:**




**α. Το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ισοσκελές.**

**β. Τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΑΖΔ είναι ίσα.**

**Λύση**

**α.** Επειδή $EZ//B\Gamma$ , έχουμε $\hat{B}=Z\hat{E}A$ και $\hat{\Gamma}=E\hat{Z}A$ , ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη .

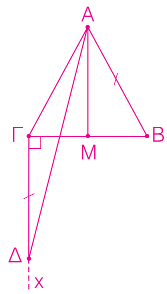
Είναι $\hat{B}=\hat{\Gamma}$ , οπότε $Z\hat{E}A=E\hat{Z}A$ . Άρα το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ισοσκελές.

**β.** Τα τρίγωνα $ΑΕΔ$ και $ΑΖΔ$ έχουν:

- $ΑΕ = ΑΖ$ , αφού το τρίγωνο $ΑΕΖ$ είναι ισοσκελές
- $ΑΔ$ κοινή
- $Ε\hat{Α}Δ = Δ\hat{Α}Ζ$ , αφού $ΑΔ$ διχοτόμος

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ).

## 74 Θέμα 2 - 1595




**Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ $(ΑΒ = ΑΓ)$ και η διάμεσός του $ΑΜ$ . Φέρουμε ημιευθεία $Γx \perp ΒΓ$ προς το ημιεπίπεδο που δεν ανήκει το $Α$ και παίρνουμε σε αυτήν τμήμα $ΓΔ = ΑΒ$ . Να αποδείξετε ότι:**

**α. Η γωνία $Δ\hat{Α}Γ$ είναι ίση με τη γωνία $Γ\hat{Δ}Α$ .**

**β. Η $ΑΔ$ είναι διχοτόμος της γωνίας $Μ\hat{Α}Γ$ .**

**Λύση**

**α.** Είναι $ΑΒ = ΑΓ$ και $ΓΔ = ΑΒ$, οπότε $ΑΓ = ΓΔ$ .

Άρα $Δ\hat{Α}Γ = Γ\hat{Δ}Α$ .

**β.** • Επειδή το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελές και η $ΑΜ$ είναι διάμεσος, θα είναι και ύψος.

Είναι $Γx \perp ΒΓ$ και $ΑΜ \perp ΒΓ$ , οπότε $Γx // ΑΜ$ .

Επομένως $Γ\hat{Δ}Α = Δ\hat{Α}Μ$ , ως εντός εναλλάξ.

• Από το **α.** ερώτημα έχουμε $Δ\hat{Α}Γ = Γ\hat{Δ}Α$ .

Άρα $Δ\hat{Α}Μ = Δ\hat{Α}Γ$ , οπότε η $ΑΔ$ είναι η διχοτόμος της $Μ\hat{Α}Γ$ .

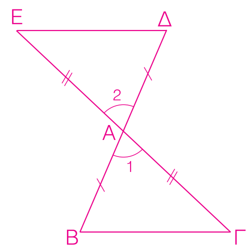
## 75 Θέμα 2 - 1597

**Στις προεκτάσεις των πλευρών $ΒΑ$ (προς το $Α$ ) και $ΓΑ$ (προς το $Α$ ) τριγώνου $ΑΒΓ$ παίρνουμε τα τμήματα $ΑΔ = ΑΒ$ και $ΑΕ = ΑΓ$ . Να αποδείξετε ότι:**

**α. Τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΑΔΕ$ είναι ίσα.**

**β. $ΕΔ // ΒΓ$**

**Λύση**




**α.** Τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ , $ΑΔΕ$ έχουν:

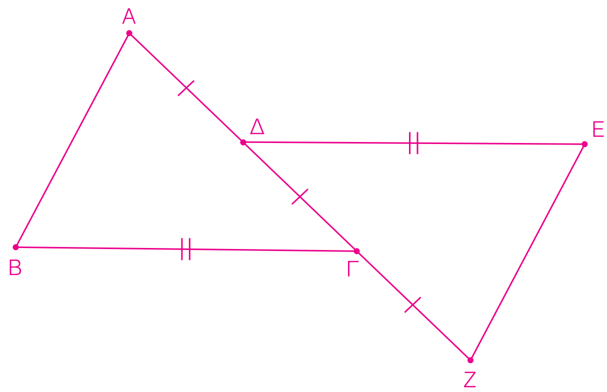
- $ΑΒ = ΑΔ$
- $ΑΓ = ΑΕ$
- $\hat{Α}_1 = \hat{Α}_2$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ).

**β.** Επειδή τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ , $ΑΔΕ$ είναι ίσα, έχουμε $\hat{Β} = \hat{Δ}$ .

Αφού οι εντός εναλλάξ γωνίες είναι ίσες, προκύπτει $ΕΔ // ΒΓ$ .

## 76 Θέμα 2 - 13748

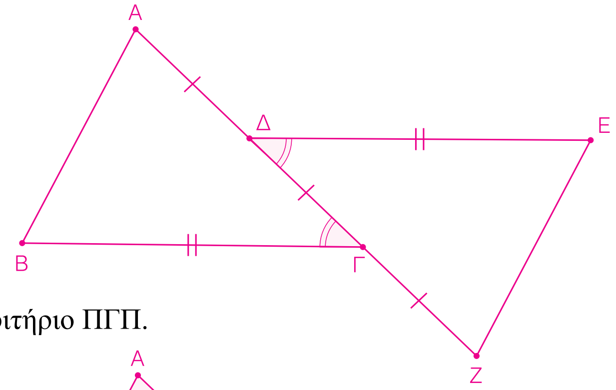



**Σε τρίγωνο $ΑΒΓ$ θεωρούμε το μέσο $Δ$ της πλευράς $ΑΓ$. Φέρουμε τμήμα $ΔΕ$ ίσο και παράλληλο με την πλευρά $ΒΓ$ όπως φαίνεται στο σχήμα. Προεκτείνουμε την $ΑΓ$ προς το μέρος του $Γ$ και παίρνουμε σημείο $Ζ$ τέτοιο ώστε $ΓΖ = ΔΓ$ . Να αποδείξετε ότι:**

**α. Τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΖΕΔ$ είναι ίσα.**

**β. $ΑΒ // ΕΖ$ .**

**Λύση**

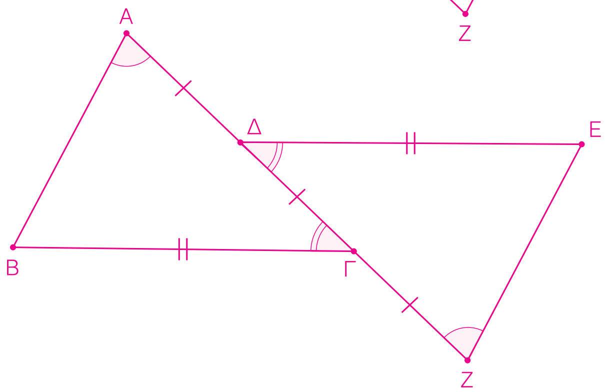



**α.** Είναι $ΔΖ = ΔΓ + ΓΖ = 2ΔΓ = ΑΓ$

Τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΖΕΔ$ έχουν:

- $ΒΓ = ΔΕ$ ,
- $ΑΓ = ΔΖ$ ,
- $Α\hat{Γ}Β = Ζ\hat{Δ}Ε$ , ως γωνίες εντός εναλλάξ.

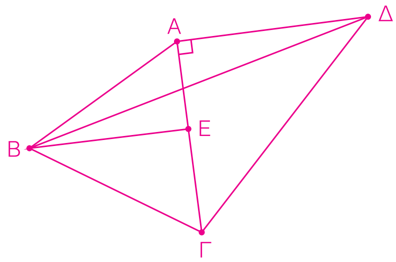
Άρα είναι ίσα γιατί έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες γωνίες στις πλευρές αυτές ίσες από το κριτήριο ΠΓΠ.




**β.** Από την ισότητα των τριγώνων ΑΒΓ και ΖΕΔ, προκύπτει ότι $Β\hat{Α}Γ = Ε\hat{Ζ}Δ$ .

Οι γωνίες αυτές είναι εντός εναλλάξ των $ΑΒ$ και $ΕΖ$ που τέμνονται από την ΑΖ, άρα $ΑΒ // ΕΖ$ .

## 77 Θέμα 2 - 12710




**Δίνεται το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και η διχοτόμος του ΒΕ. Εξωτερικά του τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΓΔ με υποτείνουσα τη ΓΔ έτσι, ώστε τα σημεία Β και Δ να βρίσκονται εκατέρωθεν της ευθείας ΑΓ.**

**Να αποδείξετε ότι:**

**α.** $ΒΕ // ΑΔ$.

**β.** **οι γωνίες ΕΒΔ και ΑΔΒ είναι ίσες.**

**γ.** **το τρίγωνο ΒΑΔ είναι ισοσκελές.**

**Λύση**

**α.** Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο, οπότε η διχοτόμος ΒΕ είναι και ύψος, οπότε $ΒΕ \perp ΑΓ$ .

Το τρίγωνο $ΓΑΔ$ είναι ορθογώνιο στην κορυφή $Α$ , οπότε $ΑΔ \perp ΑΓ$ .

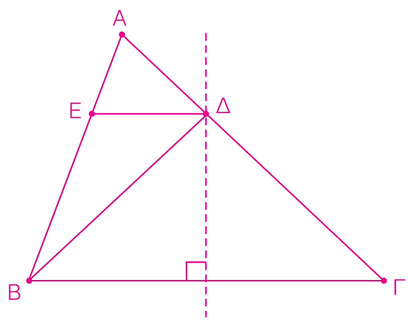
Τα ευθύγραμμα τμήματα $ΒΕ$ και $ΑΔ$ είναι κάθετα στην $ΑΓ$, οπότε $ΒΕ // ΑΔ$ .

**β.** Είναι $Ε\hat{Β}Δ = Α\hat{Δ}Β$ , ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $ΒΕ$ και $ΑΔ$ που τέμνονται από την ΒΔ.

**γ.** Από το ισόπλευρο τρίγωνο $ΑΒΓ$ έχουμε $ΑΒ = ΑΓ = ΒΓ$ και από το ισοσκελές τρίγωνο $ΓΑΔ$ έχουμε $ΑΓ = ΑΔ$ .

Οπότε $ΑΒ = ΑΔ$ , επομένως το τρίγωνο $ΒΑΔ$ είναι ισοσκελές.

## 78 Θέμα 2 - 13534




**Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ < ΑΓ$. Η μεσοκάθετος της πλευράς ΒΓ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Δ και η παράλληλη από το Δ προς τη ΒΓ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:**

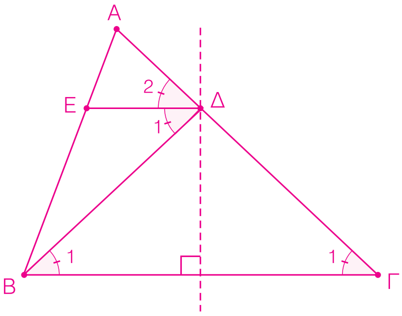
**α.** **το τρίγωνο ΒΓΔ είναι ισοσκελές.**

**β.** **η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $Α\hat{Δ}Β$.**

**Λύση**

**α.** Το σημείο $Δ$ ανήκει στη μεσοκάθετο του τμήματος $ΒΓ$ , άρα ισαπέχει από τα άκρα του, δηλαδή $ΔΒ = ΔΓ$ .

Επομένως το τρίγωνο $ΒΓΔ$ είναι ισοσκελές.

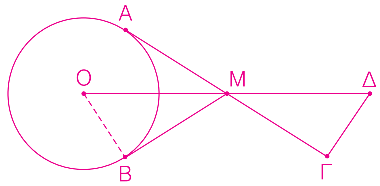



**β.** Είναι:

- $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}$ (1), ως προσκείμενες γωνίες στη βάση ΒΓ του ισοσκελούς τριγώνου ΒΓΔ.
- $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1$ (2), ως εντός εναλλάξ γωνίες
- $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}_2$ (3), ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες

Από τις (1), (2) και (3) προκύπτει ότι $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$, οπότε η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{\Delta}B$.

## 79 Θέμα 2 - 1620




**Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος (O, R) και τα εφαπτόμενα τμήματα ΜΑ και ΜΒ. Προεκτείνουμε την ΑΜ κατά τμήμα ΜΓ = ΜΑ και την ΟΜ κατά τμήμα ΜΔ = ΟΜ.**

**α. Να αποδείξετε ότι ΜΒ = ΜΓ.**

**β. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΟΜΒ και ΜΓΔ είναι ίσα.**

**Λύση**

**α.** Είναι:
- ΜΑ = ΜΒ, ως εφαπτόμενα τμήματα
- ΜΑ = ΜΓ, από υπόθεση

Οπότε ΜΒ = ΜΓ.

**β.** • Η διακεντρική ευθεία ΜΟ διχοτομεί τη γωνία $A\widehat{M}B$, οπότε $A\widehat{M}O = B\widehat{M}O$.

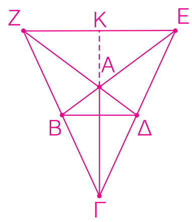
Είναι $\Gamma\widehat{M}\Delta = A\widehat{M}O$, ως κατακορυφήν.

Άρα $\Gamma\hat{M}\Delta = B\hat{M}O$.

• Τα τρίγωνα ΟΜΒ και ΜΓΔ έχουν:
- ΟΜ = ΜΔ
- ΜΒ = ΜΓ
- $B\hat{M}O = \Gamma\hat{M}\Delta$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ).

## 80 Θέμα 4 - 1793




**Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με ΑΒ = ΑΔ και ΓΒ = ΓΔ. Αν Ε το σημείο τομής των προεκτάσεων των ΒΑ και ΓΔ και Ζ το σημείο τομής των προεκτάσεων των ΔΑ και ΓΒ, να αποδείξετε ότι:**

**α. Η ΓΑ είναι διχοτόμος της γωνίας ΒΓΔ.**

**β. ΓΖ = ΓΕ** **γ. ΕΖ // ΒΔ**

**Λύση**

**α.** Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΓ έχουν:
- ΑΒ = ΑΔ
- ΓΒ = ΓΔ
- ΑΓ κοινή.

Οπότε είναι ίσα (ΠΠΠ), άρα $B\hat{\Gamma}A = A\hat{\Gamma}\Delta$.

Επομένως η ΓΑ είναι η διχοτόμος της $B\hat{\Gamma}\Delta$.

**β.** Τα τρίγωνα ΖΑΓ και ΕΑΓ έχουν:
- ΑΓ κοινή
- $Z\hat{\Gamma}A = E\hat{\Gamma}A$, αφού ΓΑ διχοτόμος
- $Z\hat{A}\Gamma = E\hat{A}\Gamma$, ως αθροίσματα των ίσων γωνιών $Z\hat{A}B = E\hat{A}\Delta$ και $B\hat{A}\Gamma = \Delta\hat{A}\Gamma$.

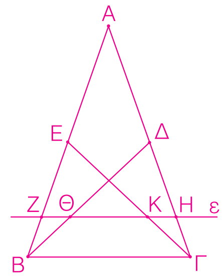
Οπότε είναι ίσα (ΓΠΓ), άρα ΓΖ = ΓΕ.

**γ.** Έστω $K$ το σημείο τομής της $ΓA$ με τη $ZE$.

- Στο ισοσκελές τρίγωνο $ΓBΔ$ η $ΓA$ είναι διχοτόμος του, οπότε είναι και ύψος του, άρα $ΓA \perp BΔ$.
- Στο ισοσκελές τρίγωνο $ΓZE$ το $ΓK$ είναι διχοτόμος του, οπότε και ύψος, επομένως $ΓK \perp ZE$.

Επειδή $ΓK \perp BΔ$ και $ΓK \perp EZ$, έχουμε $EZ // BΔ$.

## 81 Θέμα 4 - 1744




**Στο ισοσκελές τρίγωνο $ABΓ$ $(AB = AΓ)$ φέρουμε τις διαμέσους $BΔ$ και $ΓE$. Μία ευθεία $ε$ παράλληλη στη βάση $BΓ$ τέμνει τις πλευρές $AB$ και $AΓ$ στα $Z$ και $H$ αντίστοιχα και τις διαμέσους $BΔ$ και $ΓE$ στα σημεία $Θ$ και $K$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:**

**α.** $BZ = ΓH$

**β.** **τα τρίγωνα $ZBΘ$ και $HKΓ$ είναι ίσα.**

**γ.** $ZK = HΘ$

**Λύση**

**α.** Είναι:
- $A\hat{Z}H = \hat{B}$ και $A\hat{H}Z = \hat{Γ}$, ως εντός εναλλάξ
- $\hat{B} = \hat{Γ}$, αφού $AB = AΓ$

Οπότε $A\hat{Z}H = A\hat{H}Z$.

Άρα το τρίγωνο $AZH$ είναι ισοσκελές με $AZ = AH$.

Επομένως $BZ = ΓH$, ως διαφορές ίσων τμημάτων.

**β.** Τα τρίγωνα $ABΔ$ και $AΓE$ έχουν:
- $AB = AΓ$
- $AΔ = AE$, ως μισά ίσων τμημάτων
- $\hat{A}$ κοινή

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ), οπότε $Z\hat{B}Θ = H\hat{Γ}K$.

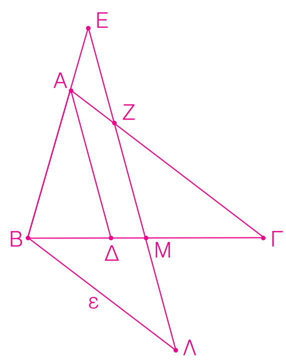
Τα τρίγωνα $ZBΘ$ και $HKΓ$ έχουν:
- $ZB = HΓ$
- $Z\hat{B}Θ = H\hat{Γ}K$
- $B\hat{Z}Θ = K\hat{H}Γ$, ως παραπληρωματική ίσων γωνιών

Άρα είναι ίσα.

**γ.** Επειδή τα τρίγωνα $ZBΘ$, $HKΓ$ είναι ίσα, έχουμε $ZΘ = KH$.

Οπότε $ZK = ZΘ + ΘK = KH + ΘK = HΘ$.

## 82 Θέμα 4 - 1818




**Δίνεται τρίγωνο $ABΓ$ με $AB < AΓ$, η διχοτόμος του $AΔ$ και η ευθεία $ε$ παράλληλη από το $B$ προς την $AΓ$. Από το μέσο $M$ της $BΓ$ φέρουμε ευθεία παράλληλη στην $AΔ$ η οποία τέμνει την $AΓ$ στο σημείο $Z$, την ευθεία $ε$ στο σημείο $Λ$ και την προέκταση της $BA$ στο σημείο $E$.**

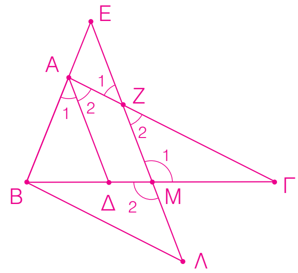
**Να αποδείξετε ότι:**

**α.** **Τα τρίγωνα $AEZ$ και $BΛE$ είναι ισοσκελή.**

**β.** $BΛ = ΓZ$

**γ.** $AE = AΓ - BΛ$

**Λύση**




**α.** Είναι $\widehat{A}_1 = A_2$ , αφού ΑΔ διχοτόμος.

Έχουμε:
- $\widehat{A}_1 = \widehat{E}$ , ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη
- $\widehat{A}_2 = \widehat{Z}_1$ , ως εντός εναλλάξ

Οπότε $\widehat{E} = \widehat{Z}_1$ , άρα το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ισοσκελές.

Είναι:
- $\widehat{E} = Z_1$ και $\widehat{Z}_1 = \widehat{Z}_2$ άρα $\widehat{E} = \widehat{Z}_2$
- $\widehat{Z}_2 = \widehat{\Lambda}$ , ως εντός εναλλάξ

Οπότε $\widehat{E} = \widehat{\Lambda}$ , άρα το τρίγωνο ΒΛΕ είναι ισοσκελές.

**β.** Τα τρίγωνα ΒΜΛ , ΜΓΖ έχουν:
- $MB = M\Gamma$
- $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$
- $\widehat{\Gamma} = M\widehat{B}\Lambda$ , ως εντός εναλλάξ

Οπότε είναι ίσα (ΓΠΓ), άρα $B\Lambda = \Gamma Z$ .

**γ.** Είναι $AE \overset{\alpha.}{=} AZ = A\Gamma - \Gamma Z \overset{\beta.}{=} A\Gamma - B\Lambda$ .

## 83 Θέμα 4 - 13843

**Έστω ότι οι ευθείες x΄x και y΄y εφάπτονται στον κύκλο (O , R) στα άκρα μιας διαμέτρου του ΑΒ. Να αποδείξετε ότι:**

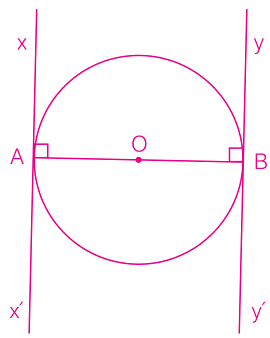
**α. οι ευθείες x΄x και y΄y είναι παράλληλες.**

**β. οι διχοτόμοι των γωνιών ΒΑx και ΑΒy τέμνονται σε σημείο Μ.**

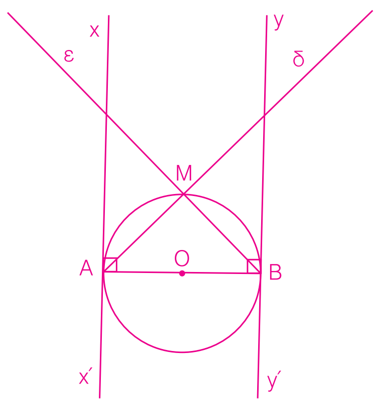
**γ. το σημείο Μ είναι το μέσο του ημικυκλίου ΑΒ.**

**δ. αν η διχοτόμος της γωνίας ΒΑx τέμνει την y΄y στο σημείο Γ και η διχοτόμος της γωνίας ΑΒy τέμνει την x΄x στο σημείο Δ, τότε ΜΓ = ΜΔ .**

**Λύση**




**α.** Οι ευθείες x'x και y'y εφάπτονται στον κύκλο (O, R) στα άκρα της διαμέτρου του ΑΒ, επομένως, είναι κάθετες στην ΑΒ και συνεπώς είναι μεταξύ τους παράλληλες.

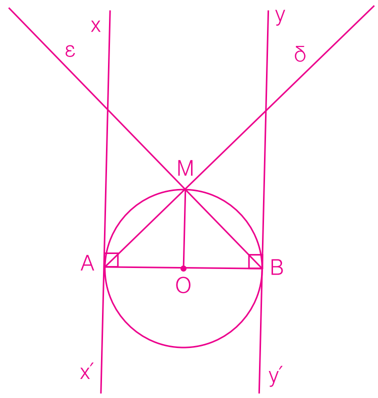



**β.** Έστω Αδ και Βε οι διχοτόμοι των γωνιών ΒΑx και ΑΒy αντίστοιχα, οι οποίες τέμνονται από τη διάμετρο ΑΒ. Αρκεί να αποδείξουμε ότι οι εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες που σχηματίζονται έχουν άθροισμα μικρότερο από 180°.

Είναι $B\widehat{A}\delta + A\widehat{B}\varepsilon = \dfrac{90^o}{2} + \dfrac{90^o}{2} = 90^o < 180^o$ .

Άρα, οι Αδ και Βε τέμνονται σε σημείο Μ του ημιεπιπέδου στο οποίο βρίσκονται οι γωνίες.

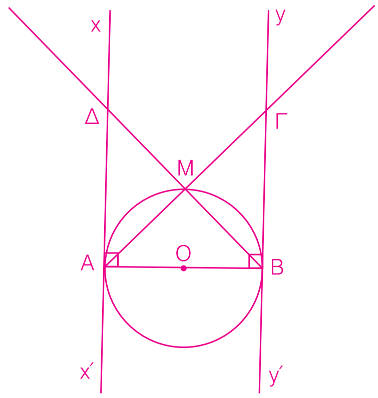
**γ.** Είναι $B\widehat{A}M = 45^o$ και $A\widehat{B}M = 45^o$, οπότε το τρίγωνο ΑΜΒ είναι ισοσκελές με ΜΑ = ΜΒ.




Άρα, το Μ ανήκει στη μεσοκάθετο της ΑΒ, οπότε $A\widehat{O}M = 90^o$. Στο τρίγωνο ΑΟΜ έχουμε $O\widehat{A}M = 45^o$ επομένως, $O\widehat{M}A = 90^o - 45^o = 45^o$.

Άρα το τρίγωνο ΑΟΜ είναι ισοσκελές με ΟΜ = ΟΑ = R.

Επομένως, το Μ είναι σημείο του κύκλου (O,R) και επειδή ανήκει στη μεσοκάθετο της ΑΒ έχουμε ότι το σημείο είναι το μέσο του ημικυκλίου ΑΒ.



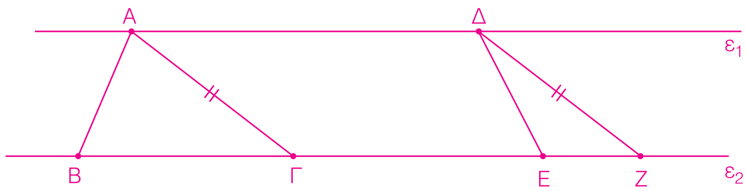

**δ.** Τα τρίγωνα ΑΜΔ και ΒΜΓ έχουν:

- ΑΜ = ΒΜ
- $A\widehat{M}\Delta = B\widehat{M}\Gamma$, ως κατακορυφήν
- $M\widehat{A}\Delta = M\widehat{B}\Gamma = 45^o$

Από το κριτήριο ισότητας Γ-Π-Γ τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε ΜΔ = ΜΓ.

## 84 Θέμα 4 - 13751

**Στο διπλανό σχήμα οι ευθείες $\varepsilon_1$ και $\varepsilon_2$ είναι παράλληλες. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι οξυγώνιο, ενώ το ΔΕΖ είναι αμβλυγώνιο με $\hat{E} > 90^o$. Ισχύει επίσης ότι ΑΓ = ΔΖ.**



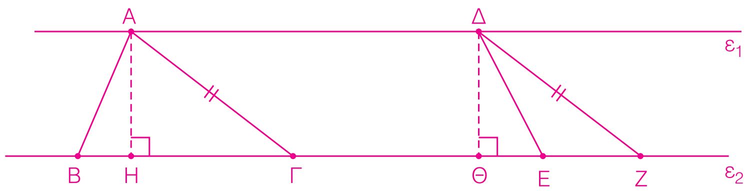

**α. i. Να σχεδιάσετε τα ύψη των τριγώνων από τις κορυφές Α και Δ ονομάζοντάς τα ΑΗ και ΔΘ αντίστοιχα.**

**ii. Να αποδείξετε ότι $H\Gamma = \Theta Z$.**

**β. Να δικαιολογήσετε γιατί $EZ < B\Gamma$.**

**Λύση**

**α. i.** Έστω ΑΗ το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ και ΔΘ το ύψος του τριγώνου ΔΕΖ.




**ii.** Τα τρίγωνα ΑΗΓ και ΔΘΖ, έχουν:

- ΑΗ = ΔΘ, ως αποστάσεις παραλλήλων ευθειών
- ΑΓ = ΔΖ,
- $\hat{H} = \hat{\Theta} = 90^o$.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια με ίσες υποτείνουσες και μία κάθετη πλευρά ίση.

Οπότε $H\Gamma = \Theta Z$.

**β.** Το σημείο Η είναι εσωτερικό του τμήματος ΒΓ γιατί το τρίγωνο είναι οξυγώνιο, οπότε $H\Gamma < B\Gamma$.

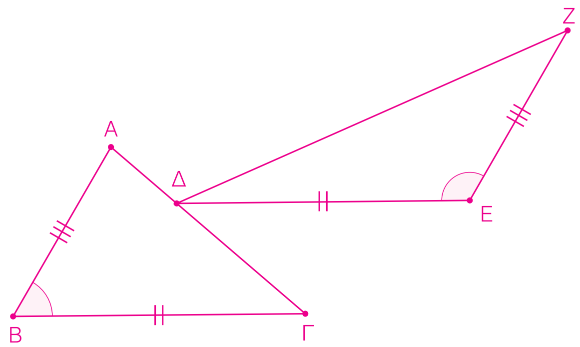
Το σημείο Θ είναι εξωτερικό του τμήματος ΕΖ γιατί η γωνία $\hat{E}$ είναι αμβλεία, οπότε $EZ < \Theta Z$.

Από το **α. ii.** ερώτημα έχουμε ότι $H\Gamma = \Theta Z$.

Άρα $EZ < \Theta Z$, $\Theta Z = H\Gamma$ και $H\Gamma < B\Gamma$, επομένως $EZ < B\Gamma$.

## 85 Θέμα 4 - 13752

**Σε τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} < 90^o$ θεωρούμε τυχαίο σημείο Δ της πλευράς ΑΓ. Φέρουμε τμήμα ΔΕ ίσο και παράλληλο με την πλευρά ΒΓ και από το σημείο Ε φέρουμε τμήμα ΕΖ ίσο και παράλληλο με την πλευρά ΑΒ, όπως φαίνεται στο σχήμα.**




**α. Ένας μαθητής κάνει τους παρακάτω διαδοχικούς συλλογισμούς. Να χαρακτηρίσετε Σ (Σωστό) ή Λ (Λάθος) κάθε έναν από αυτούς.**

1. **Οι γωνίες $\Delta\hat{E}Z$ και $A\hat{B}\Gamma$ είναι γωνίες με πλευρές παράλληλες.**
2. **Οπότε $\Delta\hat{E}Z = A\hat{B}\Gamma$.**
3. **Τα τρίγωνα ΔΕΖ και ΑΒΓ είναι ίσα.**
4. **Το τμήμα ΔΖ είναι ίσο με το τμήμα ΑΓ.**

**β. Να αιτιολογήσετε τους χαρακτηρισμούς σας (Σ ή Λ) που αφορούν τους ισχυρισμούς 2. και 3.**

**γ. Αν στα δεδομένα παραλείψουμε τη συνθήκη $\hat{B} < 90^o$, να συγκρίνετε τα τμήματα ΑΓ και ΔΖ για τα διάφορα είδη της γωνίας $\hat{B}$ και να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.**

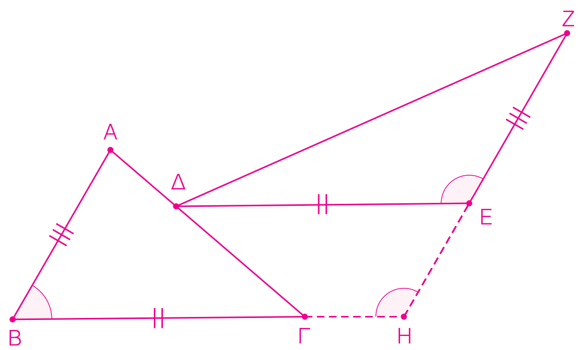
**Λύση**

**α. 1.** Σ

**2.** Λ

**3.** Λ

**4.** Λ




**β.** Η απάντηση στον συλλογισμό 2. είναι λάθος.

Προεκτείνουμε την ΖΕ και τη ΒΓ και έστω Η το σημείο τομής τους. Τότε:

- $Z\hat{E}\Delta = E\hat{H}\Gamma$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά.
- $E\hat{H}\Gamma + A\hat{B}\Gamma = 180^o$, ως γωνίες εντός και επί τα αυτά.

Άρα $Z\hat{E}\Delta + A\hat{B}\Gamma = 180^o$ και αφού $\hat{B} < 90^o$, τότε $Z\hat{E}\Delta > 90^o$. Άρα οι γωνίες δεν είναι ίσες.

Η απάντηση στο συλλογισμό 3. είναι λάθος, γιατί τα τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μια προς μία, τις ΔΕ, ΒΓ και τις ΖΕ, ΑΒ, αλλά οι περιεχόμενες γωνίες αυτών των πλευρών δεν είναι ίσες αλλά παραπληρωματικές.

**γ.** Είναι $Z\hat{E}\Delta + \hat{B} = 180^o$

- Αν $\hat{B} < 90^o$, τότε $Z\hat{E}\Delta > 90^o$ και τα τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες και τις περιεχόμενες γωνίες στις πλευρές αυτές άνισες. Οπότε, θα έχουν και τις τρίτες πλευρές τους ομοίως άνισες.

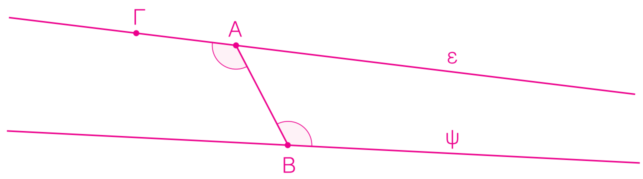
Δηλαδή, αφού $\hat{B} < Z\hat{E}\Delta$, τότε $A\Gamma < \Delta Z$.

- Αν $\hat{B} > 90^o$, τότε $Z\hat{E}\Delta < 90^o$, οπότε $\hat{B} > Z\hat{E}\Delta$, άρα $A\Gamma > \Delta Z$.

- Αν $\hat{B} = 90^o$, τότε και $Z\hat{E}\Delta = 90^o$ και τα τρίγωνα είναι ορθογώνια με ίσες τις κάθετες πλευρές τους, οπότε θα είναι ίσα, άρα $A\Gamma = \Delta Z$.

Επομένως, είναι $\Delta Z = A\Gamma$, όταν $Z\hat{E}\Delta = A\hat{B}\Gamma = 90^o$.

## 86 Θέμα 4 - 13822




**Δίνονται οι ευθείες (ε) και (ψ).**

**α. Αν η γωνία $B\hat{A}\Gamma$ είναι μεγαλύτερη από την $A\hat{B}\psi$ :**

**i. Να αποδείξετε ότι $B\hat{A}\varepsilon + A\hat{B}\psi < 180^\circ$ .**

**ii. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ε και ψ τέμνονται. Σε ποιο από τα ημιεπίπεδα που χωρίζει το επίπεδο η ΑΒ βρίσκεται το σημείο τομής των ε και ψ και γιατί;**

**β. Να διατυπώσετε την πρόταση που αποδείχθηκε στο α. για τις εντός και εναλλάξ γωνίες δύο ευθειών που τέμνονται από τρίτη και το σημείο τομής των ευθειών αυτών.**

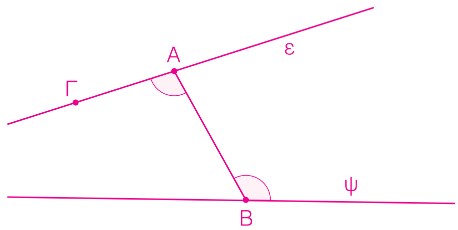
**γ. Αν ισχύει $B\hat{A}\Gamma < A\hat{B}\psi$ , τότε σε ποιο από τα ημιεπίπεδα που χωρίζει το επίπεδο η ΑΒ βρίσκεται το σημείο τομής των ε και ψ και γιατί;**

**Λύση**

**α. i.** Είναι $B\hat{A}\varepsilon + B\hat{A}\Gamma = 180^\circ$ και $A\hat{B}\psi < B\hat{A}\Gamma$ , οπότε $B\hat{A}\varepsilon + A\hat{B}\psi < B\hat{A}\varepsilon + B\hat{A}\Gamma \Leftrightarrow B\hat{A}\varepsilon + A\hat{B}\psi < 180^\circ$ .

**ii.** Οι γωνίες $B\hat{A}\varepsilon$ και $A\hat{B}\psi$ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των ε και ψ που τέμνονται από την ΑΒ και επειδή $B\hat{A}\varepsilon + A\hat{B}\psi < 180^\circ$ οι ε και ψ τέμνονται στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από την ΑΒ προς το μέρος που βρίσκεται η $A\hat{B}\psi$ .

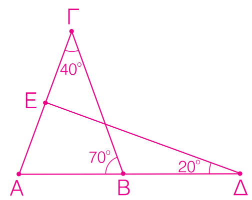
**β.** Στο α. αποδείξαμε ότι: αν δύο ευθείες τεμνόμενες από άλλη ευθεία σχηματίζουν εντός και εναλλάξ γωνίες που δεν είναι ίσες, τότε οι δύο αυτές ευθείες τέμνονται στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από την τέμνουσα προς το μέρος που βρίσκεται η μικρότερη από τις δύο εντός και εναλλάξ γωνίες.




**γ.** Οι γωνίες $B\hat{A}\Gamma$ και $A\hat{B}\psi$ είναι εντός και εναλλάξ και $B\hat{A}\Gamma < A\hat{B}\psi$ . Άρα οι ευθείες ε και ψ τέμνονται στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από την ΑΒ προς το μέρος της $B\hat{A}\Gamma$ , όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

# 16. Άθροισμα γωνιών τριγώνου

## 87 Θέμα 2 - 1700




**Στο διπλανό σχήμα, να αποδείξετε ότι:**

**α. το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές**

**β. η γωνία ΑΕΔ είναι ορθή.**

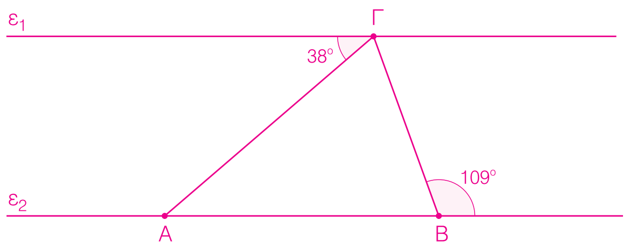
**Λύση**

**α.** Είναι $\hat{A} = 180^\circ - 40^\circ - 70^\circ = 70^\circ$ .

Οπότε $\hat{A} = \hat{B}$ , άρα το τρίγωνο ΓΑΒ είναι ισοσκελές.

**β.** Από το τρίγωνο ΑΕΔ , έχουμε $A\hat{E}\Delta = 180^\circ - 20^\circ - 70^\circ = 90^\circ$ .

## 88 Θέμα 2 - 13535




**Στο διπλανό σχήμα η ευθεία $\varepsilon_1$ διέρχεται από την κορυφή Γ του τριγώνου ΑΒΓ και είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon_2$ που ορίζεται από τις κορυφές του Α και Β. Αξιοποιώντας τα δεδομένα του σχήματος:**

**α. να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.**

**β. να δικαιολογήσετε γιατί το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές και να εξηγήσετε ποιες είναι οι ίσες πλευρές του.**

**Λύση**

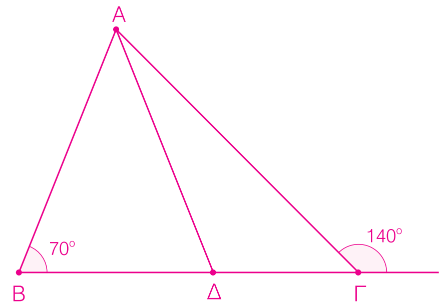
**α.** Είναι: • $\hat{A}=38^\circ$ , ως εντός εναλλάξ γωνίες

• $\hat{B}+109^\circ=180^\circ \Leftrightarrow \hat{B}=71^\circ$

• $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^\circ \Leftrightarrow 38^\circ+71^\circ+\hat{\Gamma}=180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma}=180^\circ-109^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma}=71^\circ$

**β.** Είναι $\hat{B}=\hat{\Gamma}=71^\circ$ , άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές. Οι ίσες πλευρές του ισοσκελούς τριγώνου είναι οι ΑΓ , ΑΒ, γιατί βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{B}$ , $\hat{\Gamma}$ αντίστοιχα.

## 89 Θέμα 2 - 12704




**Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B}=70^\circ$ και $\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi\omega\tau.}=140^\circ$.**

**Στην πλευρά ΒΓ θεωρούμε εσωτερικό σημείο Δ, ώστε $A\Delta=AB$. Να αποδείξετε ότι:**

**α.** **$B\hat{A}\Delta=40^\circ$.**

**β.** **$A\hat{\Delta}\Gamma=110^\circ$.**

**γ.** **Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.**

**Λύση**

**α.** Έχουμε $A\Delta=AB$ , οπότε το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές με:

$\hat{B}=A\hat{\Delta}B \Leftrightarrow A\hat{\Delta}B=70^\circ$

Στο τρίγωνο ΑΒΔ είναι:

$$B\hat{A}\Delta+A\hat{B}\Delta+A\hat{\Delta}B=180^\circ \Leftrightarrow B\hat{A}\Delta+70^\circ+70^\circ=180^\circ \Leftrightarrow B\hat{A}\Delta=180^\circ-140^\circ \Leftrightarrow B\hat{A}\Delta=40^\circ$$

**β.** Στο τρίγωνο ΑΒΔ η $A\hat{\Delta}\Gamma$ είναι εξωτερική γωνία, οπότε $A\hat{\Delta}\Gamma=A\hat{B}\Delta+B\hat{A}\Delta=70^\circ+40^\circ=110^\circ$.

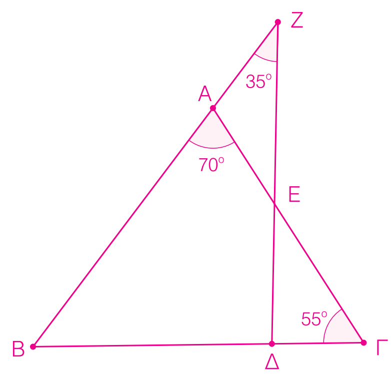
**γ.** Είναι $A\hat{\Gamma}B=180^\circ-140^\circ=40^\circ$ , ως παραπληρωματική της $\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi.}$.

Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι:

$$B\hat{A}\Gamma+A\hat{B}\Gamma+A\hat{\Gamma}B=180^\circ \Leftrightarrow B\hat{A}\Gamma=180^\circ-A\hat{B}\Gamma-A\hat{\Gamma}B \Leftrightarrow B\hat{A}\Gamma=180^\circ-70^\circ-40^\circ \Leftrightarrow B\hat{A}\Gamma=70^\circ.$$

Άρα $B\hat{A}\Gamma=70^\circ=A\hat{B}\Gamma$ , δηλαδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

## 90 Θέμα 2 - 12707




**Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}=70^\circ$ και $\hat{\Gamma}=55^\circ$. Προεκτείνουμε την πλευρά ΒΑ προς το σημείο Α και παίρνουμε στην προέκταση σημείο Ζ ώστε $B\hat{Z}\Delta=35^\circ$ , όπου Δ εσωτερικό σημείο της ΒΓ. Η ΖΔ τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:**

**α.** **το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.**

**β.** **$Z\hat{\Delta}B=90^\circ$.**

**γ.** **το τρίγωνο ΑΖΕ είναι ισοσκελές.**

**Λύση**

**α.** Στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^\circ \Leftrightarrow 70^\circ+\hat{B}+55^\circ=180^\circ \Leftrightarrow \hat{B}=180^\circ-70^\circ-55^\circ \Leftrightarrow \hat{B}=55^\circ$.

Άρα $\hat{B}=\hat{\Gamma}=55^\circ$ , οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $AB=A\Gamma$ .

**β.** Στο τρίγωνο $B Z \Delta$ έχουμε

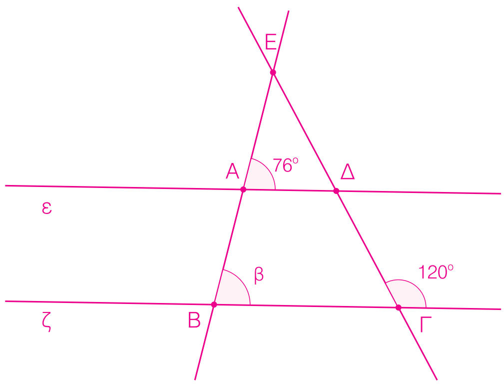
$\hat{B}+B\hat{Z}\Delta+Z\hat{\Delta}B=180^o \Leftrightarrow 55^o+35^o+Z\hat{\Delta}B=180^o \Leftrightarrow Z\hat{\Delta}B=180^o-90^o \Leftrightarrow Z\hat{\Delta}B=90^o$

**γ.** Η γωνία $\hat{A}$ του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι εξωτερική του τριγώνου $AZE$. Επομένως,

$\hat{A}=A\hat{E}Z+A\hat{Z}E \Leftrightarrow 70^o=A\hat{E}Z+35^o \Leftrightarrow A\hat{E}Z=35^o$

Άρα $A\hat{E}Z=A\hat{Z}E$ , οπότε το τρίγωνο $AZE$ είναι ισοσκελές.

## 91 Θέμα 2 - 13741




**Στο διπλανό σχήμα οι ευθείες ε και ζ είναι παράλληλες. Αν είναι $\hat{\alpha}=76^o$ και $\hat{\gamma}=120^o$, να υπολογίσετε:**

**α. Τη γωνία $\hat{\beta}$.**

**β. Τις γωνίες του τετράπλευρου ΑΒΓΔ .**

**γ. Τη γωνία $\hat{E}$ του τριγώνου ΕΑΔ .**

**Λύση**

**α.** Οι γωνίες $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$ είναι εκτός εντός και επί τα αυτα, οπότε $\hat{\alpha}=\hat{\beta}=76^o$.

**β.** Η γωνία $\hat{\Gamma}$ του τετράπλευρου $AB\Gamma\Delta$ είναι παραπληρωματική της γωνίας $\hat{\gamma}=120^o$ , οπότε $\hat{\Gamma}=180^o-120^o=60^o$.

Οι γωνίες $\hat{\Gamma}$ και $\hat{\Delta}$ του τετράπλευρου είναι εντός και επί τα αυτά , οπότε

$\hat{\Gamma}+\hat{\Delta}=180^o \Leftrightarrow \hat{\Delta}=180^o-60^o \Leftrightarrow \hat{\Delta}=120^o$

Η γωνία $\hat{A}$ του τετράπλευρου $AB\Gamma\Delta$ είναι παραπληρωματική της γωνίας $\hat{\alpha}=76^o$, οπότε

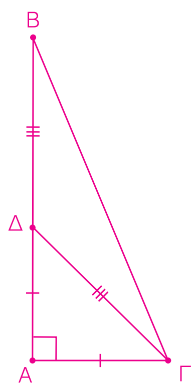
$\hat{A}+\hat{\alpha}=180^o \Leftrightarrow \hat{A}+76^o=180^o \Leftrightarrow \hat{A}=180^o-76^o \Leftrightarrow \hat{A}=104^o$.

**γ.** Στο τρίγωνο $EA\Delta$ εχουμε $\hat{\alpha}=76^o$.

Είναι: • $A\hat{\Delta}E+\hat{\Delta}=180^o \Leftrightarrow A\hat{\Delta}E=180^o-120^o \Leftrightarrow A\hat{\Delta}E=60^o$.

• $A\hat{\Delta}E+\hat{\alpha}+\hat{E}=180^o \Leftrightarrow 60^o+76^o+\hat{E}=180^o \Leftrightarrow 136^o+\hat{E}=180^o \Leftrightarrow \hat{E}=180^o-136^o \Leftrightarrow \hat{E}=44^o$.

## 92 Θέμα 2 - 13442



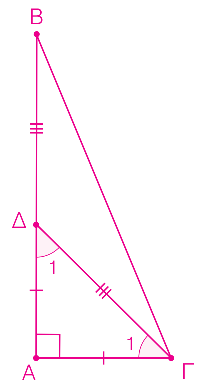

**Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}=90^o$. Στην πλευρά του ΑΒ θεωρούμε σημείο Δ ώστε $B\Delta=\Delta\Gamma$ και $A\Delta=A\Gamma$.**

**α. Να αποδείξετε ότι $A\hat{\Delta}\Gamma=45^o$.**

**β. Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{B}$.**

**Λύση**

**α.** Έστω $\hat{\Delta}_1 = A\hat{\Delta}\Gamma$. Έχουμε $A\Gamma = A\Delta$, άρα το τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές με βάση $\Gamma\Delta$, οπότε οι προσκείμενες στη βάση γωνίες του είναι ίσες, δηλαδή $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Delta}_1$.




Οι γωνίες $\hat{\Gamma}_1$, $\hat{\Delta}_1$ του ορθογωνίου τριγώνου $A\Gamma\Delta$ είναι συμπληρωματικές, οπότε

$$\hat{\Gamma}_1 + \hat{\Delta}_1 = 90^o \Leftrightarrow \hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_1 = 90^o \Leftrightarrow 2\hat{\Delta}_1 = 90^o \Leftrightarrow \hat{\Delta}_1 = 45^o$$

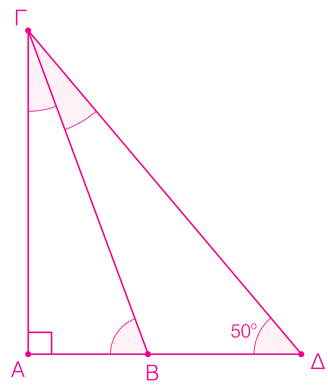
**β.** Έχουμε $B\Delta = \Delta\Gamma$, άρα το τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές με βάση $B\Gamma$, οπότε οι προσκείμενες στη βάση γωνίες του είναι ίσες, δηλαδή $\hat{B} = \hat{\Gamma}_2$.

Η γωνία $\hat{\Delta}_1$ είναι εξωτερική του τριγώνου $B\Gamma\Delta$ άρα

$\hat{\Delta}_1 = \hat{B} + \hat{\Gamma}_2 \Leftrightarrow 45^o = \hat{B} + \hat{B} \Leftrightarrow 2\hat{B} = 45^o \Leftrightarrow \hat{B} = 22,5^o$.

## 93 Θέμα 2 - 13654

**Στο ακόλουθο σχήμα είναι $\hat{A} = 90^o$, $A\hat{B}\Gamma - A\hat{\Gamma}B = 50^o$ και $A\hat{\Delta}\Gamma = 50^o$.**




**α. Να υπολογίσετε τις οξείες γωνίες $A\hat{B}\Gamma$ και $A\hat{\Gamma}B$ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ.**

**β. Να αποδείξετε ότι η ΓΒ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{\Gamma}\Delta$.**

**Λύση**

**α.** Για τις οξείες γωνίες $A\hat{B}\Gamma$ και $A\hat{\Gamma}B$ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ισχύει:

- $A\hat{B}\Gamma + A\hat{\Gamma}B = 90^o \Leftrightarrow A\hat{\Gamma}B + 50^o + A\hat{\Gamma}B = 90^o \Leftrightarrow 2A\hat{\Gamma}B = 40^o \Leftrightarrow A\hat{\Gamma}B = 20^o$

Επομένως $A\hat{B}\Gamma = 20^o + 50^o = 70^o$.

**β.** Είναι

$\Delta\hat{B}\Gamma + \Gamma\hat{B}A = 180^o \Leftrightarrow \Delta\hat{B}\Gamma + 70^o = 180^o \Leftrightarrow \Delta\hat{B}\Gamma = 110^o$.

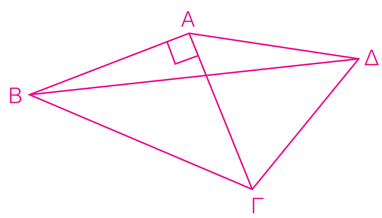
Στο τρίγωνο $\Delta B\Gamma$ ισχύει:

$\Gamma\hat{\Delta}B + \Delta\hat{B}\Gamma + B\hat{\Gamma}\Delta = 180^o \Leftrightarrow 50^o + 110^o + B\hat{\Gamma}\Delta = 180^o \Leftrightarrow B\hat{\Gamma}\Delta = 180^o - 50^o - 110^o \Leftrightarrow B\hat{\Gamma}\Delta = 20^o$

Αφού $A\hat{\Gamma}B = B\hat{\Gamma}\Delta = 20^o$, έχουμε ότι η ΓΒ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{\Gamma}\Delta$.

## 94 Θέμα 2 - 12709

**Δίνεται το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$ και $\hat{A} = 90^o$. Εξωτερικά του τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΓΔ.**




**α. Να υπολογίσετε το μέτρο των γωνιών Β, Γ του τριγώνου ΑΒΓ.**

**β. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές.**

**γ. Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας ΑΒΔ**

**Λύση**

**α.** Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε $\hat{A} = 90^o$, $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ και $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^o \Leftrightarrow \hat{B} + \hat{B} = 90^o \Leftrightarrow 2\hat{B} = 90^o \Leftrightarrow \hat{B} = 45^o$, οπότε και $\hat{\Gamma} = 45^o$.

**β.** Το τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ είναι ισόπλευρο οπότε $A\Gamma = A\Delta = \Delta\Gamma$.

Έχουμε $AB = A\Gamma$ και $A\Gamma = A\Delta$, οπότε $AB = A\Delta$. Άρα το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές.

**γ.** Επειδή το τρίγωνο $ΑΓΔ$ είναι ισόπλευρο έχουμε $Δ\hat{Α}Γ = 60^o$.

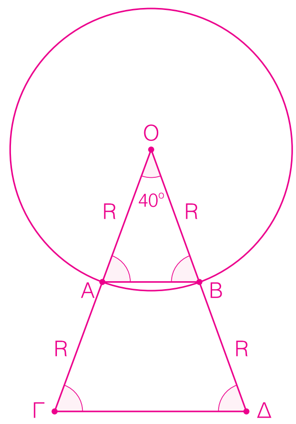
Οπότε $Β\hat{Α}Δ = Β\hat{Α}Γ + Δ\hat{Α}Γ = 90^o + 60^o = 150^o$.

Στο ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΔ$ έχουμε $Α\hat{Β}Δ = Α\hat{Δ}Β$ και

$Α\hat{Β}Δ + Α\hat{Δ}Β + Β\hat{Α}Δ = 180^o \Leftrightarrow 2Α\hat{Β}Δ + 150^o = 180^o \Leftrightarrow 2Α\hat{Β}Δ = 30^o \Leftrightarrow Α\hat{Β}Δ = 15^o$.

## 95 Θέμα 2 13687

**Σε κύκλο με κέντρο Ο και ακτίνα R θεωρούμε επίκεντρη γωνία $Α\hat{Ο}Β = 40^o$. Προεκτείνουμε τις ακτίνες ΟΑ και ΟΒ κατά τμήματα ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα, έτσι ώστε $ΑΓ = ΟΑ$ και $ΒΔ = ΟΒ$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.**




**α.** **Να αποδείξετε ότι $Ο\hat{Α}Β = Ο\hat{Β}Α = 70^o$.**

**β.** **Να υπολογίσετε τις γωνίες $Ο\hat{Γ}Δ$ και $Ο\hat{Δ}Γ$.**

**γ.** **Να αποδείξετε ότι $ΑΒ // ΓΔ$.**

**Λύση**

**α.** Το τρίγωνο $ΟΑΒ$ είναι ισοσκελές, αφού οι πλευρές $ΟΑ = ΟΒ = R$, οπότε

$Ο\hat{Α}Β = Ο\hat{Β}Α$

Στο τρίγωνο $ΟΑΒ$ ισχύει:

$\hat{Ο} + Ο\hat{Α}Β + Ο\hat{Β}Α = 180^o \Leftrightarrow 40^o + 2Ο\hat{Α}Β = 180^o \Leftrightarrow 2Ο\hat{Α}Β = 140^o \Leftrightarrow Ο\hat{Α}Β = 70^o$ και $Ο\hat{Β}Α = 70^o$.

**β.** Είναι $ΟΓ = ΟΔ$, ως αθροίσματα ίσων τμημάτων, αφού $ΟΓ = ΟΑ + ΑΓ = 2R$ και $ΟΔ = ΟΒ + ΒΔ = 2R$.

Επομένως, το τρίγωνο $ΟΓΔ$ είναι ισοσκελές με βάση $ΓΔ$.

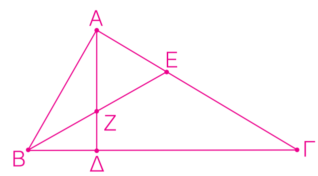
Στο τρίγωνο $ΟΓΔ$ ισχύει:

$\hat{Ο} + Ο\hat{Γ}Δ + Ο\hat{Δ}Γ = 180^o \Leftrightarrow 40^o + 2Ο\hat{Γ}Δ = 180^o \Leftrightarrow 2Ο\hat{Γ}Δ = 140^o \Leftrightarrow Ο\hat{Γ}Δ = 70^o$ και $Ο\hat{Δ}Γ = 70^o$.

**γ.** Οι $ΑΒ$ και $ΓΔ$ τέμνονται από την $ΑΓ$ και σχηματίζουν τις εκτός εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες τους $Ο\hat{Α}Β$ και $Ο\hat{Γ}Δ$ ίσες. Επομένως, $ΑΒ // ΓΔ$.

## 96 Θέμα 2 - 1645

**Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύουν $\hat{Α} + \hat{Γ} = 2\hat{Β}$ και $\hat{Α} = 3\hat{Γ}$.**




**α.** **Να αποδείξετε ότι η γωνία $Β$ είναι $60^o$.**

**β.** **Αν το ύψος του ΑΔ και η διχοτόμος του ΒΕ τέμνονται στο σημείο Ζ, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΖΕ είναι ισόπλευρο.**

**Λύση**

**α.** Είναι $\hat{Α} + \hat{Γ} = 2\hat{Β}$ και $\hat{Α} = 3\hat{Γ}$, οπότε $3\hat{Γ} + \hat{Γ} = 2\hat{Β} \Leftrightarrow 4\hat{Γ} = 2\hat{Β} \Leftrightarrow \hat{Β} = 2\hat{Γ}$.

Έχουμε $\hat{Α} + \hat{Β} + \hat{Γ} = 180^o \Leftrightarrow 3\hat{Γ} + 2\hat{Γ} + \hat{Γ} = 180^o \Leftrightarrow 6\hat{Γ} = 180^o \Leftrightarrow \hat{Γ} = 30^o$.

Οπότε $\hat{Β} = 2 \cdot 30^o = 60^o$.

**β.** Είναι $\hat{Γ} = 30^o$ και $Ε\hat{Β}Α = \frac{\hat{Β}}{2} = 30^o$.

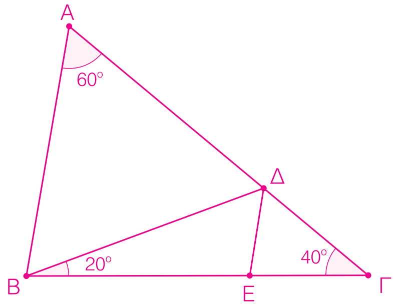
Στο τρίγωνο $ΑΔΓ$ είναι $Δ\hat{Α}Γ = 90^o - \hat{Γ} = 60^o$.

Στο τρίγωνο $ΑΒΕ$ είναι $Α\hat{Ε}Β + \hat{Α} + Ε\hat{Β}Α = 180^o \Leftrightarrow Α\hat{Ε}Β + 90^o + 30^o = 180^o \Leftrightarrow Α\hat{Ε}Β = 60^o$.

Στο τρίγωνο $ΑΕΖ$ είναι $Α\hat{Ζ}Ε + Ζ\hat{Α}Ε + Α\hat{Ε}Ζ = 180^o \Leftrightarrow Α\hat{Ζ}Ε + 60^o + 60^o = 180^o \Leftrightarrow Α\hat{Ε}Ζ = 60^o$.

Άρα το τρίγωνο $ΑΖΕ$ είναι ισόπλευρο.

## 97 Θέμα 2 - 13443




**Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}=60^o$ και $\hat{\Gamma}=40^o$. Στην πλευρά ΑΓ θεωρούμε σημείο Δ, ώστε $\Gamma\hat{B}\Delta=20^o$.**

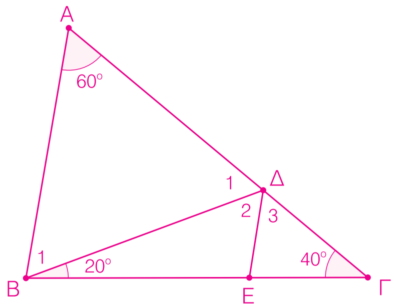
**α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισόπλευρο.**

**β. Η παράλληλη από το Δ προς την ΑΒ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:**

**i. $B\hat{\Delta}E=60^o$.**

**ii Η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $B\hat{\Delta}\Gamma$.**

**Λύση**




**α.** Η γωνία $\hat{\Delta}_1$ είναι εξωτερική του τριγώνου ΒΓΔ, άρα

$\hat{\Delta}_1=\Gamma\hat{B}\Delta+\hat{\Gamma}=20^o+40^o=60^o$.

Οπότε οι γωνίες $\hat{A}$, $\hat{\Delta}_1$ του τριγώνου ΑΒΔ είναι $60^o$.

Επομένως και η τρίτη γωνία $\hat{B}_1$ θα είναι $60^o$, οπότε το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισόπλευρο.

**β. i.** Είναι $\hat{B}_1=\hat{\Delta}_2$, ως εντός εναλλάξ γωνίες και $\hat{B}_1=60^o$, άρα $\hat{\Delta}_2=60^o \Leftrightarrow B\hat{\Delta}E=60^o$.

**ii.** Είναι $\hat{A}=\hat{\Delta}_3$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη και $\hat{A}=60^o$, άρα $\hat{\Delta}_3=60^o$.

Αφού $\hat{\Delta}_2=\hat{\Delta}_3=60^o$, η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $B\hat{\Delta}\Gamma$.

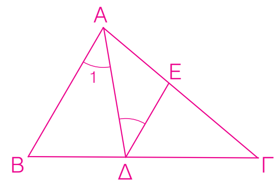
## 98 Θέμα 2 - 1623

**Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}=80^o$ και $\hat{B}=20^o+\hat{\Gamma}$ και ΑΔ η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$.**

**α. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$.**

**β. Φέρουμε από το Δ ευθεία παράλληλη στην ΑΒ, που τέμνει την ΑΓ στο Ε. Να υπολογίσετε τις γωνίες $A\hat{\Delta}E$, $E\hat{\Delta}\Gamma$.**

**Λύση**




**α.** Είναι:
- $\hat{B}=20^o+\hat{\Gamma}$
- $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^o \Leftrightarrow 80^o+20^o+\hat{\Gamma}+\hat{\Gamma}=180^o \Leftrightarrow 2\hat{\Gamma}=80^o \Leftrightarrow \hat{\Gamma}=40^o$

Οπότε $\hat{B}=20^o+40^o=60^o$.

**β.** Είναι:
- $\hat{A}_1=\dfrac{\hat{A}}{2}=\dfrac{80^o}{2}=40^o$
- $A\hat{\Delta}E=\hat{A}_1=40^o$, ως εντός εναλλάξ
- $E\hat{\Delta}\Gamma=\hat{B}=60^o$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη

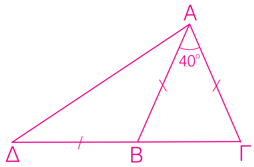
## 99 Θέμα 2 - 1604

**Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) με γωνία κορυφής $\hat{A}=40^o$. Στην προέκταση της ΓΒ (προς το Β) παίρνουμε τμήμα ΒΔ τέτοιο ώστε ΒΔ = ΑΒ.**

**Να υπολογίσετε:**

**α. τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ** **β. τη γωνία $\Delta\hat{A}\Gamma$**

**Λύση**



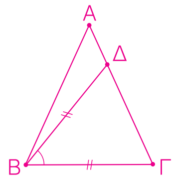

**α.** Είναι:
- $\hat{B} = \hat{\Gamma}$
- $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 40^\circ + \hat{B} + \hat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{B} = 140^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 70^\circ$

Οπότε $\hat{\Gamma} = 70^\circ$ .

**β.** Είναι:
- $\Delta\hat{A}B = \hat{\Delta}$ , αφού $AB = B\Delta$
- $A\hat{B}\Delta = 180^\circ - \hat{B} = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$
- $\Delta\hat{A}B + \hat{\Delta} + A\hat{B}\Delta = 180^\circ \Leftrightarrow \Delta\hat{A}B + \Delta\hat{A}B + 110^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 2\Delta\hat{A}B = 70^\circ \Leftrightarrow \Delta\hat{A}B = 35^\circ$

Οπότε $\Delta\hat{A}\Gamma = 40^\circ + 35^\circ = 75^\circ$ .

## 100 Θέμα 2 - 1602




**Δίνεται τρίγωνο ισοσκελές $AB\Gamma$ $(AB = A\Gamma)$ με γωνία $\hat{A} = 50^\circ$. Έστω $\Delta$ είναι σημείο της πλευράς $A\Gamma$, τέτοιο ώστε $B\Delta = B\Gamma$ .**

**α. Να υπολογίσετε τις γωνίες $B$ και $\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$ .**

**β. Να αποδείξετε ότι η γωνία $\Delta\hat{B}\Gamma$ είναι ίση με τη γωνία $\hat{A}$ .**

**Λύση**

**α.** Είναι $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ και $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 50^\circ + \hat{B} + \hat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{B} = 130^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 65^\circ$ .

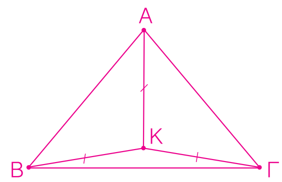
Οπότε και $\hat{\Gamma} = 65^\circ$ .

**β.** Στο ισοσκελές τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ είναι $B\hat{\Delta}\Gamma = \hat{\Gamma} = 65^\circ$ και

$\Delta\hat{B}\Gamma + B\hat{\Delta}\Gamma + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \Delta\hat{B}\Gamma + 65^\circ + 65^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \Delta\hat{B}\Gamma = 50^\circ$ .

Άρα $\Delta\hat{B}\Gamma = \hat{A}$ .

## 101 Θέμα 2 - 1593




**Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και $\hat{A} = 80^\circ$. Έστω $K$ σημείο της διχοτόμου της γωνίας $\hat{A}$, τέτοιο ώστε $KB = KA = K\Gamma$ .**

**α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $BKA$ και $\Gamma KA$ είναι ίσα.**

**β. Να υπολογίσετε τις γωνίες $A\hat{B}K$ και $A\hat{\Gamma}K$ .**

**γ. Να υπολογίσετε τη γωνία $B\hat{K}\Gamma$ .**

**Λύση**

**α.** Τα τρίγωνα $BKA$ και $\Gamma KA$ έχουν:
- $AB = A\Gamma$
- $KB = K\Gamma$
- $AK$ κοινή

Οπότε είναι ίσα (ΠΠΠ).

**β.** Είναι:
- $AK$ διχοτόμος, άρα $B\hat{A}K = \dfrac{\hat{A}}{2} = 40^\circ$
- $KA = KB$ , άρα $A\hat{B}K = B\hat{A}K = 40^\circ$
- $KA = K\Gamma$ , άρα $A\hat{\Gamma}K = K\hat{A}\Gamma = 40^\circ$

**γ.** Στο τρίγωνο $AKB$ είναι $A\hat{K}B = 180^\circ - 40^\circ - 40^\circ = 100^\circ$ .

Στο τρίγωνο $AK\Gamma$ είναι $A\hat{K}\Gamma = 180^\circ - 40^\circ - 40^\circ = 100^\circ$ .

Οπότε $B\hat{K}\Gamma = 360^\circ - A\hat{K}B - A\hat{K}\Gamma = 360^\circ - 100^\circ - 100^\circ = 160^\circ$ .

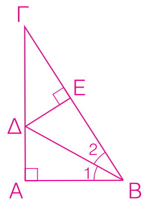
## 102 Θέμα 2 - 1541

**Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $(\hat{A}=90^\circ)$. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Δ. Φέρουμε τμήμα ΔΕ κάθετο στην πλευρά ΒΓ. Να αποδείξετε ότι:**

**α. $BE = AB$**

**β. Αν επιπλέον $B\hat{\Delta}A = 55^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΓΔΕ.**

**Λύση**




**α.** Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ, ΕΔΒ έχουν:

- ΒΔ κοινή
- $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$, αφού ΒΔ διχοτόμος

Οπότε είναι ίσα, άρα $BE = AB$.

**β.** Επειδή τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΕΔΒ είναι ίσα, έχουμε $B\hat{\Delta}E = B\hat{\Delta}A \Rightarrow B\hat{\Delta}E = 55^\circ$.

Οπότε:
- $\Gamma\hat{\Delta}E = 180^\circ - 55^\circ - 55^\circ = 70^\circ$
- $\hat{\Gamma} = 90^\circ - \Gamma\hat{\Delta}E = 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ$.

## 103 Θέμα 2 - 1693

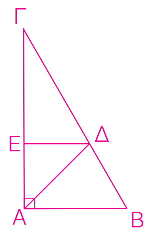
**Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $(\hat{A}=90^\circ)$ και ΑΔ η διχοτόμος της γωνίας Α. Από το σημείο Δ φέρουμε την παράλληλη προς την ΑΒ που τέμνει την ΑΓ στο Ε.**

**α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΕΔΓ είναι ορθογώνιο.**

**β. Να υπολογίσετε τη γωνία ΑΔΕ.**

**γ. Αν η γωνία $\hat{B}$ είναι 20 μοίρες μεγαλύτερη της γωνίας $\hat{\Gamma}$, να υπολογίσετε τη γωνία $E\hat{\Delta}\Gamma$.**

**Λύση**




**α.** Επειδή $\Delta E // AB$ και $AB \perp A\Gamma$, είναι $\Delta E \perp A\Gamma$.

Οπότε το τρίγωνο ΓΔΕ είναι ορθογώνιο.

**β.** Είναι:
- $\Delta\hat{A}E = \Delta\hat{A}B = \frac{\hat{A}}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$
- $A\hat{\Delta}E = \Delta\hat{A}B = 45^\circ$, ως εντός εναλλάξ

**γ.** Έχουμε $\hat{B} = 20^\circ + \hat{\Gamma}$.

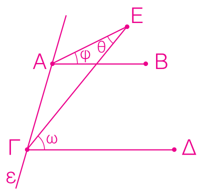
Είναι $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow 20^\circ + \hat{\Gamma} + \hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow 2\hat{\Gamma} = 70^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 35^\circ$.

Άρα $E\hat{\Delta}\Gamma = 90^\circ - \hat{\Gamma} = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$.

## 104 Θέμα 2 - 1590

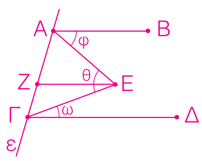
**Δίνεται ευθεία ε του επιπέδου. Τα παράλληλα τμήματα ΑΒ και ΓΔ καθώς και ένα τυχαίο σημείο Ε βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο της ε.**

**Να αποδείξετε ότι:**




**α. Αν το Ε είναι εκτός των τμημάτων ΑΒ και ΓΔ τότε:**

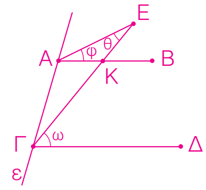
$$\hat{\omega} = \hat{\varphi} + \hat{\theta}$$




**β. Αν το Ε είναι ανάμεσα στα τμήματα ΑΒ και ΓΔ και ΕΖ // ΑΒ, τότε να αποδείξετε ότι**

$$\hat{\theta} = \hat{\omega} + \hat{\varphi}$$

**Λύση**




**α.** Έστω $Κ$ το σημείο τομής της $ΑΒ$ με την $ΕΓ$.

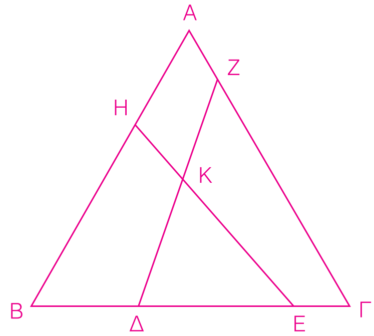
Είναι $\hat{ω} = Α\hat{Κ}Γ$, ως εντός εναλλάξ και $Α\hat{Κ}Γ = \hat{φ} + \hat{θ}$, αφού η $Α\hat{Κ}Γ$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $ΑΚΕ$.

Οπότε $\hat{ω} = \hat{φ} + \hat{θ}$.

**β.** Είναι:
- $\hat{ω} = Ζ\hat{Ε}Γ$, ως εντός εναλλάξ
- $\hat{φ} = Α\hat{Ε}Ζ$, ως εντός εναλλάξ

Οπότε $\hat{θ} = Ζ\hat{Ε}Γ + Ζ\hat{Ε}Α = \hat{ω} + \hat{φ}$.

## 105 Θέμα 2 - 12708




**Δίνεται το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Στις πλευρές ΒΓ και ΓΑ θεωρούμε σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα ώστε $ΒΕ = ΓΖ$. Στις πλευρές ΑΒ και ΓΒ θεωρούμε σημεία Η και Δ αντίστοιχα ώστε $ΒΗ = ΓΔ$. Τα ευθύγραμμα τμήματα ΔΖ και ΕΗ τέμνονται στο σημείο Κ το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του τριγώνου ΑΒΓ. Να αποδείξετε ότι:**

**α.** $ΕΗ = ΔΖ$ **και** $Β\hat{Η}Ε = Γ\hat{Δ}Ζ$.

**β.** **τα τρίγωνα ΒΕΗ και ΚΕΔ έχουν ίσες γωνίες μία προς μία.**

**Λύση**

**α.** Τα τρίγωνα $ΒΕΗ$ και $ΓΖΔ$ έχουν:
- $ΒΕ = ΓΖ$
- $ΒΗ = ΓΔ$
- $\hat{Β} = \hat{Γ} = 60^\circ$, αφού το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.

Άρα είναι ίσα, (ΠΓΠ) επομένως, $ΕΗ = ΖΔ$ και $ΒΕ = ΓΖ$, οπότε $Β\hat{Η}Ε = Γ\hat{Δ}Ζ$.

**β.** Επειδή τα τρίγωνα $ΒΕΗ$ και $ΓΖΔ$ είναι ίσα, έχουμε $\hat{Η} = \hat{Δ}$.

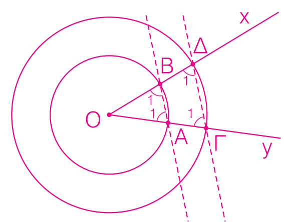
Τα τρίγωνα $ΚΕΔ$ και $ΒΕΗ$ έχουν τη γωνία $\hat{Ε}$ κοινή και $\hat{Δ} = \hat{Η}$.

Επομένως, έχουν και τις τρίτες γωνίες τους ίσες, δηλαδή, $Δ\hat{Κ}Ε = \hat{Β}$.

## 106 Θέμα 2 - 1552

**Ένας μαθητής της $Α'$ λυκείου βρήκε έναν τρόπο να κατασκευάζει παράλληλες ευθείες. Στην αρχή σχεδιάζει μια τυχαία γωνία $ΧΟΨ$. Στη συνέχεια με κέντρο την κορυφή $Ο$ της γωνίας σχεδιάζει δυο ομόκεντρους διαφορετικούς κύκλους με τυχαίες ακτίνες. Ο μικρότερος κύκλος τέμνει τις πλευρές $ΟΧ$ και $ΟΨ$ της γωνίας στα σημεία $Α$, $Β$ αντίστοιχα και ο μεγαλύτερος στα σημεία $Γ$, $Δ$. Ισχυρίζεται ότι οι ευθείες που ορίζονται από τις χορδές $ΑΒ$ και $ΓΔ$ είναι παράλληλες. Μπορείτε να το δικαιολογήσετε;**

**Λύση**




Το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές διότι $ΟΑ = ΟΒ$ ως ακτίνες του ίδιου κύκλου.

Άρα $\hat{Α}_1 = \hat{Β}_1$.

Στο τρίγωνο $ΟΑΒ$ είναι

$$\hat{Ο} + \hat{Α}_1 + \hat{Β}_1 = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{Α}_1 + \hat{Β}_1 = 180^\circ - \hat{Ο} \Leftrightarrow 2\hat{Β}_1 = 180^\circ - \hat{Ο} \Leftrightarrow \hat{Β}_1 = \frac{180^\circ - \hat{Ο}}{2}, \quad (1)$$

Το τρίγωνο ΟΓΔ είναι ισοσκελές διότι $ΟΓ = ΟΔ$, ως ακτίνες του ίδιου κύκλου.

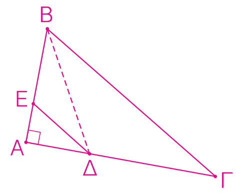
Άρα $\hat{Γ}_1 = \hat{Δ}_1$.

Στο τρίγωνο $ΟΓΔ$ είναι $\hat{Ο} + \hat{Γ}_1 + \hat{Δ}_1 = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{Γ}_1 + \hat{Δ}_1 = 180^\circ - \hat{Ο} \Leftrightarrow 2\hat{Δ}_1 = 180^\circ - \hat{Ο} \Leftrightarrow \hat{Δ}_1 = \dfrac{180^\circ - \hat{Ο}}{2}$, $(2)$.

Από τις $(1)$ και $(2)$ έχουμε $\hat{Β}_1 = \hat{Δ}_1$.

Αφού επιπλέον είναι εντός, εκτός και επί τα αυτά μέρη, προκύπτει $ΑΒ // ΓΔ$.

## 107 Θέμα 2 - 1594




**Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $(\hat{A}=90^o)$. Έστω Δ σημείο της πλευράς ΑΓ τέτοιο ώστε, η διχοτόμος ΔΕ της γωνίας $A\hat{\Delta}B$ να είναι παράλληλη στην πλευρά ΒΓ.**

**α. Να αποδείξετε ότι:**

**i. $E\hat{\Delta}B=\Delta\hat{B}\Gamma$ και $E\hat{\Delta}A=\hat{\Gamma}$**

**ii. Το τρίγωνο ΒΔΓ είναι ισοσκελές.**

**β. Αν $A\hat{\Delta}B=60^o$ να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\Gamma}$ .**

**Λύση**

**α. i.** Επειδή $\Delta E // B\Gamma$ έχουμε:

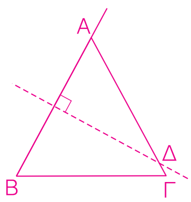
- $E\hat{\Delta}B=\Delta\hat{B}\Gamma$ , ως εντός εναλλάξ
- $E\hat{\Delta}A=\hat{\Gamma}$ , ως εντός, εκτός και επί τα αυτά μέρη

**ii.** Είναι $A\hat{\Delta}E=E\hat{\Delta}B$ , αφού ΔΕ διχοτόμος της $A\hat{\Delta}B$ , οπότε $\hat{\Gamma}=\Delta\hat{B}\Gamma$ .

Άρα το $\overset{\triangle}{B\Delta\Gamma}$ είναι ισοσκελές.

**β.** Η $A\hat{\Delta}B$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΒΔΓ, άρα $A\hat{\Delta}B=\Delta\hat{B}\Gamma+\hat{\Gamma}\Leftrightarrow 60^o=2\hat{\Gamma}\Leftrightarrow\hat{\Gamma}=30^o$.

## 108 Θέμα 2 - 1554




**Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο η εξωτερική γωνία Α είναι διπλάσια της εσωτερικής γωνίας Β.**

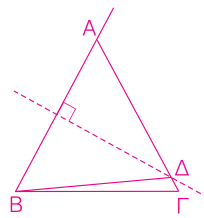
**α. Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ .**

**β. Η μεσοκάθετη της πλευράς ΑΒ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο εσωτερικό της σημείο Δ . Αν η γωνία ΑΔΒ είναι ίση με $80^o$ , τότε να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ .**

**Λύση**

**α.** Είναι $\hat{A}_{\varepsilon\xi}=\hat{B}+\hat{\Gamma}\Leftrightarrow 2\hat{B}=\hat{B}+\hat{\Gamma}\Leftrightarrow\hat{B}=\hat{\Gamma}$ .

Οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ .




**β.** Είναι:
- $A\hat{\Delta}B=80^o$
- ΔΑ = ΔΒ , αφού το Δ ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΒ

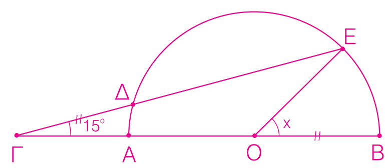
Οπότε $\hat{A}=A\hat{B}\Delta$ .

Στο $\overset{\triangle}{AB\Delta}$ είναι $\hat{A}+A\hat{B}\Delta+A\hat{\Delta}B=180^o\Leftrightarrow\hat{A}+\hat{A}+80^o=180^o\Leftrightarrow 2\hat{A}=100^o\Leftrightarrow\hat{A}=50^o$ .

Στο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ είναι $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^o\Leftrightarrow 50^o+\hat{B}+\hat{B}=180^o\Leftrightarrow 2\hat{B}=130^o\Leftrightarrow\hat{B}=65^o$.

Οπότε και $\hat{\Gamma}=65^o$ .

## 109 Θέμα 2 - 1576

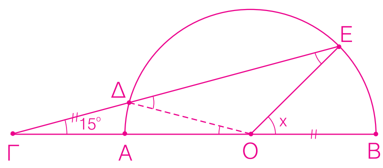



**Σε ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ προεκτείνουμε την ΑΒ προς το μέρος του Α και παίρνουμε ένα σημείο Γ . Θεωρούμε Ε ένα σημείο του ημικυκλίου και έστω Δ το σημείο τομής του τμήματος ΓΕ με το ημικύκλιο. Αν το τμήμα ΓΔ είναι ίσο με το ΟΒ και η γωνία $B\hat{\Gamma}E=15^o$, τότε**

**α. να αποδείξετε ότι $O\hat{\Delta}E=30^o$**

**β. να υπολογίσετε τη γωνία $E\hat{O}B=x$ .**

**Λύση**




**α.** Είναι $ΓΔ = ΟΒ = ΟΔ = ΟΕ = ρ$.

- Το τρίγωνο $ΔΓΟ$ είναι ισοσκελές, άρα $Δ\hat{Ο}Γ = Δ\hat{Γ}Ο = 15^o$.
- Στο τρίγωνο $ΔΓΟ$, η γωνία $Ο\hat{Δ}Ε$ είναι εξωτερική, οπότε

$Ο\hat{Δ}Ε = 15^o + 15^o = 30^o$.

**β.** • Το τρίγωνο $ΟΔΕ$ είναι ισοσκελές, οπότε $\hat{Ε} = Ο\hat{Δ}Ε = 30^o$.

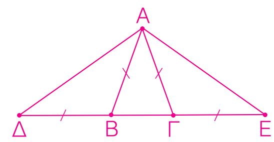
- Στο τρίγωνο $ΟΕΓ$ η $Β\hat{Ο}Ε$ είναι εξωτερική, οπότε $Β\hat{Ο}Ε = x = \hat{Γ} + \hat{Ε} = 15^o + 30^o = 45^o$.

## 110 Θέμα 2 - 1607

**Στο διπλανό σχήμα ισχύουν**

**$ΔΒ = ΒΑ = ΑΓ = ΓΕ$ και $Β\hat{Α}Γ = 40^o$.**

**Να αποδείξετε ότι**




**α. $Α\hat{Β}Δ = Α\hat{Γ}Ε = 110^o$**

**β. τα τρίγωνα $ΑΒΔ$ και $ΑΓΕ$ είναι ίσα.**

**γ. το τρίγωνο $ΔΑΕ$ είναι ισοσκελές.**

**Λύση**

**α.** Το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελές με βάση τη $ΒΓ$, οπότε $\hat{Β} = \hat{Γ}$ και

$\hat{Α} + \hat{Β} + \hat{Γ} = 180^o \Leftrightarrow 40^o + \hat{Β} + \hat{Β} = 180^o \Leftrightarrow 2\hat{Β} = 140^o \Leftrightarrow \hat{Β} = 70^o$.

Οπότε και $\hat{Γ} = 70^o$.

Είναι: • $Α\hat{Β}Δ = 180^o - \hat{Β} = 180^o - 70^o = 110^o$.

- $Α\hat{Γ}Ε = 180^o - \hat{Γ} = 180^o - 70^o = 110^o$.

**β.** Τα τρίγωνα $ΑΒΔ$ και $ΑΓΕ$ έχουν:

- $ΑΒ = ΑΓ$
- $ΒΔ = ΓΕ$
- $Α\hat{Β}Δ = Α\hat{Γ}Ε$

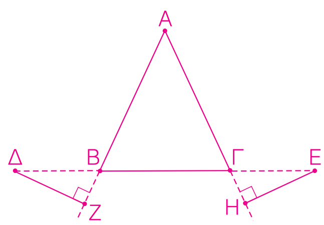
Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ).

**γ.** Επειδή τα τρίγωνα $ΑΒΔ$ και $ΑΓΕ$ είναι ίσα, έχουμε $ΑΔ = ΑΕ$.
Άρα το τρίγωνο $ΔΑΕ$ είναι ισοσκελές.

## 111 Θέμα 2 - 1572

**Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ $(ΑΒ = ΑΓ)$ και σημεία $Δ$ και $Ε$ στην ευθεία $ΒΓ$ τέτοια, ώστε $ΒΔ = ΓΕ$.**

**Έστω ότι $ΔΖ \perp ΑΒ$ και $ΕΗ \perp ΑΓ$.**



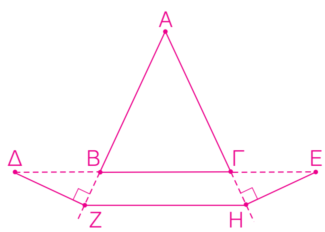

**α. Να αποδείξετε ότι:**

**i. $ΒΖ = ΓΗ$**

**ii. Το τρίγωνο $ΑΖΗ$ είναι ισοσκελές**

**β. Αν $\hat{Α} = 50^o$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $ΑΖΗ$.**

**Λύση**




**α.** Το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελές, οπότε $\hat{Β} = \hat{Γ}$.

**i.** Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΖΒΔ$ και $ΗΓΕ$ έχουν:

- $ΒΔ = ΓΕ$
- $Δ\hat{Β}Ζ = Η\hat{Γ}Ε$, ως κατακορυφήν των ίσων γωνιών $\hat{Β}$ και $\hat{Γ}$

Οπότε είναι ίσα, άρα $ΒΖ = ΓΗ$.

**ii.** Είναι $AZ = AB + BZ \overset{\alpha.i.}{=} A\Gamma + \Gamma H = AH$.
Άρα το τρίγωνο $AZH$ είναι ισοσκελές.

**β.** Το τρίγωνο $AZH$ είναι ισοσκελές, οπότε $\hat{Z} = \hat{H}$.
Στο τρίγωνο $AZH$ είναι $\hat{A} + \hat{Z} + \hat{H} = 180^o \Leftrightarrow 50^o + \hat{Z} + \hat{Z} = 180^o \Leftrightarrow 2\hat{Z} = 130^o \Leftrightarrow \hat{Z} = 65^o$.

Οπότε και $\hat{H} = 65^o$.

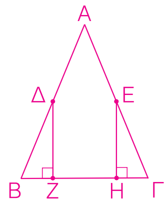
## 112 Θέμα 2 - 1699

**Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ $(AB = A\Gamma)$.**

**α. Να αποδείξετε ότι τα μέσα $\Delta$ και $E$ των πλευρών $AB$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα, ισαπέχουν από τη βάση $B\Gamma$.**

**β. Αν $\widehat{A} = 75^o + \widehat{B}$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.**

**Λύση**



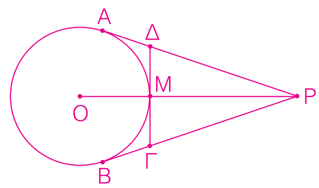

**α.** Έστω $\Delta$, $E$ τα μέσα των πλευρών AB, AΓ και $\Delta Z \perp B\Gamma$, $EH \perp B\Gamma$.
Τα ορθογώνια τρίγωνα $ZB\Delta$ και $H\Gamma E$ έχουν:
- $\Delta B = E\Gamma$
- $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, αφού το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

Άρα είναι ίσα, οπότε $\Delta Z = EH$.

**β.** Είναι $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow 75^o + \hat{B} + \hat{B} + \hat{B} = 180^o \Leftrightarrow 3\hat{B} = 105^o \Leftrightarrow \hat{B} = 35^o$.

Οπότε $\hat{\Gamma} = \hat{B} = 35^o$ και $\hat{A} = 75^o + \hat{B} = 75^o + 35^o = 110^o$.

## 113 Θέμα 2 - 1636

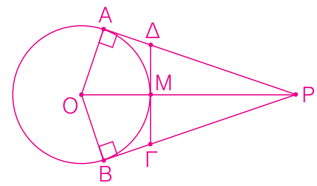



**Δίνεται κύκλος κέντρου $O$ και από ένα σημείο $P$ εκτός αυτού φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα $PA$ και $PB$. Το τμήμα $PO$ τέμνει τον κύκλο στο σημείο $M$ και η εφαπτομένη του κύκλου στο $M$ τέμνει τα $PA$ και $PB$ στα σημεία $\Delta$ και $\Gamma$ αντίστοιχα.**

**α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $P\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές.**

**β. Αν η γωνία $APB$ είναι $40^o$ να υπολογίσετε τη γωνία $AOB$.**

**Λύση**

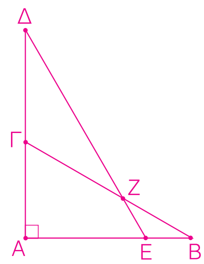



**α.** Η $PO$ είναι διακεντρική ευθεία, οπότε είναι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{P}$.
Η ακτίνα ΟΜ είναι κάθετη στην εφαπτόμενη ΔΓ, οπότε $OM \perp \Delta\Gamma$.
Στο τρίγωνο $P\Delta\Gamma$ η $PM$ είναι διχοτόμος και ύψος, οπότε το τρίγωνο $P\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές.

**β.** Είναι $OA \perp AP$ και $OB \perp BP$, οπότε $\widehat{A} = \widehat{B} = 90^o$.
Στο τετράπλευρο $OAPB$ είναι

$$\hat{O} + \hat{A} + \hat{P} + \hat{B} = 360^o \Leftrightarrow \hat{O} + 90^o + 40^o + 90^o = 360^o \Leftrightarrow \hat{O} + 220^o = 360^o \Leftrightarrow \hat{O} = 140^o.$$

## 114 Θέμα 2 - 1639




**Στα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ (γωνία $A$ ορθή) του διπλανού σχήματος ισχύει $\widehat{B} = \widehat{\Delta} = 30^o$.**

**α. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετράπλευρου $AEZ\Gamma$.**

**β. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $\Gamma Z\Delta$ και $EBZ$ είναι ισοσκελή.**

**Λύση**

**α.** • Στο τρίγωνο $A\Delta E$ είναι $\hat{E} = 90^o - \hat{\Delta} = 90^o - 30^o = 60^o$.

Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\hat{\Gamma} = 90^o - \hat{B} = 90^o - 30^o = 60^o$.

• Στο τετράπλευρο $AEZ\Gamma$ είναι

$$\widehat{A} + \widehat{E} + \widehat{Z} + \widehat{\Gamma} = 360^o \Leftrightarrow 90^o + 60^o + \widehat{Z} + 60^o = 360^o \Leftrightarrow \widehat{Z} + 210^o = 360^o \Leftrightarrow \hat{Z} = 360^o - 210^o \Leftrightarrow \hat{Z} = 150^o.$$

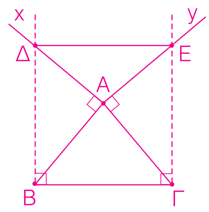
**β.** • Είναι $\hat{\Delta}=30^{\circ}$ και $\mathrm{E}\hat{\mathrm{Z}}\Gamma+\Delta\hat{\mathrm{Z}}\Gamma=180^{\circ} \Leftrightarrow 150^{\circ}+\Delta\hat{\mathrm{Z}}\Gamma=180^{\circ} \Leftrightarrow \Delta\hat{\mathrm{Z}}\Gamma=30^{\circ}$.

Άρα $\hat{\Delta}=\Delta\hat{\mathrm{Z}}\Gamma$, οπότε το τρίγωνο ΓΖΔ είναι ισοσκελές.

• Είναι $\mathrm{E}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{B}=\Gamma\hat{\mathrm{Z}}\Delta=30^{\circ}$ και $\hat{\mathrm{B}}=30^{\circ}$, οπότε $\mathrm{E}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{B}=\hat{\mathrm{B}}$.

Άρα το τρίγωνο ΕΒΖ είναι ισοσκελές.

## 115 Θέμα 2 - 1556

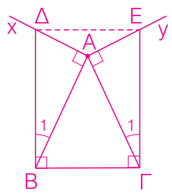



**Δίνεται το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{AB}=\mathrm{A}\Gamma$. Φέρουμε, εκτός του τριγώνου, τις ημιευθείες Αx και Αy τέτοιες ώστε $\mathrm{A}x \perp \mathrm{AB}$ και $\mathrm{A}y \perp \mathrm{A}\Gamma$, όπως στο διπλανό σχήμα. Οι κάθετες στην πλευρά ΒΓ στα σημεία Β και Γ τέμνουν τις Αx και Αy στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα.**

**α. Να αποδείξετε ότι $\mathrm{B}\Delta=\Gamma\mathrm{E}$.**

**β. Αν η γωνία ΒΑΓ είναι ίση με $80^{\circ}$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΔΑΕ.**

**Λύση**




**α.** Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, οπότε $\hat{\mathrm{B}}=\hat{\Gamma}$.

Άρα $\hat{\mathrm{B}}_1=\hat{\Gamma}_1$ ως συμπληρώματα ίσων γωνιών.

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ έχουν:
- $\mathrm{AB}=\mathrm{A}\Gamma$
- $\hat{\mathrm{B}}_1=\hat{\Gamma}_1$

Οπότε είναι ίσα, άρα $\mathrm{B}\Delta=\Gamma\mathrm{E}$.

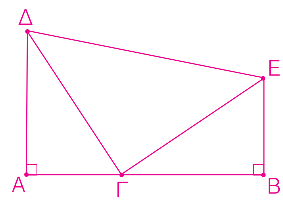
**β.** Επειδή τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα, έχουμε $\mathrm{A}\Delta=\mathrm{AE}$, οπότε $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{E}=\Delta\hat{\mathrm{E}}\mathrm{A}$.

Είναι $\Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E}=360^{\circ}-\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma-\Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{B}-\mathrm{E}\hat{\mathrm{A}}\Gamma=360^{\circ}-80^{\circ}-90^{\circ}-90^{\circ}=100^{\circ}$.

Στο τρίγωνο ΑΔΕ είναι $\Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E}+\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{E}+\Delta\hat{\mathrm{E}}\mathrm{A}=180^{\circ} \Leftrightarrow 100^{\circ}+\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{E}+\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{E}=180^{\circ} \Leftrightarrow 2\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{E}=80^{\circ} \Leftrightarrow \mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{E}=40^{\circ}$.

Οπότε και $\mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\Delta=40^{\circ}$.

## 116 Θέμα 2 - 1641




**Στο διπλανό σχήμα οι γωνίες $\hat{\mathrm{A}}$, $\hat{\mathrm{B}}$ είναι ορθές και επιπλέον $\mathrm{A}\Delta=\mathrm{B}\Gamma$ και $\mathrm{A}\Gamma=\mathrm{BE}$. Να αποδείξετε ότι:**

**α. Τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΒΓΕ είναι ίσα.**

**β. Αν η γωνία $\mathrm{E}\hat{\Gamma}\mathrm{B}=40^{\circ}$, τότε το τρίγωνο ΔΓΕ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.**

**Λύση**

**α.** Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΓΔ και ΒΓΕ έχουν:
- $\mathrm{A}\Delta=\mathrm{B}\Gamma$
- $\mathrm{A}\Gamma=\mathrm{BE}$

Οπότε είναι ίσα.

**β.** Επειδή τα τρίγωνα ΑΓΔ, ΒΓΕ είναι ίσα, έχουμε:
- $\mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma=\mathrm{E}\hat{\Gamma}\mathrm{B}=40^{\circ}$
- $\Gamma\Delta=\Gamma\mathrm{E}$

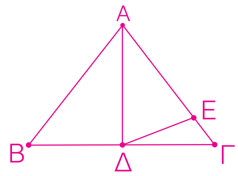
Οπότε το τρίγωνο ΔΓΕ είναι ισοσκελές.

Στο τρίγωνο ΔΑΓ είναι $\mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma+\mathrm{A}\hat{\Gamma}\Delta=90^{\circ} \Leftrightarrow 40^{\circ}+\mathrm{A}\hat{\Gamma}\Delta=90^{\circ} \Leftrightarrow \mathrm{A}\hat{\Gamma}\Delta=50^{\circ}$.

Είναι $\Delta\hat{\Gamma}\mathrm{A}+\mathrm{E}\hat{\Gamma}\mathrm{B}+\Delta\hat{\Gamma}\mathrm{E}=180^{\circ} \Leftrightarrow 50^{\circ}+40^{\circ}+\Delta\hat{\Gamma}\mathrm{E}=180^{\circ} \Leftrightarrow \Delta\hat{\Gamma}\mathrm{E}=90^{\circ}$.

Άρα το τρίγωνο ΔΓΕ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

## 117 Θέμα 2 - 1661




**Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $ΑΒ = ΑΓ$ και η διάμεσός του $ΑΔ$ τέτοια ώστε $Β\hat{Α}Δ = 30^o$ . Θεωρούμε σημείο $Ε$ στην $ΑΓ$ τέτοιο ώστε $ΑΔ = ΑΕ$ .**

**α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισόπλευρο.**

**β. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $ΑΔΕ$ .**

**γ. Να υπολογίσετε τη γωνία $ΕΔΓ$ .**

**Λύση**

**α.** Επειδή $ΑΒ = ΑΓ$ , το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελές, άρα η διάμεσος $ΑΔ$ είναι ύψος και διχοτόμος του τριγώνου. Επειδή η $ΑΔ$ είναι διχοτόμος του τριγώνου $ΑΒΓ$ , είναι $Δ\hat{Α}Γ = Β\hat{Α}Δ = 30^o$ , οπότε $\hat{Α} = 60^o$ .

Είναι $\hat{Α} + \hat{Β} + \hat{Γ} = 180^o \Leftrightarrow 60^o + \hat{Β} + \hat{Β} = 180^o \Leftrightarrow 2\hat{Β} = 120^o \Leftrightarrow \hat{Β} = 60^o$ .

Οπότε και $\hat{Γ} = 60^o$ .

Για το τρίγωνο $ΑΒΓ$ ισχύει $\hat{Α} = \hat{Β} = \hat{Γ} = 60^o$ , άρα είναι ισόπλευρο.

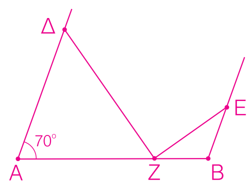
**β.** Επειδή $ΑΔ = ΑΕ$ το τρίγωνο $ΑΔΕ$ είναι ισοσκελές, οπότε $Α\hat{Δ}Ε = Α\hat{Ε}Δ$ .

Στο τρίγωνο $ΑΔΕ$ έχουμε:

$Δ\hat{Α}Ε + Α\hat{Δ}Ε + Α\hat{Ε}Δ = 180^o \Leftrightarrow 30^o + 2Α\hat{Δ}Ε = 180^o \Leftrightarrow Α\hat{Δ}Ε = 75^o$ , οπότε και $Α\hat{Ε}Δ = 75^o$ .

**γ.** Είναι $Ε\hat{Δ}Γ = Α\hat{Δ}Γ - Α\hat{Δ}Ε = 90^o - 75^o = 15^o$ .

## 118 Θέμα 2 - 1640




**Στο διπλανό σχήμα, οι $ΑΔ$ και $ΒΕ$ είναι παράλληλες. Επιπλέον ισχύουν $ΑΔ = ΑΖ$ , $ΒΕ = ΒΖ$ και $\hat{Α} = 70^o$ .**

**α. Να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων $ΑΔΖ$ και $ΒΖΕ$ .**

**β. Να αποδείξετε ότι $Δ\hat{Ζ}Ε = 90^o$ .**

**Λύση**

**α.** • Επειδή $ΑΔ = ΑΖ$ , έχουμε $\hat{Δ} = Δ\hat{Ζ}Α$ .

Στο τρίγωνο $ΑΔΖ$ , είναι: $\hat{Α} + \hat{Δ} + Δ\hat{Ζ}Α = 180^o \Leftrightarrow 70^o + 2\hat{Δ} = 180^o \Leftrightarrow 2\hat{Δ} = 110^o \Leftrightarrow \hat{Δ} = 55^o$ .

Οπότε $Δ\hat{Ζ}Α = \hat{Δ} = 55^o$ .

• Οι γωνίες $\hat{Α}$ και $\hat{Β}$ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΔ, ΒΕ που τέμνονται από την ΑΒ, οπότε είναι παραπληρωματικές.

Άρα $\hat{Α} + \hat{Β} = 180^o \Leftrightarrow 70^o + \hat{Β} = 180^o \Leftrightarrow \hat{Β} = 110^o$ .

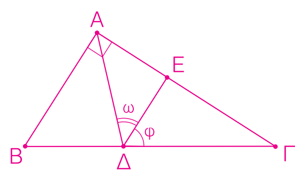
• Επειδή $ΒΕ = ΒΖ$ , έχουμε $Ε\hat{Ζ}Β = \hat{Ε}$ .

Στο τρίγωνο $ΒΕΖ$ , είναι $\hat{Β} + \hat{Ε} + Ε\hat{Ζ}Β = 180^o \Leftrightarrow 110^o + 2\hat{Ε} = 180^o \Leftrightarrow 2\hat{Ε} = 70^o \Leftrightarrow \hat{Ε} = 35^o$ .

Οπότε $Ε\hat{Ζ}Β = \hat{Ε} = 35^o$ .

**β.** Είναι $Δ\hat{Ζ}Ε = 180^o - Δ\hat{Ζ}Α - Ε\hat{Ζ}Β = 180^o - 55^o - 35^o = 90^o$ .

## 119 Θέμα 2 - 1605




**Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ $(\hat{Α} = 90^o)$ . Έστω ότι η $ΑΔ$ είναι η διχοτόμος της γωνίας $Α$ και η $ΔΕ // ΑΒ$ . Αν η γωνία $\hat{Β} = 20^o + \hat{Γ}$ ,**

**α. να υπολογίσετε:**

**i. τις γωνίες $\hat{Β}$ και $\hat{Γ}$ του τριγώνου $ΑΒΓ$**

**ii. τις γωνίες $\hat{φ}$ και $\hat{ω}$ .**

**β. να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $ΑΕΔ$ είναι ισοσκελές.**

**Λύση**

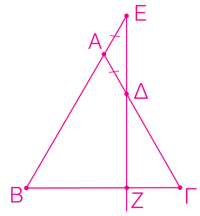
**α. i.** Είναι $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^o \Leftrightarrow 90^o+20^o+\hat{\Gamma}+\hat{\Gamma}=180^o \Leftrightarrow 2\hat{\Gamma}=70^o \Leftrightarrow \hat{\Gamma}=35^o$ .
Οπότε $\hat{B}=20^o+\hat{\Gamma}=20^o+35^o=55^o$ .

**ii.** Επειδή η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ , ισχύει ότι $B\hat{A}\Delta=\Delta\hat{A}\Gamma=45^o$ .

Είναι:
- $\hat{\omega}=B\hat{A}\Delta=45^o$ , ως εντός εναλλάξ
- $\hat{\varphi}=\hat{B}=55^o$ , ως εντός, εκτός και επί τα αυτά μέρη.

**β.** Είναι $\Delta\hat{A}E=A\hat{\Delta}E=45^o$ , οπότε το τρίγωνο $AE\Delta$ είναι ισοσκελές.

## 120 Θέμα 2 - 1689




**Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ . Θεωρούμε σημείο $E$ στην προέκταση της $BA$ (προς το $A$ ) και σημείο $\Delta$ στο εσωτερικό της πλευράς $A\Gamma$ , ώστε $AE=A\Delta$ .**

**α. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $A\Delta E$ .**

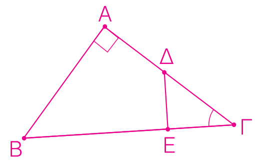
**β. Αν $Z$ είναι το σημείο τομής της προέκτασης της $E\Delta$ (προς το $\Delta$ ) με την $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι η $EZ$ είναι κάθετη στην $B\Gamma$ .**

**Λύση**

**α.** Είναι $\hat{A}=\hat{B}=\hat{\Gamma}=60^o$ και $\Delta\hat{A}E=180^o-\hat{A}=180^o-60^o=120^o$ .
Επειδή το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές, ισχύει ότι $A\hat{\Delta}E=\hat{E}$ .
Στο τρίγωνο $A\Delta E$ έχουμε $A\hat{\Delta}E+\hat{E}+\Delta\hat{A}E=180^o \Leftrightarrow 2A\hat{\Delta}E+120^o=180^o \Leftrightarrow 2A\hat{\Delta}E=60^o \Leftrightarrow A\hat{\Delta}E=30^o$ .
Οπότε και $\hat{E}=30^o$ .

**β.** Είναι $A\hat{\Delta}E=Z\hat{\Delta}\Gamma=30^o$ , ως κατακορυφήν και $\hat{\Gamma}=60^o$ .
Στο τρίγωνο $\Delta Z\Gamma$ έχουμε $Z\hat{\Delta}\Gamma+\Delta\hat{Z}\Gamma+\hat{\Gamma}=180^o \Leftrightarrow 30^o+\Delta\hat{Z}\Gamma+60^o=180^o \Leftrightarrow \Delta\hat{Z}\Gamma=90^o$ , άρα $EZ\perp B\Gamma$ .

## 121 Θέμα 2 - 1603




**Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ $(\hat{A}=90^o)$ με $\hat{\Gamma}=40^o$ . Έστω $\Delta$ τυχαίο σημείο της πλευράς $A\Gamma$ και $\Delta E\perp B\Gamma$ . Να υπολογίσετε:**

**α. τις γωνίες του τριγώνου $\Delta E\Gamma$**

**β. τις γωνίες του τετράπλευρου $A\Delta EB$ .**

**Λύση**

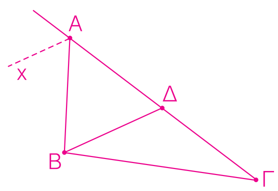
**α.** Στο τρίγωνο $\Delta E\Gamma$ είναι $\hat{E}=90^o$ και $E\hat{\Delta}\Gamma=90^o-\hat{\Gamma}=90^o-40^o=50^o$ .

**β.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\hat{B}=90^o-\hat{\Gamma}=50^o$ .

Είναι $A\hat{\Delta}E=180^o-E\hat{\Delta}\Gamma=180^o-50^o=130^o$ .

Οπότε στο $A\Delta EB$ έχουμε $\hat{A}=\hat{E}=90^o$ , $\hat{B}=50^o$ και $\hat{\Delta}=130^o$ .

## 122 Θέμα 2 - 1596




**Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB<A\Gamma$ . Έστω $Ax$ η διχοτόμος της εξωτερικής του γωνίας $\hat{A}_{\varepsilon\xi}=120^o$ . Από την κορυφή $B$ φέρουμε ευθεία παράλληλη στην $Ax$ , η οποία τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο σημείο $\Delta$.**

**α. Να αποδείξετε ότι:**

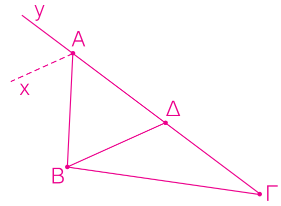
**i. $A\hat{B}\Delta=60^o$**

**ii. το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισόπλευρο.**

**iii. $A\Gamma-AB=\Delta\Gamma$**

**β. Αν η γωνία $B\hat{\Delta}A$ είναι διπλάσια της γωνίας $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου $AB\Gamma$ , να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $B\Delta\Gamma$ .**

**Λύση**




**α. i.** Είναι $A\hat{B}\Delta = B\hat{A}x = \frac{\widehat{A}_{\varepsilon\xi}}{2} = \frac{120^o}{2} = 60^o$, ως εντός εναλλάξ.

**ii.** Είναι $B\widehat{A}\Delta = 180^o - \widehat{A}_{\varepsilon\xi} = 180^o - 120^o = 60^o$ .

Στο τρίγωνο $AB\Delta$ έχουμε

$B\widehat{A}\Delta + A\widehat{B}\Delta + A\widehat{\Delta}B = 180^o \Leftrightarrow 60^o + 60^o + A\widehat{\Delta}B = 180^o \Leftrightarrow A\widehat{\Delta}B = 60^o$

Άρα $A\widehat{B}\Delta = A\widehat{\Delta}B$ , οπότε το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισόπλευρο.

**iii.** Είναι $A\Gamma - AB = A\Gamma - A\Delta = \Delta\Gamma$ .

**β.** Είναι:
- $B\hat{\Delta}A = 2\hat{\Gamma} \Leftrightarrow 60^o = 2\hat{\Gamma} \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 30^o$
- $A\hat{\Delta}B = 60^o$ , οπότε $B\hat{\Delta}\Gamma = 180^o - 60^o = 120^o$
- $\Delta\hat{B}\Gamma = 180^o - B\hat{\Delta}\Gamma - \hat{\Gamma} = 180^o - 120^o - 30^o = 30^o$

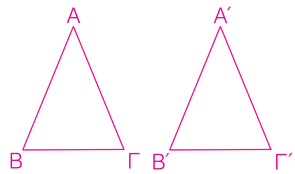
## 123 Θέμα 2 - 1565

**Έστω δυο ισοσκελή τρίγωνα $AB\Gamma$ $(AB = A\Gamma)$ και $A'B'\Gamma'$ $(A'B' = A'\Gamma')$ .**

**α. Να αποδείξετε ότι: αν ισχύει $AB = A'B'$ και $\hat{A} = \hat{A}'$ , τότε τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα.**

**β. Να αποδείξετε ότι: αν ισχύει $A\Gamma = A'\Gamma'$ και $\hat{B} = \hat{B}'$ , τότε τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα.**

**Λύση**




**α.** Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ έχουν:
- $AB = A'B'$
- $A\Gamma = A'\Gamma'$
- $\hat{A} = \hat{A}'$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ).

**β.** Επειδή τα τρίγωνα είναι ισοσκελή έχουμε $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ και $\hat{B}' = \hat{\Gamma}'$.

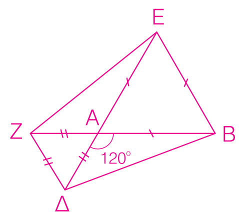
Επειδή $\hat{B} = \hat{B}'$ , έχουμε $\hat{\Gamma} = \widehat{\Gamma'}$ .

Επειδή τα τρίγωνα έχουν τις δύο γωνίες τους ίσες θα έχουν και τις τρίτες γωνίες τους ίσες, δηλαδή $\hat{A} = \hat{A}'$ .

Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ έχουν:
- $A\Gamma = A'\Gamma'$
- $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$
- $\hat{A} = \hat{A}'$

Οπότε είναι ίσα (ΓΠΓ).

## 124 Θέμα 2 - 1682




**Έστω τρίγωνο $AB\Delta$ με $\hat{A} = 120^o$ . Εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα $\overset{\Delta}{AEB}$ και $\overset{\Delta}{AZ\Delta}$ . Να αποδείξετε ότι:**

**α. Τα τρίγωνα $AEZ$ και $AB\Delta$ είναι ίσα.**

**β. Το τμήμα $\Delta Z$ είναι παράλληλο στο $BE$ .**

**Λύση**

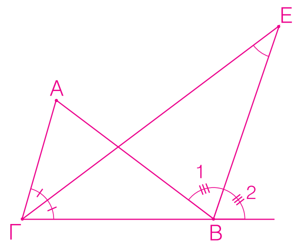
**α.** Τα τρίγωνα $AEZ$ και $AB\Delta$ έχουν:
- $AE = AB$
- $AZ = A\Delta$
- $E\hat{A}Z = \Delta\hat{A}B$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ).

**β.** Είναι:
- $\Delta\widehat{A}B + B\widehat{A}E = 120^o + 60^o = 180^o$ , οπότε τα $\Delta$, $A$ και $E$ είναι συνευθειακά.
- $B\hat{E}A = 60^o$ και $Z\hat{\Delta}A = 60^o$ , οπότε $B\hat{E}A = Z\hat{\Delta}A$ .

Επειδή οι εντός εναλλάξ γωνίες $B\hat{E}\Delta$ και $Z\hat{\Delta}E$ είναι ίσες, έχουμε $EB // Z\Delta$ .

## 125 Θέμα 2 - 1851




**Σε τρίγωνο ΑΒΓ η προέκταση της διχοτόμου της $\hat{\Gamma}$ και της εξωτερικής γωνίας του $\hat{B}$ τέμνονται στο Ε. Δίνεται ότι $A\hat{B}E = 70^o = 2\Gamma\hat{E}B$.**

**α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΓΒΕ είναι ισοσκελές.**

**β. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.**

**Λύση**

**α.** Είναι $\hat{B}_1 = 70^o$ και $2\Gamma\hat{E}B = 70^o \Leftrightarrow \Gamma\hat{E}B = 35^o$.

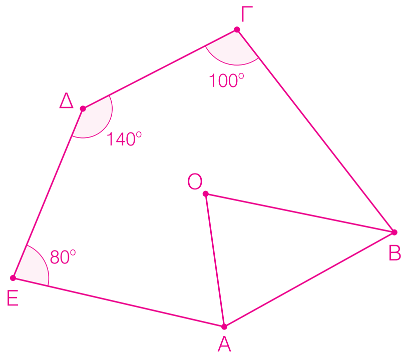
Η ΒΕ είναι διχοτόμος της $\hat{B}_{\varepsilon\xi}$ άρα $\hat{B}_2 = \hat{B}_1 = 70^o$.

Η γωνία $\hat{B}_2$ είναι η εξωτερική του τριγώνου ΕΒΓ, άρα $\hat{B}_2 = E\hat{\Gamma}B + \Gamma\hat{E}B \Leftrightarrow 70^o = E\hat{\Gamma}B + 35^o \Leftrightarrow E\hat{\Gamma}B = 35^o$.

Δηλαδή $E\hat{\Gamma}B = \Gamma\hat{E}B = 35^o$, άρα το τρίγωνο ΓΒΕ είναι ισοσκελές.

**β.**
- Η ΒΕ είναι εξωτερική διχοτόμος, άρα $\hat{B}_{\varepsilon\xi} = 2\hat{B}_1 = 2\cdot 70^o = 140^o$, οπότε $B = 180^o - 140^o = 40^o$.
- Η ΓΕ διχοτομεί τη γωνία $\hat{\Gamma}$, άρα $\hat{\Gamma} = 2E\hat{\Gamma}B = 70^o$.
- Είναι $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow \hat{A} + 40^o + 70^o = 180^o \Leftrightarrow \hat{A} = 70^o$.

## 126 Θέμα 2 - 12640




**Στο κυρτό πολύγωνο ΑΒΓΔΕ, οι διχοτόμοι των γωνιών του Α και Β τέμνονται στο Ο. Αν η γωνία του Γ ισούται με $100^o$, η γωνία του Δ ισούται με $140^o$ και η γωνία του Ε ισούται με $80^o$ τότε, να υπολογίσετε:**

**α. το μέτρο του αθροίσματος $\hat{A} + \hat{B}$.**

**β. το μέτρο της γωνίας ΑΟΒ.**

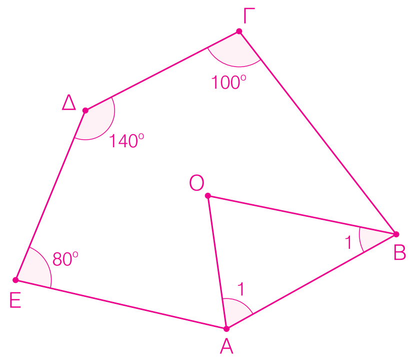
**Λύση**

**α.** Το άθροισμα των γωνιών ενός κυρτού πολυγώνου με ν πλευρές είναι $2\cdot\nu - 4$ ορθές.

Το άθροισμα των γωνιών του πενταγώνου ΑΒΓΔΕ είναι:

$$(2\nu - 4)\cdot 90^o = (2\cdot 5 - 4)\cdot 90^o = 6\cdot 90^o = 540^o$$

Δηλαδή έχουμε: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} + \hat{E} = 540^o \Leftrightarrow \hat{A} + \hat{B} + 100^o + 140^o + 80^o = 540^o \Leftrightarrow \hat{A} + \hat{B} = 220^o$



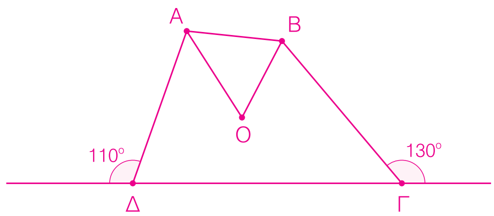

**β.** Στο τρίγωνο ΑΟΒ είναι: $\hat{A}_1 + \hat{B}_1 + \hat{O} = 180^o$ (1).

Όμως ΑΟ και ΒΟ είναι διχοτόμοι των γωνιών Α και Β αντίστοιχα, άρα:

$\hat{A}_1 = \dfrac{\hat{A}}{2}$ και $\hat{B}_1 = \dfrac{\hat{B}}{2}$. Έτσι $\hat{A}_1 + \hat{B}_1 = \dfrac{\hat{A}}{2} + \dfrac{\hat{B}}{2} = \dfrac{\hat{A} + \hat{B}}{2} \overset{\alpha.}{=} \dfrac{220^o}{2} = 110^o$.

Οπότε η (1) $\Leftrightarrow 110^o + \hat{O} = 180^o \Leftrightarrow \hat{O} = 70^o$, δηλαδή $A\hat{O}B = 70^o$.

## 127 Θέμα 2 - 12644




**Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ, η εξωτερική γωνία της Γ, ισούται με $130^o$ και η εξωτερική γωνία της Δ ισούται με $110^o$. Αν οι διχοτόμοι των γωνιών του Α και Β τέμνονται στο Ο τότε, να υπολογίσετε:**

**α. τα μέτρα των γωνιών Γ και Δ του τετραπλεύρου.**

**β. το μέτρο του αθροίσματος $\hat{A} + \hat{B}$.**

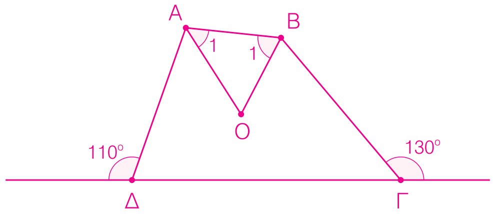
**γ. το μέτρο της γωνίας ΑΟΒ.**

**Λύση**

**α.** Είναι: • $\hat{\Gamma}+\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi.}=180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma}+130^\circ=180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma}=50^\circ$

• $\hat{\Delta}+\hat{\Delta}_{\varepsilon\xi.}=180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Delta}+110^\circ=180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Delta}=70^\circ$

**β.** Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ, έχουμε: $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}+\hat{\Delta}=360^\circ \Leftrightarrow \hat{A}+\hat{B}+50^\circ+70^\circ=360^\circ \Leftrightarrow \hat{A}+\hat{B}=240^\circ$




**γ.** Στο τρίγωνο ΑΟΒ είναι: $\hat{A}_1+\hat{B}_1+\hat{O}=180^\circ$ (1).

Οι ΑΟ και ΒΟ είναι διχοτόμοι των γωνιών Α και Β αντίστοιχα,

άρα: $\hat{A}_1=\frac{\hat{A}}{2}$ και $\hat{B}_1=\frac{\hat{B}}{2}$.

Οπότε $\hat{A}_1+\hat{B}_1=\frac{\hat{A}}{2}+\frac{\hat{B}}{2}=\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}=\frac{240^\circ}{2}=120^\circ$.

Άρα η (1) $\Leftrightarrow 120^\circ+\hat{O}=180^\circ \Leftrightarrow \hat{O}=60^\circ$.

Δηλαδή $A\hat{O}B=60^\circ$.

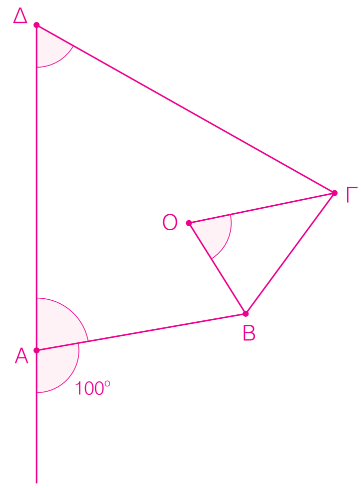
## 128 Θέμα 2 - 13619

**Θεωρούμε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ του σχήματος με $\hat{A}_{\varepsilon\xi}=100^\circ$ και $\hat{B}+\hat{\Gamma}=220^\circ$.**

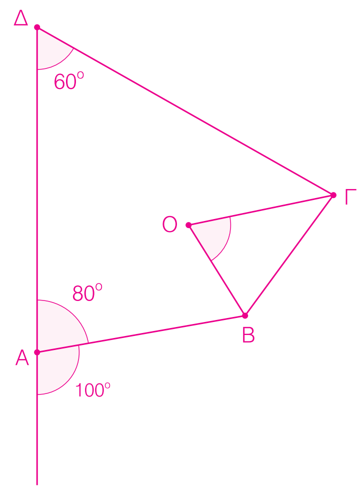
**Αν οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ τέμνονται στο Ο, τότε:**

**α. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{\Delta}$ του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.**

**β. Να αποδείξετε ότι $B\hat{O}\Gamma=70^\circ$.**




**Λύση**




**α.** • Είναι: $\hat{A}_{\varepsilon\xi}+\hat{A}=180^\circ \Leftrightarrow 100^\circ+\hat{A}=180^\circ \Leftrightarrow \hat{A}=80^\circ$

• Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ ισχύει:

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}+\hat{\Delta}=360^\circ \Leftrightarrow 80^\circ+220^\circ+\hat{\Delta}=360^\circ$$

$$\Leftrightarrow \hat{\Delta}=360^\circ-80^\circ-220^\circ \Leftrightarrow \hat{\Delta}=60^\circ$$

**β.** Στο τρίγωνο ΒΓΟ ισχύει:

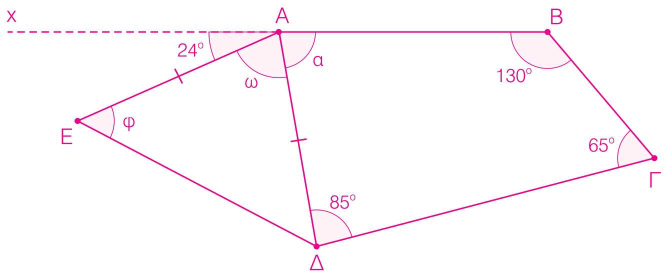
$$O\hat{B}\Gamma+B\hat{\Gamma}O+B\hat{O}\Gamma=180^\circ\ ,\ (1)$$

Είναι $O\hat{B}\Gamma+B\hat{\Gamma}O=\frac{\hat{B}}{2}+\frac{\hat{\Gamma}}{2}=\frac{\hat{B}+\hat{\Gamma}}{2}=\frac{220^\circ}{2}=110^\circ$.

Οπότε η (1) $\Leftrightarrow 110^\circ+B\hat{O}\Gamma=180^\circ \Leftrightarrow B\hat{O}\Gamma=70^\circ$.

## 129 Θέμα 2 - 13749

**Στο παρακάτω σχήμα το ΑΒΓΔΕ είναι ένα πεντάγωνο στο οποίο η διαγώνιος ΑΔ είναι ίση με την πλευρά ΑΕ και η ημιευθεία Αx είναι προέκταση της ΒΑ προς το Α. Να υπολογίσετε δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας:**




**α. Τη γωνία $\hat{\alpha}$.**

**β. Τη γωνία $\hat{\omega}$.**

**γ. Τη γωνία $\hat{\varphi}$.**

**Λύση**

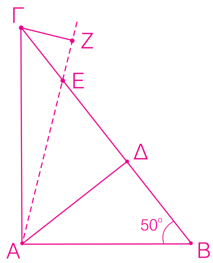
**α.** Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ έχουμε $\hat{\alpha}+130^\circ+65^\circ+85^\circ=360^\circ \Leftrightarrow \hat{\alpha}=360^\circ-280^\circ \Leftrightarrow \hat{\alpha}=80^\circ$ .

**β.** Είναι $24^\circ+\hat{\omega}+\hat{\alpha}=180^\circ \Leftrightarrow 24^\circ+\hat{\omega}+80^\circ=180^\circ \Leftrightarrow \hat{\omega}=76^\circ$

**γ.** Είναι:
- $ΑΔ=ΑΕ$ άρα το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές με βάση την πλευρά ΕΔ , οπότε $\hat{\varphi}=Α\hat{Δ}Ε$ .
- $\varphi+Α\hat{Δ}Ε+\omega=180^\circ \Leftrightarrow \varphi+\varphi+76^\circ=180^\circ \Leftrightarrow 2\varphi=180^\circ-76^\circ \Leftrightarrow 2\varphi=104^\circ \Leftrightarrow \varphi=52^\circ$

## 130 Θέμα 4 - 1708

**Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{Α}=90^\circ$) με $\hat{Β}=50^\circ$ , το ύψος του ΑΔ και σημείο Ε στην ΔΓ ώστε ΔΕ = ΒΔ . Το σημείο Ζ είναι η προβολή του Γ στην ΑΕ .**




**α. Να αποδείξετε ότι:**

**i. Το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές.**

**ii. $Γ\hat{Α}Ε=10^\circ$**

**β. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΖΓΕ .**

**Λύση**

**α. i.** Στο τρίγωνο ΑΒΕ , το ΑΔ είναι ύψος και διάμεσος. Οπότε το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές.

**ii.** Το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές, οπότε $Α\hat{Ε}Β=\hat{Β}=50^\circ$ .

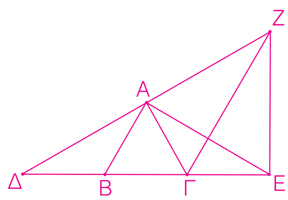
Είναι $Ε\hat{Α}Β+\hat{Β}+Α\hat{Ε}Β=180^\circ \Leftrightarrow Ε\hat{Α}Β+50^\circ+50^\circ=180^\circ \Leftrightarrow Ε\hat{Α}Β=80^\circ$ .

Οπότε $Γ\hat{Α}Ε=Γ\hat{Α}Β-Ε\hat{Α}Β=90^\circ-80^\circ=10^\circ$ .

**β.** Είναι:
- $\hat{Ζ}=90^\circ$
- $Ζ\hat{Ε}Γ=Α\hat{Ε}Β=50^\circ$
- $Ζ\hat{Γ}Ε+\hat{Ζ}+Ζ\hat{Ε}Γ=180^\circ \Leftrightarrow Ζ\hat{Γ}Ε+90^\circ+50^\circ=180^\circ \Leftrightarrow Ζ\hat{Γ}Ε=40^\circ$

## 131 Θέμα 4 - 1819

**Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και στην προέκταση της ΓΒ (προς το Β ) θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε ΒΔ = ΒΓ , ενώ στην προέκταση της ΒΓ (προς το Γ ) θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο ώστε ΓΕ = ΒΓ . Φέρουμε την κάθετη στην ΕΔ στο σημείο Ε , η οποία τέμνει την προέκταση της ΔΑ στο Ζ .**

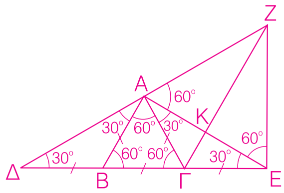



**α. Να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων ΓΑΕ και ΒΔΑ .**

**β. Να αποδείξετε ότι η ΓΖ είναι μεσοκάθετος του ΑΕ .**

**γ. Να αποδείξετε ότι ΑΒ // ΓΖ .**

**Λύση**




**α.** Είναι $ΑΒ = ΒΓ = ΓΑ = ΒΔ = ΓΕ$.
Από τα ισοσκελή τρίγωνα $ΓΑΕ$ και $ΒΔΑ$ έχουμε αντίστοιχα:

- $Α\hat{Γ}Ε = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$
- $Γ\hat{Α}Ε = Α\hat{Ε}Γ = \dfrac{180^\circ - 120^\circ}{2} = \dfrac{60^\circ}{2} = 30^\circ$
- $Α\hat{Β}Δ = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$
- $Β\hat{Α}Δ = Β\hat{Δ}Α = \dfrac{180^\circ - 120^\circ}{2} = \dfrac{60^\circ}{2} = 30^\circ$

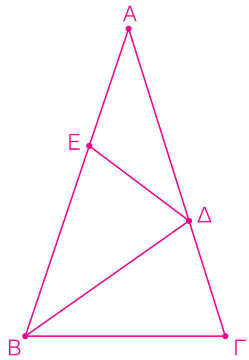
**β.** Είναι:
- $Ζ\widehat{Α}Ε = 180^\circ - Δ\widehat{Α}Ε = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$
- $Α\widehat{Ε}Ζ = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$

Οπότε $Ζ\widehat{Α}Ε = Α\widehat{Ε}Ζ$, άρα $ΖΑ = ΖΕ$.
Επειδή $ΖΑ = ΖΕ$ και $ΓΑ = ΓΕ$ τα $Γ$, $Ζ$ ανήκουν στη μεσοκάθετο του $ΑΕ$.
Άρα η $ΓΖ$ είναι η μεσοκάθετος του $ΑΕ$.

**γ.** Είναι:
- $ΓΖ \perp ΑΕ$, αφού η $ΓΖ$ μεσοκάθετη του $ΑΕ$
- $Β\widehat{Α}Ε = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$, άρα $ΒΑ \perp ΑΕ$

Επομένως $ΑΒ \,//\, ΓΖ$.

## 132 Θέμα 4 - 13537




**Στο διπλανό σχήμα δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$, σημείο Δ της πλευράς ΑΓ, ώστε $ΑΔ = ΒΔ = ΒΓ$ και σημείο Ε της πλευράς ΑΒ, ώστε $ΑΕ = ΓΔ$.**

**α. Να αποδείξετε ότι:**

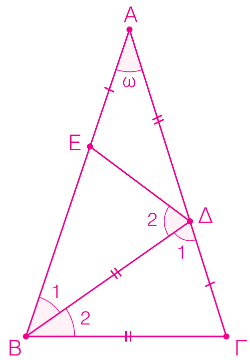
**i.** $\hat{Γ} = 2\hat{Α}$.

**ii.** $\hat{Α} = 36^\circ$.

**iii. Το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.**

**β. Στην προέκταση της ΔΕ προς το Ε θεωρούμε σημείο Ζ, ώστε $ΔΖ = ΑΓ$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΔΖ είναι ισοσκελές.**

### Λύση




**α.** Έστω $\hat{Α} = ω$ (1).

**i.** Είναι $ΑΔ = ΒΔ$, άρα το τρίγωνο $ΑΒΔ$ είναι ισοσκελές με βάση $ΑΒ$ και
$\hat{Β}_1 = ω$ (2).

Η γωνία $\hat{Δ}_1$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $ΑΒΔ$, άρα είναι
$\hat{Δ}_1 = \hat{Β}_1 + \hat{Α} = ω + ω = 2ω$ (3).
Είναι $ΒΓ = ΒΔ$, άρα το τρίγωνο $ΒΓΔ$ είναι ισοσκελές με βάση $ΓΔ$ και
$\hat{Γ} = \hat{Δ}_1 \Leftrightarrow \hat{Γ} = 2ω \Leftrightarrow \hat{Γ} = 2\hat{Α}$.

**ii.** Το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελές με $ΑΒ = ΑΓ$, οπότε $\hat{Β} = \hat{Γ} \Leftrightarrow \hat{Β} = 2ω$.

Στο τρίγωνο $ΑΒΓ$ ισχύει ότι $\hat{Α} + \hat{Β} + \hat{Γ} = 180^\circ \Leftrightarrow ω + 2ω + 2ω = 180^\circ \Leftrightarrow 5ω = 180^\circ \Leftrightarrow ω = 36^\circ$.

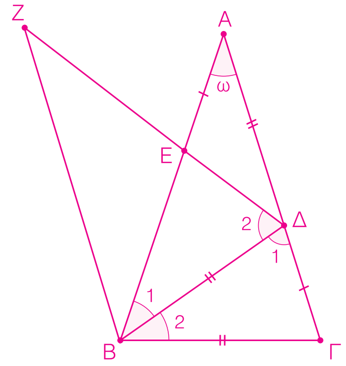
Άρα $\hat{Α} = 36^\circ$.

**iii.** Για να αποδείξουμε ότι το τρίγωνο $ΑΔΕ$ είναι ισοσκελές θα αποδείξουμε ότι $ΑΕ = ΔΕ$.
Είναι $ΑΕ = ΔΓ$, οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι $ΔΕ = ΔΓ$.

Τα τρίγωνα $ΒΓΔ$ και $ΒΕΔ$ τα οποία έχουν:

- $ΒΔ = ΒΔ$
- $ΒΓ = ΒΕ$ , γιατί $ΒΓ = ΑΔ$ και $ΒΕ = ΑΔ$ ως διαφορές των ίσων τμημάτων $ΑΒ = ΑΓ$ και $ΑΕ = ΓΔ$
- $\hat{Β}_1 = \hat{Β}_2$ , αφού $\hat{Β}_1 = ω = 36^\circ$ και $\hat{Β}_2 = \hat{Β} - \hat{Β}_1 = 2ω - ω = 36^\circ$

Άρα είναι ίσα, (ΠΓΠ), οπότε $ΔΕ = ΔΓ$ .




**β.** Είναι $ΒΓ = ΒΕ$ , οπότε $\hat{Δ}_1 = \hat{Δ}_2$ .

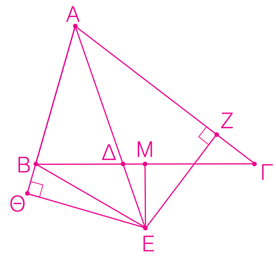
Έχουμε ότι $\hat{Δ}_1 = 72^\circ$ , άρα $\hat{Δ}_2 = 72^\circ$ .

Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΖΒΔ έχουν:

- $ΒΓ = ΒΔ$ ,
- $ΑΓ = ΖΔ$ ,
- $\hat{Γ} = \hat{Δ}_2 = 72^\circ$ ,

Άρα είναι ίσα, (ΠΓΠ). Όμως το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελές, οπότε και το τρίγωνο $ΒΔΖ$ είναι ισοσκελές.

## 133 Θέμα 4 - 1707




**Στο τρίγωνο $ΑΒΓ$ του διπλανού σχήματος, η κάθετη από το μέσο $Μ$ της $ΒΓ$ τέμνει την προέκταση της διχοτόμου $ΑΔ$ στο σημείο $Ε$ .**
**Αν $Θ$ , $Ζ$ είναι οι προβολές του $Ε$ στις $ΑΒ$ , $ΑΓ$ , να αποδείξετε ότι:**

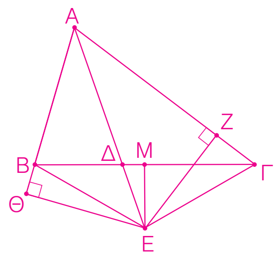
**α. Το τρίγωνο $ΕΒΓ$ είναι ισοσκελές.**

**β. Τα τρίγωνα $ΘΒΕ$ και $ΖΓΕ$ είναι ίσα.**

**γ. $Α\hat{Γ}Ε + Α\hat{Β}Ε = 180^\circ$**

**Λύση**

**α.** Η $ΜΕ$ είναι η μεσοκάθετος του $ΒΓ$ , οπότε $ΕΒ = ΕΓ$ , άρα το τρίγωνο $ΕΒΓ$ είναι ισοσκελές.




**β.** Επειδή το $Ε$ ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας $\hat{Α}$ , θα ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας, οπότε $ΕΘ = ΕΖ$ . Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΘΒΕ$ και $ΖΓΕ$ έχουν:

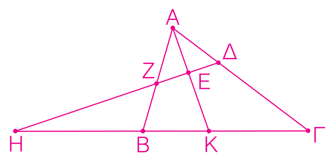
- $ΕΒ = ΕΓ$
- $ΕΘ = ΕΖ$

Οπότε είναι ίσα.

**γ.** Επειδή τα τρίγωνα $ΘΒΕ$ και $ΖΓΕ$ είναι ίσα, έχουμε $Α\hat{Γ}Ε = Θ\hat{Β}Ε$ .

Οπότε $Α\hat{Γ}Ε + Α\hat{Β}Ε = Θ\hat{Β}Ε + Α\hat{Β}Ε = 180^\circ$ .

## 134 Θέμα 4 - 1792




**Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $ΑΒ < ΑΓ$ . Φέρουμε τη διχοτόμο του $ΑΚ$ και σε τυχαίο σημείο της $Ε$ φέρουμε ευθεία κάθετη στη διχοτόμο $ΑΚ$ , η οποία τέμνει τις $ΑΒ$ και $ΑΓ$ στα σημεία $Ζ$ και $Δ$ αντίστοιχα και την προέκταση της $ΓΒ$ στο σημείο $Η$ . Να αποδείξετε ότι:**

**α.** $Ζ\hat{Δ}Γ = 90^\circ + \frac{\hat{Α}}{2}$ **β.** $ΖΚ = ΚΔ$ **γ.** $Ζ\hat{Η}Γ = \frac{\hat{Β} - \hat{Γ}}{2}$

**Λύση**

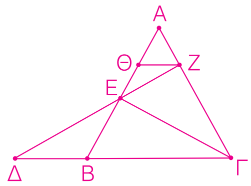
**α.** Η $Ζ\hat{Δ}Γ$ είναι εξωτερική γωνία στο τρίγωνο $ΑΕΔ$ , οπότε $Ζ\hat{Δ}Γ = Δ\hat{Ε}Α + Ε\hat{Α}Δ = 90^\circ + \frac{\hat{Α}}{2}$ .

**β.** Στο τρίγωνο $ΑΖΔ$ η $ΑΕ$ είναι διχοτόμος και ύψος, άρα είναι και διάμεσος.
Οπότε η $ΑΕ$ είναι μεσοκάθετος του $ΖΔ$ .
Επειδή το $Κ$ ανήκει στη μεσοκάθετο του $ΖΔ$ , έχουμε $ΚΖ = ΚΔ$ .

**γ.** Στο τρίγωνο $ΔΗΓ$ είναι $Z\hat{H}Γ = 180^o - Z\hat{Δ}Γ - \hat{Γ} = = 180^o - (90^o + \frac{\hat{A}}{2}) - \hat{Γ} = 180^o - 90^o - \frac{\hat{A}}{2} - \hat{Γ}$

$$= 90^o - \frac{\hat{A}}{2} - \hat{Γ} = \frac{180^o - \hat{A} - 2\hat{Γ}}{2} = \frac{\hat{B} + \hat{Γ} - 2\hat{Γ}}{2} = \frac{\hat{B} - \hat{Γ}}{2}$$

## 135 Θέμα 4 - 1828




**Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $ΑΒΓ$ και το ύψος του $ΓΕ$. Στην προέκταση της $ΓΒ$ (προς το $Β$) θεωρούμε σημείο $Δ$ τέτοιο ώστε**

$$BΔ = \frac{BΓ}{2}$$

**Αν η ευθεία $ΔΕ$ τέμνει την $ΑΓ$ στο $Ζ$ και $ΖΘ // ΒΓ$ :**

**α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $ΒΔΕ$ είναι ισοσκελές και το τρίγωνο $ΑΘΖ$ είναι ισόπλευρο.**

**β. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $ΘΕΖ$.**

**γ. Να αποδείξετε ότι $ΑΕ = 2ΘΖ$ .**

**δ. Να αποδείξετε ότι $3ΑΒ = 4ΘΒ$ .**

**Λύση**

**α.** • Στο ισόπλευρο τρίγωνο $ΑΒΓ$ το ύψος $ΓΕ$ είναι και διάμεσος , οπότε το $Ε$ είναι το μέσο της $ΑΒ$ .

Οπότε $BΔ = \frac{BΓ}{2} \Leftrightarrow BΔ = \frac{AB}{2} \Leftrightarrow BΔ = BE$ .

Άρα το τρίγωνο $ΒΔΕ$ είναι ισοσκελές.

• Είναι:
- $A\hat{Θ}Z = \hat{B} = 60^o$ , ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη
- $A\hat{Z}Θ = \hat{Γ} = 60^o$ , ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη
- $\hat{A} = 60^o$

Άρα το τρίγωνο $ΑΘΖ$ είναι ισόπλευρο.

**β.** Το τρίγωνο $ΒΔΕ$ είναι ισοσκελές με $\hat{Δ} = Δ\hat{E}B$ και η $\hat{B}$ είναι εξωτερική γωνία, οπότε

$\hat{B} = \hat{Δ} + Δ\hat{E}B \Leftrightarrow 60^o = \hat{Δ} + \hat{Δ} \Leftrightarrow 2\hat{Δ} = 60^o \Leftrightarrow \hat{Δ} = 30^o$.

Οπότε και $Δ\hat{E}B = 30^o$ .

Είναι:
- $E\hat{Θ}Z = 180^o - A\hat{Θ}Z = 180^o - 60^o = 120^o$
- $Θ\hat{E}Z = Δ\hat{E}B = 30^o$
- $Θ\hat{Z}E = \hat{Δ} = 30^o$ , ως εντός εναλλάξ

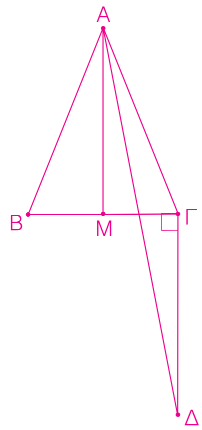
**γ.** Επειδή:
- $Θ\hat{E}Z = Θ\hat{Z}E$ το τρίγωνο $ΘΕΖ$ είναι ισοσκελές , οπότε $ΘΖ = ΘΕ$
- $ΑΘ = ΘΖ$ , αφού το τρίγωνο $ΑΘΖ$ είναι ισόπλευρο έχουμε $ΑΘ = ΘΕ$

Άρα $ΑΕ = ΑΘ + ΘΕ = 2ΑΘ = 2ΘΖ$.

**δ.** Είναι:
- $ΑΒ = 2ΑΕ = 2 \cdot 2ΘΕ = 4ΘΕ$ , άρα $3ΑΒ = 12ΘΕ$
- $ΘΒ = ΕΘ + ΕΒ = ΕΘ + ΑΕ = 3ΘΕ$ , άρα $4ΘΒ = 12ΘΕ$

Οπότε $3ΑΒ = 4ΘΒ$ .

## 136 Θέμα 4 - 1888




**Έστω ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ $(ΑΒ = ΑΓ)$ και $Μ$ το μέσο της $ΒΓ$. Φέρουμε $ΓΔ \perp ΒΓ$ με $ΓΔ = ΑΒ$ ( $Α$, $Δ$ εκατέρωθεν της $ΒΓ$ ). Να αποδείξετε ότι:**

**α.** $ΑΜ // ΓΔ$

**β.** **η $ΑΔ$ είναι διχοτόμος της γωνίας $Μ\hat{Α}Γ$**

**γ.** $Δ\hat{Α}Γ = 45^o - \dfrac{\hat{Β}}{2}$

**δ.** $ΑΔ < 2ΑΒ$

**Λύση**

**α.** Επειδή το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελές και η $ΑΜ$ είναι διάμεσος, θα είναι και ύψος.
Αφού $ΑΜ \perp ΒΓ$ και $ΔΓ \perp ΒΓ$, προκύπτει $ΑΜ // ΓΔ$.

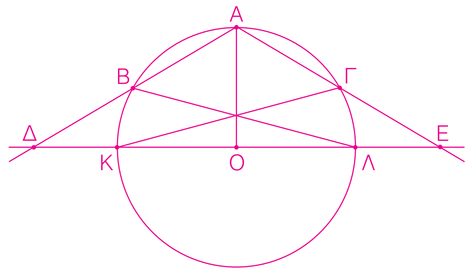
**β.** Είναι:
- $ΓΔ = ΑΒ$ και $ΑΒ = ΑΓ$, οπότε $ΓΔ = ΓΑ$, άρα $Γ\hat{Α}Δ = Γ\hat{Δ}Α$
- $Γ\hat{Δ}Α = Δ\hat{Α}Μ$, ως εντός εναλλάξ

Άρα $Γ\hat{Α}Δ = Δ\hat{Α}Μ$, οπότε η $ΑΔ$ είναι η διχοτόμος της $Μ\hat{Α}Γ$.

**γ.** Είναι $Δ\hat{Α}Γ = \dfrac{Μ\hat{Α}Γ}{2} = \dfrac{90^o - \hat{Γ}}{2} = 45^o - \dfrac{\hat{Γ}}{2} = 45^o - \dfrac{\hat{Β}}{2}$, αφού το τρίγωνο $ΜΑΓ$ είναι ορθογώνιο και $\hat{Β} = \hat{Γ}$.

**δ.** Από την τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο $ΑΓΔ$ είναι: $ΑΔ < ΑΓ + ΓΔ \Leftrightarrow ΑΔ < ΑΒ + ΑΒ \Leftrightarrow ΑΔ < 2ΑΒ$.

## 137 Θέμα 4 - 1874




**Έστω κύκλος με κέντρο $Ο$ και διάμετρο $ΚΛ$. Έστω $Α$ σημείο του κύκλου ώστε η ακτίνα $ΟΑ$ να είναι κάθετη στην $ΚΛ$. Φέρουμε τις χορδές $ΑΒ = ΑΓ = ρ$.**

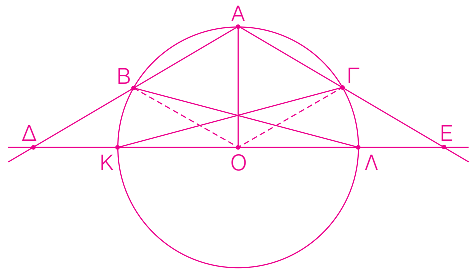
**Έστω $Δ$ και $Ε$ τα σημεία τομής των προεκτάσεων των $ΑΒ$ και $ΑΓ$ αντίστοιχα με την ευθεία της διαμέτρου $ΚΛ$. Να αποδείξετε ότι:**

**α.** **Η γωνία $Β\hat{Α}Γ$ είναι $120^o$.**

**β.** **Τα σημεία $Β$ και $Γ$ είναι μέσα των $ΑΔ$ και $ΑΕ$ αντίστοιχα.**

**γ.** $ΚΓ = ΛΒ$

**Λύση**




**α.** Φέρουμε τις $ΟΒ$ και $ΟΓ$. Τα τρίγωνα $ΟΑΒ$ και $ΟΑΓ$ είναι ισόπλευρα, οπότε $Β\hat{Α}Γ = Β\hat{Α}Ο + Ο\hat{Α}Γ = 60^o + 60^o = 120^o$.

**β.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΔΑΟ$ είναι $\hat{Δ} = 90^o - 60^o = 30^o$ και $Β\hat{Ο}Δ = 90^o - 60^o = 30^o$.

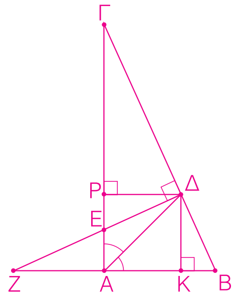
Άρα $\hat{Δ} = Β\hat{Ο}Δ$, οπότε το τρίγωνο $ΒΟΔ$ είναι ισοσκελές με $ΒΔ = ΒΟ$.
Επομένως $ΒΔ = ΒΑ$, άρα το $Β$ είναι το μέσο του $ΑΔ$.
Όμοια το $Γ$ είναι το μέσο του $ΑΕ$.

**γ.** Είναι $Α\hat{Ο}Γ = 60^o$ και $Β\hat{Ο}Α = 60^o$ επειδή τα τρίγωνα $ΑΟΓ$ και $ΑΟΒ$ είναι ισόπλευρα.

Οπότε:
- $Κ\hat{Ο}Γ = Κ\hat{Ο}Α + Α\hat{Ο}Γ = 90^o + 60^o = 150^o$
- $Β\hat{Ο}Λ = Β\hat{Ο}Α + Α\hat{Ο}Λ = 60^o + 90^o = 150^o$

Άρα οι επίκεντρες γωνίες $Κ\hat{Ο}Γ$ και $Β\hat{Ο}Λ$ είναι ίσες.
Οπότε τα τόξα $\overset{\frown}{ΚΓ}$ και $\overset{\frown}{ΒΛ}$ είναι ίσα, άρα και οι αντίστοιχες χορδές $ΚΓ$ και $ΛΒ$ είναι ίσες, δηλαδή $ΚΓ = ΛΒ$.

## 138 Θέμα 4 - 1894




**Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A}=90^o$) φέρουμε τη διχοτόμο του ΑΔ. Έστω ΔΚ και ΔΡ οι προβολές του Δ στις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Η κάθετη της ΒΓ στο σημείο Δ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο Ε και την προέκταση της πλευράς ΑΒ (προς το Β) στο σημείο Ζ.**

**α. Να αποδείξετε ότι:**

**i.** $\widehat{B}=\Delta\widehat{E}\Gamma$ **ii.** $\Delta E=\Delta B$

**β. Να υπολογίσετε τη γωνία $\Delta\widehat{\Gamma}Z$.**

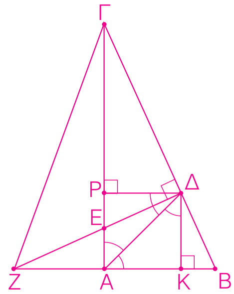
### Λύση

**α. i.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο:
- $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ έχουμε $\widehat{B}+\widehat{\Gamma}=90^o \Leftrightarrow \widehat{B}=90^o-\widehat{\Gamma}$
- $\overset{\Delta}{\Delta E\Gamma}$ έχουμε $\Delta\widehat{E}\Gamma+\widehat{\Gamma}=90^o \Leftrightarrow \Delta\widehat{E}\Gamma=90^o-\widehat{\Gamma}$

Οπότε $\widehat{B}=\Delta\widehat{E}\Gamma$.

**ii.** Τα ορθογώνια τρίγωνα ΡΔΕ και ΚΔΒ έχουν:
- $\Delta\widehat{E}\Gamma=\widehat{B}$
- $\Delta P=\Delta K$, αφού η ΑΔ είναι διχοτόμος της $\widehat{A}$

Οπότε είναι ίσα, άρα $\Delta E=\Delta B$.

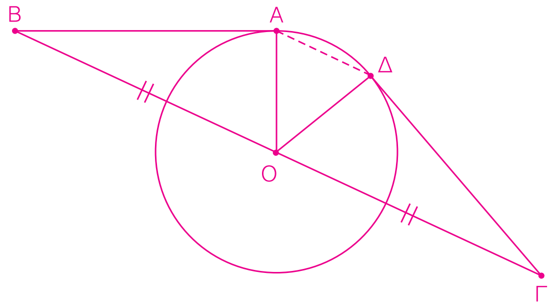



**β.** Τα ορθογώνια τρίγωνα ΔΕΓ και ΔΒΖ έχουν:
- $\Delta\widehat{E}\Gamma=\widehat{B}$, από το **α.i.**
- $\Delta E=\Delta B$, από το **α.ii.**

Οπότε τα τρίγωνα είναι ίσα, άρα $\Delta\Gamma=\Delta Z$.
Επομένως, το τρίγωνο ΔΓΖ είναι ισοσκελές και ορθογώνιο.
Άρα $\Delta\widehat{\Gamma}Z=\Delta\widehat{Z}\Gamma$ και $\Delta\widehat{\Gamma}Z+\Delta\widehat{Z}\Gamma=90^o \Leftrightarrow 2\Delta\widehat{\Gamma}Z=90^o \Leftrightarrow \Delta\widehat{\Gamma}Z=45^o$.

## 139 Θέμα 4 - 13750

**Από σημείο Β εξωτερικό ενός κύκλου (Ο,R) φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα ΒΑ. Ενώνουμε το σημείο Β με το κέντρο Ο του κύκλου και προεκτείνουμε κατά ίσο τμήμα ΟΓ = ΒΟ. Από το σημείο Γ φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα ΓΔ, όπως στο σχήμα.**



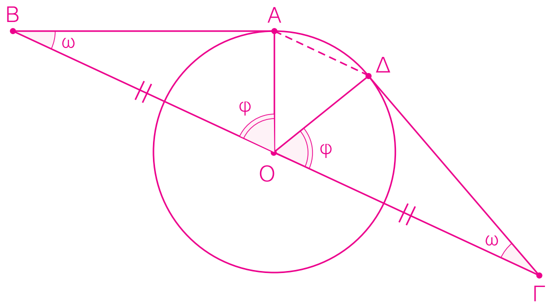

**α. Να αποδείξετε ότι:**

**i.** $AB=\Delta\Gamma$

**ii.** $A\Delta//B\Gamma$

**β. Αν το μήκος του εφαπτόμενου τμήματος ΒΑ είναι ίσο με την ακτίνα R, τι είδους τρίγωνο είναι το τρίγωνο ΑΟΔ; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.**

### Λύση




**α. i.** Είναι $OA\perp AB$ και $O\Delta\perp\Delta\Gamma$ διότι ΟΑ και ΟΔ είναι ακτίνες στα σημεία επαφής Α και Δ αντίστοιχα.

Τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΔΓ, έχουν:
- $OA=O\Delta=R$,
- $OB=O\Gamma$,
- $O\widehat{A}B=O\widehat{\Delta}\Gamma=90^o$.

Άρα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια με ίσες υποτείνουσες και μία κάθετη πλευρά ίση, οπότε $AB=\Delta\Gamma$.

**ii.** Από την ισότητα των ορθογωνίων τριγώνων του **α. i.** ερωτήματος προκύπτει ότι $O\hat{B}A = O\hat{\Gamma}\Delta = \omega$ και $A\hat{O}B = \Delta\hat{O}\Gamma = \varphi$ με $\omega + \varphi = 90^o$ $(1)$, ως άθροισμα οξειών γωνιών ορθογωνίων τριγώνων.

Για τη γωνία $A\hat{O}\Delta$ έχουμε: $A\hat{O}\Delta = 180^o - 2\varphi = 2(90^o - \varphi) = 2\omega$, λόγω της $(1)$.

Το τρίγωνο $AO\Delta$ είναι ισοσκελές, αφού $OA = O\Delta = R$, οπότε

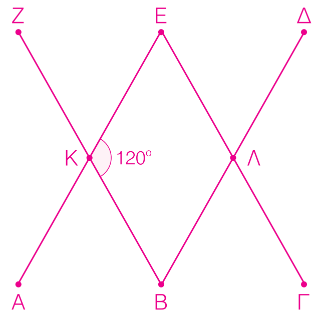
$$O\hat{A}\Delta = O\hat{\Delta}A = \frac{180^o - A\hat{O}\Delta}{2} = \frac{180^o - 2\omega}{2} = 90^o - \omega = \varphi \text{ , λόγω της } (1).$$

Άρα $O\hat{A}\Delta = A\hat{O}B = \varphi$ και είναι γωνίες εντός εναλλάξ των $A\Delta$ και $B\Gamma$ που τέμνονται από την ΟΑ, οπότε $A\Delta // B\Gamma$.

**β.** Αν $BA = R$ τότε από το **α.** ερώτημα τα ίσα ορθογώνια τρίγωνα $OAB$ και $O\Delta\Gamma$ θα είναι και ισοσκελή, αφού $OA = AB = O\Delta = \Delta\Gamma = R$.

Επομένως $\omega = \varphi = 45^o$, άρα $A\hat{O}\Delta = 180^o - 2\varphi = 90^o$, οπότε το ισοσκελές τρίγωνο $OA\Delta$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

## 140 Θέμα 4 - 13697



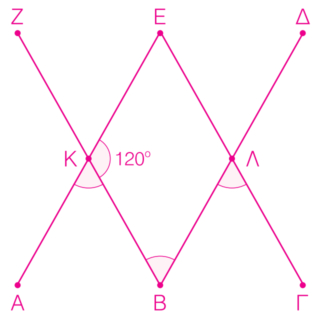

**Στο διπλανό σχήμα, τα τμήματα ΑΕ, ΒΖ, ΒΔ και ΓΕ αναπαριστάνουν τέσσερεις ίσους ράβδους μήκους 40 cm οι οποίες αποτελούν μέρη μιας κρεμάστρας τοίχου. Οι ράβδοι συνδέονται με τέτοιο τρόπο ώστε ανά δύο απέναντι να είναι παράλληλες, δηλαδή $AE // B\Delta$ και $BZ // \Gamma E$, και ανά δύο να έχουν κοινό μέσο, δηλαδή Κ κοινό μέσο των ΑΕ, ΒΖ και Λ κοινό μέσο των ΒΔ, ΓΕ. Έστω ότι η μία από τις γωνίες που σχηματίζουν οι τεμνόμενες ράβδοι ΑΕ και ΒΖ με κορυφή το κοινό τους μέσο Κ, η γωνία $B\hat{K}E$, είναι ίση με $120^o$.**

**α.** **Να αποδείξετε ότι $A\hat{K}B = K\hat{B}\Lambda = B\hat{\Lambda}\Gamma = 60^o$.**

**β.** **Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι τα τρίγωνα ΑΚΒ και ΒΛΓ είναι ίσα και ισόπλευρα. Να εξετάσετε αν ο ισχυρισμός του είναι αληθής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.**

**γ.** **Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β και Γ ανήκουν στην ίδια ευθεία.**

**Λύση**



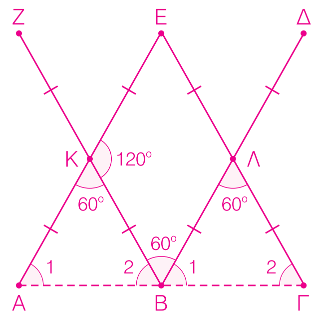

**α.** Είναι: • $A\hat{K}B + B\hat{K}E = 180^o \Leftrightarrow A\hat{K}B + 120^o = 180^o \Leftrightarrow A\hat{K}B = 180^o - 120^o$

$$\Leftrightarrow A\hat{K}B = 60^o$$

- $A\hat{K}B = K\hat{B}\Lambda$, ως εντός εναλλάξ, οπότε $K\hat{B}\Lambda = 60^o$.
- $K\hat{B}\Lambda = B\hat{\Lambda}\Gamma$, ως εντός εναλλάξ, οπότε $B\hat{\Lambda}\Gamma = 60^o$.

Επομένως $A\hat{K}B = K\hat{B}\Lambda = B\hat{\Lambda}\Gamma = 60^o$ (4).

**β.** Τα τρίγωνα ΑΚΒ και ΒΛΓ έχουν:




- $AK = B\Lambda = 20\,cm$, ως μισά των ίσων τμημάτων ΑΕ και ΒΔ.
- $KB = \Lambda\Gamma = 20\,cm$, ως μισά των ίσων τμημάτων ΒΖ και ΓΕ.
- $A\hat{K}B = B\hat{\Lambda}\Gamma = 60^o$

Επομένως είναι ίσα, (ΠΓΠ), οπότε $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ και $\hat{B}_2 = \hat{\Gamma}_2$.

Είναι $AK = KB = 20\text{cm}$ , άρα το τρίγωνο $AKB$ θα είναι ισοσκελές με βάση ΑΒ, οπότε $\hat{A}_1 = \hat{B}_2$.

Για τις γωνίες του τριγώνου ΑΚΒ ισχύει ότι

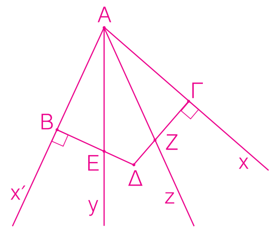
$$\hat{A}_1 + A\hat{K}B + \hat{B}_2 = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{A}_1 + 60^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{A}_1 = 180^\circ - 60^\circ \Leftrightarrow 2\hat{A}_1 = 120^\circ \Leftrightarrow \hat{A}_1 = 60^\circ$$

Άρα $A\hat{K}B = \hat{A}_1 = \hat{B}_2 = 60^\circ$ , οπότε το τρίγωνο ΑΚΒ θα είναι ισόπλευρο.

Επομένως και το ίσο του τρίγωνο $B\Lambda\Gamma$ θα είναι και αυτό ισόπλευρο, οπότε $B\hat{\Lambda}\Gamma = \hat{\Gamma}_2 = \hat{B}_1 = 60^\circ$.

**γ.** Είναι $A\hat{B}\Gamma = \hat{B}_2 + K\hat{B}\Lambda + \hat{B}_1 = 3\cdot 60^\circ = 180^\circ$, αφού είναι $\hat{B}_2 = \hat{B}_1 = 60^\circ$ , ως γωνίες ισοπλεύρων τριγώνων $AKB$ και $B\Lambda\Gamma$. Επομένως, τα σημεία Α, Β και Γ ανήκουν στην ίδια ευθεία.

## 141 Θέμα 4 - 1849



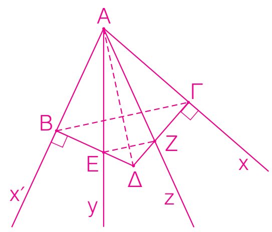

**Στις πλευρές $Ax'$ και $Ax$ γωνίας $x'\hat{A}x$ θεωρούμε σημεία Β και Γ ώστε $AB = A\Gamma$ . Οι κάθετες στις $Ax'$ και $Ax$ στα σημεία Β και Γ αντίστοιχα, τέμνονται στο Δ. Αν οι ημιευθείες $Ay$ και $Az$ χωρίζουν τη γωνία $x'\hat{A}x$ σε τρεις ίσες γωνίες και τέμνουν τις ΒΔ και ΔΓ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:**

**α. Το τρίγωνο $\overset{\Delta}{EAZ}$ είναι ισοσκελές.**

**β. Το Δ ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας $x'\hat{A}x$.**

**γ. Οι γωνίες ΓΒΔ και ΓΑΔ είναι ίσες.**

**Λύση**




**α.** Τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΑΕ και ΓΑΖ έχουν:
- $AB = A\Gamma$
- $B\hat{A}E = \Gamma\hat{A}Z$

Οπότε είναι ίσα, άρα $AE = AZ$ .
Επομένως το τρίγωνο ΕΑΖ είναι ισοσκελές.

**β.** Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΔΓ έχουν:
- $AB = A\Gamma$
- ΑΔ κοινή

Οπότε είναι ίσα, άρα $B\hat{A}\Delta = \Delta\hat{A}\Gamma$.

Επομένως η ΑΔ είναι η διχοτόμος της $x'\hat{A}x$ .

**γ.** Έστω Κ το σημείο τομής των ΑΔ και ΒΓ .
Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ η ΑΚ είναι διχοτόμος άρα και ύψος.
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΚΓ είναι $\Gamma\hat{A}K + A\hat{\Gamma}K = 90^\circ \Leftrightarrow \Gamma\hat{A}\Delta = 90^\circ - A\hat{\Gamma}K$ .
Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με βάση την ΒΓ , οπότε $A\hat{\Gamma}B = A\hat{B}\Gamma$ .
Είναι $\Gamma\hat{B}\Delta = 90^\circ - A\hat{B}\Gamma = 90^\circ - A\hat{\Gamma}B = 90^\circ - A\hat{\Gamma}K$ .
Άρα $\Gamma\hat{A}\Delta = \Gamma\hat{B}\Delta$ .

# 17. Παραλληλόγραμμα

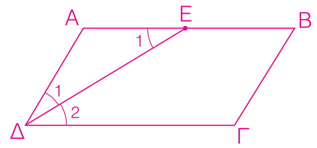
## 142 Θέμα 2 - 1538

**Δίνεται ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο με $AB = 2A\Delta$ . Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας $\hat{\Delta}$ του παραλληλογράμμου, η οποία τέμνει την ΑΒ στο Ε .**

**α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.**

**β. Είναι το σημείο Ε μέσο της πλευράς ΑΒ ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.**

**Λύση**



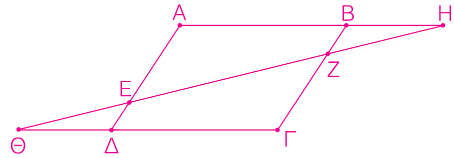

**α.** Είναι:
- $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$ , αφού η ΒΕ διχοτόμος
- $\hat{E}_1 = \hat{\Delta}_2$ , ως εντός εναλλάξ.

Οπότε $\hat{\Delta}_1 = \hat{E}_1$ άρα το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.

**β.** Έχουμε:
- $A\Delta = AE$ , αφού το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές
- $AB = 2A\Delta \Leftrightarrow AB = 2AE$

Οπότε το Ε είναι το μέσο του ΑΒ .

## 143 Θέμα 2 - 1610




**Στις πλευρές ΑΔ και ΒΓ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ θεωρούμε σημεία Ε και Ζ, τέτοια ώστε $AE = \Gamma Z$ . Αν η ευθεία ΖΕ τέμνει τις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ και ΓΔ στα σημεία Η και Θ , να αποδείξετε ότι:**

**α.** $H\hat{B}Z = E\hat{\Delta}\Theta$ **β.** $B\hat{Z}H = \Delta\hat{E}\Theta$ **γ.** $BH = \Theta\Delta$

**Λύση**

**α.** Είναι $H\hat{B}Z = 180^\circ - \hat{B} = 180^\circ - \hat{\Delta} = E\hat{\Delta}\Theta$ .

**β.** Είναι:
- $\Gamma\hat{Z}E = A\hat{E}Z$ , ως εντός εναλλάξ
- $B\hat{Z}H = \Gamma\hat{Z}E$ , ως κατακορυφήν
- $\Delta\hat{E}\Theta = A\hat{E}Z$ , ως κατακορυφήν

Οπότε $B\hat{Z}H = \Delta\hat{E}\Theta$ .

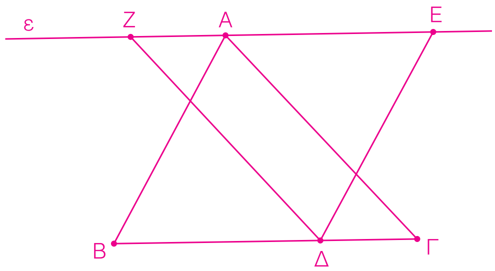
**γ.** Είναι $A\Delta = B\Gamma$ και $AE = \Gamma Z$ .

Οπότε $\Delta E = A\Delta - AE = B\Gamma - \Gamma Z = BZ$ .

Τα τρίγωνα ΔΕΘ και ΒΖΗ έχουν:
- $\Delta E = BZ$
- $H\hat{B}Z = E\hat{\Delta}\Theta$
- $B\hat{Z}H = \Delta\hat{E}\Theta$

Οπότε είναι ίσα (ΓΠΓ) , άρα $BH = \Theta\Delta$ .

## 144 Θέμα 2 - 13755




**Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Από την κορυφή Α φέρουμε ευθεία (ε) παράλληλη προς τη ΒΓ. Από το τυχαίο σημείο Δ της πλευράς ΒΓ φέρουμε τις παράλληλες προς την ΑΒ και ΑΓ, οι οποίες τέμνουν την ευθεία (ε) στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα.**

**Να αποδείξετε ότι :**

**α.** **τα τετράπλευρα ΖΑΓΔ και ΑΒΔΕ είναι παραλληλόγραμμα.**

**β.** **τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ίσα.**

**Λύση**

**α.** Είναι $ZA // \Delta\Gamma$ και $Z\Delta // A\Gamma$ .

Άρα το τετράπλευρο ΖΑΓΔ έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

Είναι $AE // B\Delta$ και $\Delta E // BA$ .

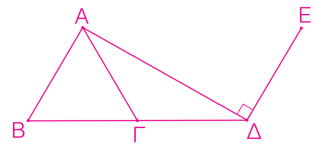
Άρα το τετράπλευρο ΑΒΔΕ έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

**β.** Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν:
- $AB = \Delta E$ , ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΔΕ
- $A\Gamma = \Delta Z$ , ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΖΑΓΔ
- $B\Gamma = ZE$ , διότι $B\Gamma = B\Delta + \Delta\Gamma$ και $ZE = ZA + AE + \Delta\Gamma + B\Delta$

Άρα από το κριτήριο ισότητας ΠΠΠ τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ίσα.

## 145 Θέμα 2 - 1637

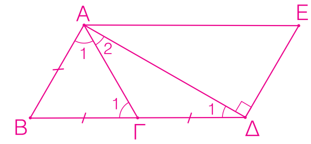
**Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ . Στην προέκταση της $B\Gamma$ (προς το μέρος του $\Gamma$ ) θεωρούμε τμήμα $\Gamma\Delta = B\Gamma$ . Φέρουμε τμήμα $\Delta E$ κάθετο στην $A\Delta$ στο σημείο της $\Delta$ , τέτοιο ώστε $\Delta E = B\Gamma$ .**
**($A$ και $E$ στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την $B\Delta$) .**




**α. Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Delta$ .**

**β. Να αποδείξετε ότι $AB\Delta E$ παραλληλόγραμμο.**

**Λύση**




**α.** Είναι:
- $\widehat{A}_1 = \widehat{B} = \widehat{\Gamma}_1 = 60^\circ$
- $A\widehat{\Gamma}\Delta = 180^\circ - \widehat{\Gamma}_1 = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$
- $\Gamma A = \Gamma\Delta$ , άρα $\widehat{A}_2 = \widehat{\Delta}_1$

Στο τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ είναι $A\widehat{\Gamma}\Delta + \widehat{\Delta}_1 + \widehat{A}_2 = 180^\circ \Leftrightarrow 120^\circ + \widehat{\Delta}_1 + \widehat{\Delta}_1 = 180^\circ \Leftrightarrow 2\widehat{\Delta}_1 = 60^\circ \Leftrightarrow \widehat{\Delta}_1 = 30^\circ$ .

Οπότε $\widehat{A}_2 = \widehat{\Delta}_1 = 30^\circ$ και $B\widehat{A}\Delta = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$ .

**β.** Είναι:
- $B\widehat{A}\Delta = 90^\circ$ , οπότε $BA \perp A\Delta$ και $E\Delta \perp A\Delta$ , άρα $AB // \Delta E$
- $B\Gamma = \Delta E \Rightarrow AB = \Delta E$

Άρα το $AB\Delta E$ είναι παραλληλόγραμμο.

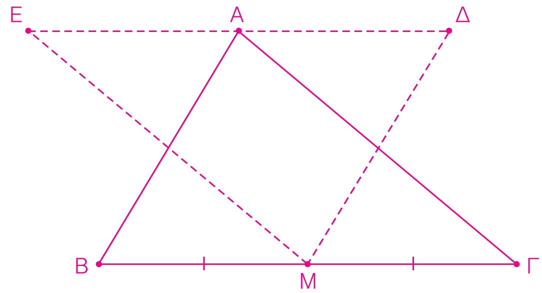
## 146 Θέμα 2 - 13825

**Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Από το μέσο Μ της ΒΓ γράφουμε ευθύγραμμο τμήμα ΜΔ ίσο και παράλληλο προς την ΒΑ και ένα άλλο ευθύγραμμο τμήμα ΜΕ ίσο και παράλληλο προς την ΓΑ (τα σημεία Δ και Ε βρίσκονται στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από τη ΒΓ και το σημείο Α). Να αποδείξετε ότι:**

**α. Τα τετράπλευρα ΑΔΜΒ και ΑΓΜΕ είναι παραλληλόγραμμα.**

**β. $\Delta A = AE$ .**

**Λύση**




**α.** Το τετράπλευρο $A\Delta MB$ έχει $AB = \Delta M$ και $AB // \Delta M$ άρα είναι παραλληλόγραμμο.

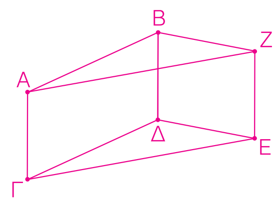
Το τετράπλευρο $A\Gamma ME$ έχει $A\Gamma = EM$ και $A\Gamma // EM$ άρα είναι παραλληλόγραμμο.

**β.** Είναι:
- $\Delta A = BM$ , ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου $A\Delta MB$
- $AE = \Gamma M$ , ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου $A\Gamma ME$
- το σημείο $M$ το μέσο της πλευράς $B\Gamma$ , επομένως $BM = \Gamma M$ .

Άρα $\Delta A = AE$ .

## 147 Θέμα 2 - 1654

**Δίνονται τα παραλληλόγραμμα $AB\Delta\Gamma$ και $B\Delta EZ$ . Να αποδείξετε ότι:**




**α. Το τετράπλευρο $A\Gamma EZ$ είναι παραλληλόγραμμο.**

**β. $A\widehat{B}Z = \Gamma\widehat{\Delta}E$**

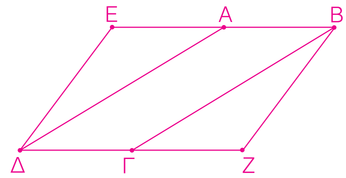
**Λύση**

**α.** Επειδή τα $AB\Delta\Gamma$ και $B\Delta EZ$ είναι παραλληλόγραμμα έχουμε $A\Gamma // = B\Delta$ και $B\Delta // = ZE$ αντίστοιχα. Άρα $A\Gamma // = ZE$ , οπότε το $A\Gamma EZ$ είναι παραλληλόγραμμο.

**β.** Τα τρίγωνα $ABZ$ και $\Gamma\Delta E$ έχουν:
- $AB = \Gamma\Delta$ , αφού το $AB\Delta\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο
- $BZ = \Delta E$ , αφού το $BZE\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο
- $AZ = \Gamma E$ , αφού το $AZE\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο

Άρα είναι ίσα (ΠΠΠ) , οπότε $A\widehat{B}Z = \Gamma\widehat{\Delta}E$ .

## 148 Θέμα 2 - 1687

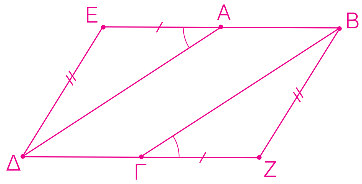



**Έστω παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$.**
**Προεκτείνουμε την πλευρά $ΒΑ$ (προς το $Α$) και την πλευρά $ΔΓ$ (προς το $Γ$) κατά τμήματα $ΑΕ = ΑΒ$ και $ΓΖ = ΔΓ$. Να αποδείξετε ότι:**

**α. Τα τρίγωνα $ΑΔΕ$ και $ΒΓΖ$ είναι ίσα.**

**β. Το τετράπλευρο $ΕΒΖΔ$ είναι παραλληλόγραμμο.**

**Λύση**

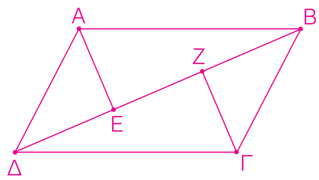



**α.** Τα τρίγωνα $ΑΔΕ$ και $ΒΓΖ$ έχουν:
- $ΑΔ = ΒΓ$, ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου.
- $ΑΕ = ΓΖ$, αφού $ΑΕ = ΑΒ$, $ΓΔ = ΓΖ$ και $ΑΒ = ΓΔ$, ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου.
- $Β\widehat{Γ}Ζ = Ε\widehat{Α}Δ$, ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $\widehat{Α}$, $\widehat{Γ}$ του παραλληλογράμμου $ΑΒΓΔ$.

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ).

**β.** Από την ισότητα των τριγώνων $ΑΔΕ$ και $ΒΓΖ$ έχουμε $ΒΖ = ΕΔ$.
Είναι $ΕΒ = 2ΑΒ = 2ΓΔ = ΔΖ$.
Οπότε το τετράπλευρο $ΕΒΖΔ$ έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες, άρα είναι παραλληλόγραμμο.

## 149 Θέμα 2 - 1628

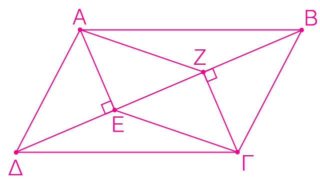



**Σε παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ $(ΑΒ // ΓΔ)$ με $ΑΒ > ΒΓ$ φέρουμε από τις κορυφές $Α$ και $Γ$ καθέτους στη διαγώνιο $ΒΔ$, οι οποίες την τέμνουν σε διαφορετικά σημεία $Ε$ και $Ζ$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:**

**α. $ΑΕ = ΓΖ$**

**β. Το τετράπλευρο $ΑΕΓΖ$ είναι παραλληλόγραμμο.**

**Λύση**



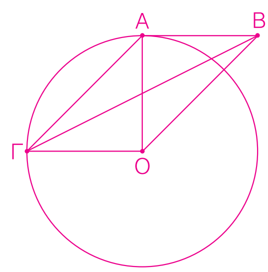

**α.** Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΕΑΔ$ και $ΖΓΒ$ έχουν:
- $ΑΔ = ΒΓ$, αφού το $ΑΒΓΔ$ είναι παραλληλόγραμμο
- $Α\hat{Δ}Ε = Γ\hat{Β}Ζ$ ως εντός εναλλάξ των παράλληλων $ΑΔ$, $ΒΓ$ που τέμνονται από τη $ΒΔ$.

Άρα είναι ίσα, οπότε $ΑΕ = ΓΖ$.

**β.** Είναι:
- $ΑΕ \perp ΒΔ$ και $ΓΖ \perp ΒΔ$, οπότε $ΑΕ // ΓΖ$
- $ΑΕ = ΓΖ$ (από το **α.** ερώτημα)

Άρα το $ΑΕΓΖ$ είναι παραλληλόγραμμο.

## 150 Θέμα 2 - 1678




**Έστω κύκλος με κέντρο $Ο$ και ακτίνα $ρ$. Θεωρούμε κάθετες ακτίνες $ΟΑ$, $ΟΓ$ και εφαπτόμενο στον κύκλο τμήμα $ΑΒ$ με $ΑΒ = ΟΓ$.**

**α. Να αποδείξετε ότι τα τμήματα $ΑΟ$ και $ΒΓ$ διχοτομούνται.**

**β. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου $ΑΒΟΓ$.**

**Λύση**

**α.** Είναι:
- $ΓΟ \perp ΟΑ$ και $ΒΑ \perp ΟΑ$, οπότε $ΟΓ // ΑΒ$
- $ΟΓ = ΑΒ$

Άρα το $ΑΒΟΓ$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε τα $ΑΟ$ και $ΒΓ$ διχοτομούνται.

**β.** Το ορθογώνιο τρίγωνο $ΟΑΓ$ είναι ισοσκελές, αφού $ΟΑ = ΟΓ = ρ$, οπότε $Ο\hat{Α}Γ = Ο\hat{Γ}Α = 45^\circ$.
Το $ΑΒΟΓ$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε:
- $Α\hat{Β}Ο = Ο\hat{Γ}Α = 45^\circ$
- $Γ\hat{Α}Β = Γ\hat{Ο}Β = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$

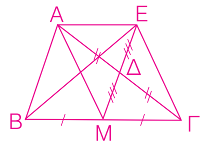
## 151 Θέμα 2 - 1559

**Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διάμεσός του $AM$. Στην προέκταση της διαμέσου $M\Delta$ του τριγώνου $AM\Gamma$ (προς το $\Delta$) θεωρούμε σημείο $E$ ώστε $M\Delta = \Delta E$. Να αποδείξετε ότι:**

**α. Το τετράπλευρο $AM\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο.**

**β. Η $BE$ διέρχεται από το μέσο της διαμέσου $AM$.**

**Λύση**




**α.** Είναι $\Delta A = \Delta\Gamma$ και $\Delta E = \Delta M$.
Οπότε το $AM\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο, αφού οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

**β.** Είναι $AE // = M\Gamma$, οπότε $AE // = BM$.
Άρα το $AEMB$ είναι παραλληλόγραμμο.
Οπότε οι διαγώνιοί του $BE$ και $AM$ διχοτομούνται.
Άρα η $BE$ διέρχεται από το μέσο της $AM$.

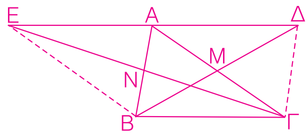
## 152 Θέμα 2 - 1533

**Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, στο οποίο φέρουμε τις διαμέσους του $BM$ και $\Gamma N$. Προεκτείνουμε την $BM$ (προς το $M$) κατά τμήμα $M\Delta = BM$ και την $\Gamma N$ (προς το $N$) κατά τμήμα $NE = \Gamma N$.**

**α. Να αποδείξετε ότι $A\Delta // B\Gamma$ και $AE // B\Gamma$.**

**β. Είναι τα σημεία $E$, $A$ και $\Delta$ συνευθειακά; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.**

**Λύση**




**α.** Είναι $MA = M\Gamma$ και $M\Delta = MB$, οπότε το $A\Delta\Gamma B$ είναι παραλληλόγραμμο, αφού οι διαγώνιοι του διχοτομούνται. Άρα $A\Delta // B\Gamma$.

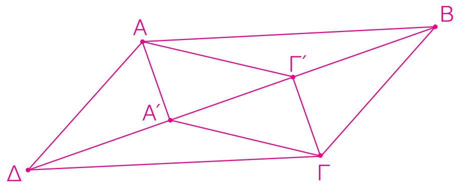
Είναι $NA = NB$ και $NE = \Gamma N$, οπότε το $AEB\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο, αφού οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

Άρα $AE // B\Gamma$.

**β.** Από το **α.** ερώτημα αποδείξαμε ότι από το σημείο $A$ διέρχονται τα τμήματα $AE$ και $A\Delta$ που είναι παράλληλα στη $B\Gamma$.
Όμως από ένα σημείο εκτός ευθείας διέρχεται μοναδική παράλληλη σ' αυτήν, οπότε τα τμήματα $A\Delta$ και $AE$ έχουν τον ίδιο φορέα.
Άρα τα σημεία $E$, $A$ και $\Delta$ είναι συνευθειακά.

## 153 Θέμα 2 - 1600

**Θεωρούμε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και $A'$, $\Gamma'$ οι προβολές των κορυφών $A$ και $\Gamma$ στη διαγώνιο $B\Delta$. Αν τα σημεία $A'$ και $\Gamma'$ δεν ταυτίζονται, να αποδείξετε ότι:**




**α. $AA' // \Gamma\Gamma'$**

**β. $AA' = \Gamma\Gamma'$**

**γ. Το τετράπλευρο $A\Gamma'\Gamma A'$ είναι παραλληλόγραμμο.**

**Λύση**

**α.** Επειδή $AA' \perp B\Delta$ και $\Gamma\Gamma' \perp B\Delta$, έχουμε $AA' // \Gamma\Gamma'$.

**β.** Τα ορθογώνια τρίγωνα $AA'\Delta$ και $\Gamma\Gamma' B$ έχουν:

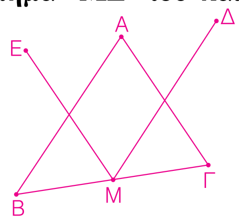
- $A\Delta = B\Gamma$, ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου
- $A\hat{\Delta}A' = \Gamma\hat{B}\Gamma'$, ως εντός εναλλάξ των παράλληλων $A\Delta$, $B\Gamma$ που τέμνονται από τη $B\Delta$

Άρα είναι ίσα, οπότε $AA' = \Gamma\Gamma'$.

**γ.** Από το **α.** και **β.** ερώτημα έχουμε
$AA' // = \Gamma\Gamma'$, οπότε το $A\Gamma'\Gamma A'$ είναι παραλληλόγραμμο.

## 154 Θέμα 2 - 1535

**Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$. Από το μέσο $Μ$ της πλευράς $ΒΓ$ φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα $ΜΔ$ ίσο και παράλληλο προς την πλευρά $ΒΑ$ και ευθύγραμμο τμήμα $ΜΕ$ ίσο και παράλληλο προς την πλευρά $ΓΑ$.**




**Να αποδείξετε ότι:**

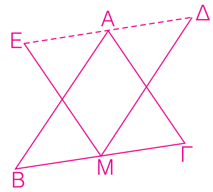
**α.** $ΔΑ = ΑΕ$

**β.** **Τα σημεία $Δ$, $Α$ και $Ε$ βρίσκονται στην ίδια ευθεία.**

**γ.** $ΔΕ = ΒΓ$

**Λύση**

**α.**
- Επειδή $ΜΔ \mathbin{//=} ΑΒ$, το $ΑΔΜΒ$ είναι παραλληλόγραμμο. Οπότε $ΔΑ = ΜΒ$.
- Αφού $ΜΕ \mathbin{//=} ΑΓ$, το $ΑΕΜΓ$ είναι παραλληλόγραμμο. Οπότε $ΑΕ = ΜΓ$.
- Επειδή $ΜΒ = ΜΓ$, έχουμε $ΑΔ = ΑΕ$.




**β.** Τα τετράπλευρα ΑΔΜΒ, ΑΕΜΓ είναι παραλληλόγραμμα, οπότε $ΑΔ // ΒΓ$ και $ΑΕ // ΒΓ$. Επειδή από το Α διέρχεται μοναδική παράλληλη της ΒΓ, τα τμήματα ΑΔ και ΑΕ βρίσκονται στον ίδιο φορέα. Άρα τα $Δ$, $Α$, $Ε$ είναι συνευθειακά.

**γ.** Είναι $ΔΕ = ΑΔ + ΑΕ = ΒΜ + ΜΓ = ΒΓ$.

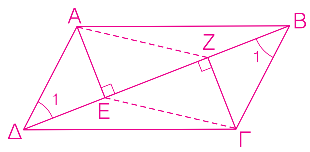
## 155 Θέμα 2 - 1534

**Δίνεται παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ και η διαγώνιός του $ΒΔ$. Από τις κορυφές $Α$ και $Γ$ φέρουμε τις κάθετες $ΑΕ$ και $ΓΖ$ στη $ΒΔ$, που την τέμνουν στα σημεία $Ε$ και $Ζ$ αντίστοιχα.**

**α.** **Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $ΑΔΕ$ και $ΓΒΖ$ είναι ίσα.**

**β.** **Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ΑΕΓΖ$ είναι παραλληλόγραμμο.**

**Λύση**




**α.** Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΑΔΕ$ και $ΓΒΖ$ έχουν:
- $ΑΔ = ΒΓ$, αφού το $ΑΒΓΔ$ είναι παραλληλόγραμμο
- $\hat{Δ}_1 = \hat{Β}_1$, ως εντός εναλλάξ των παράλληλων $ΑΔ$ και $ΒΓ$ που τέμνονται από τη $ΒΔ$

Άρα είναι ίσα.

**β.** Επειδή $ΑΕ \perp ΒΔ$ και $ΓΖ \perp ΒΔ$, έχουμε $ΑΕ // ΓΖ$.
Αφού τα τρίγωνα $ΑΔΕ$, $ΓΒΖ$ είναι ίσα, έχουμε $ΑΕ = ΓΖ$.

Άρα $ΑΕ \mathbin{//=} ΓΖ$, οπότε το $ΑΕΓΖ$ είναι παραλληλόγραμμο.

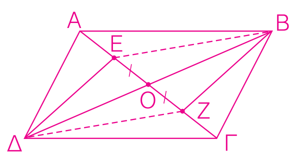
## 156 Θέμα 2 - 1539

**Δίνεται παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ και $Ο$ το σημείο τομής των διαγωνίων του. Θεωρούμε σημείο $Ε$ του τμήματος $ΑΟ$ και σημείο $Ζ$ του τμήματος $ΟΓ$, ώστε $ΟΕ = ΟΖ$. Να αποδείξετε ότι:**

**α.** $ΔΕ = ΒΖ$

**β.** **το $ΔΕΒΖ$ είναι παραλληλόγραμμο.**

**Λύση**



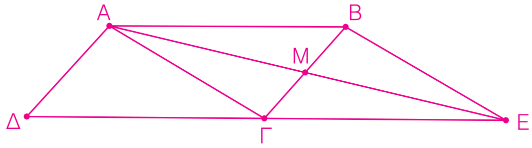

**α.** Τα τρίγωνα $ΟΔΕ$ και $ΟΒΖ$ έχουν:
- $ΟΔ = ΟΒ$
- $ΟΕ = ΟΖ$
- $Δ\hat{Ο}Ε = Β\hat{Ο}Ζ$, ως κατακορυφήν γωνίες

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ), οπότε $ΔΕ = ΒΖ$.

**β.** Είναι $ΟΕ = ΟΖ$ και $ΟΒ = ΟΔ$.
Οπότε το $ΔΕΒΖ$ είναι παραλληλόγραμμο, αφού οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

## 157 Θέμα 2 - 13816

**Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ τέτοιο, ώστε $ΑΔ < ΑΒ$ και Μ το μέσο της ΒΓ.**




**Προεκτείνουμε την ΑΜ προς το Μ κατά τμήμα $ΜΕ = ΑΜ$.**

**Να αποδείξετε ότι :**

**α. το τετράπλευρο ΑΒΕΓ είναι παραλληλόγραμμο.**

**β. τα σημεία Δ, Γ και Ε είναι συνευθειακά.**

**Λύση**

**α.** Το σημείο Μ είναι το μέσο του ΒΓ και του ΑΕ, οπότε στο τετράπλευρο ΑΒΕΓ οι διαγώνιοι του διχοτομούνται. Άρα είναι παραλληλόγραμμο.

**β.** Από το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ έχουμε $ΔΓ // ΑΒ$ και από το παραλληλόγραμμο ΑΒΕΓ έχουμε $ΑΒ // ΓΕ$.

Άρα τα ευθύγραμμα τμήματα ΔΓ και ΓΕ είναι παράλληλα στην ΑΒ και επειδή έχουν κοινό σημείο το Γ, τα σημεία Δ, Γ και Ε είναι συνευθειακά.

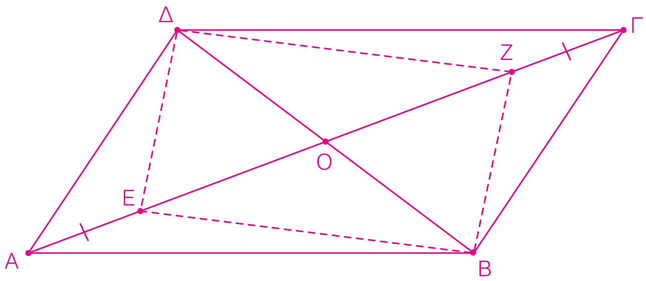
## 158 Θέμα 2 - 13829

**Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του. Θεωρούμε τα σημεία Ε και Ζ των τμημάτων ΑΟ και ΓΟ αντίστοιχα, τέτοια ώστε $ΑΕ = ΓΖ$.**

**α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΓΖΒ είναι ίσα.**

**β. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο.**

**Λύση**




**α.** Τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΓΖΒ έχουν:

**i.** $ΑΕ = ΓΖ$

**ii.** $ΑΔ = ΒΓ$, απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου

**iii.** $Ε\hat{Α}Δ = Ζ\hat{Γ}Β$, ως εντός εναλλάξ

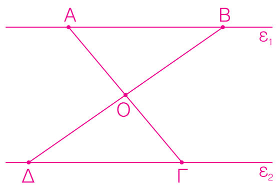
Άρα είναι ίσα αφού έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες γωνίες ίσες (ΠΓΠ).

**β.** Είναι $ΟΕ = ΟΑ - ΑΕ$ και $ΟΖ = ΟΓ - ΖΓ$. Επειδή $ΟΑ = ΟΓ$, αφού το Ο είναι το κέντρο του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ και $ΑΕ = ΖΓ$ έχουμε $ΟΕ = ΟΖ$ ως διαφορές ίσων τμημάτων.

Επιπλέον $ΒΟ = ΟΔ$ αφού το Ο είναι το κέντρο του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Επομένως οι διαγώνιοι του τετραπλεύρου ΔΕΒΖ διχοτομούνται άρα το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο.

## 159 Θέμα 2 - 1618

**Θεωρούμε δύο παράλληλες ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ και τα σημεία Α, Β στην $ε_1$ και Δ και Γ στην $ε_2$ ώστε τα τμήματα ΑΓ και ΒΔ να τέμνονται στο μέσο Ο του ΒΔ. Να αποδείξετε ότι:**




**α. τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΓΟΔ είναι ίσα και να αναφέρετε τα ίσα κύρια στοιχεία τους αιτιολογώντας την απάντησή σας.**

**β. το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.**

**Λύση**

**α.** Τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΓΟΔ έχουν:
- $ΟΒ = ΟΔ$, αφού Ο μέσο του ΒΔ
- $Α\hat{Ο}Β = Γ\hat{Ο}Δ$, ως κατακορυφήν
- $\hat{Β} = \hat{Δ}$, ως εντός εναλλάξ

Άρα είναι ίσα (ΓΠΓ) και έχουν: $ΑΒ = ΓΔ$, $ΟΑ = ΟΓ$, $\hat{Α} = \hat{Γ}$.

**β.** Επειδή τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΓΟΔ είναι ίσα, έχουμε $ΑΒ = ΓΔ$.

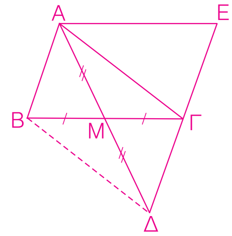
Οπότε $ΑΒ //= ΓΔ$, επομένως το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

## 160 Θέμα 2 - 1701

**Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < A\Gamma$ και Μ το μέσο της ΒΓ. Προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ κατά τμήμα $M\Delta = MA$. Από το Α φέρουμε παράλληλη προς τη ΒΓ η οποία τέμνει την προέκταση της ΔΓ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:**

**α. το τετράπλευρο ΑΒΔΓ είναι παραλληλόγραμμο** **β. $BM = \dfrac{AE}{2}$**

**Λύση**

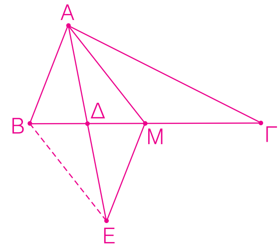



**α.** Είναι $MB = M\Gamma$ και $MA = M\Delta$, οπότε το ΑΒΔΓ είναι παραλληλόγραμμο, αφού οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

**β.** Είναι $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $AE \parallel B\Gamma$, οπότε το ΑΕΓΒ είναι παραλληλόγραμμο.

Επομένως $B\Gamma = AE$, οπότε $BM = \dfrac{B\Gamma}{2} = \dfrac{AE}{2}$.

## 161 Θέμα 2 - 1642




**Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο ισχύει $B\Gamma = 2AB$ και έστω Μ το μέσο της ΒΓ. Αν η ΑΔ είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΒΜ και Ε σημείο στην προέκτασή της ώστε $A\Delta = \Delta E$. Να αποδείξετε ότι:**

**α. Το τετράπλευρο ΑΒΕΜ είναι παραλληλόγραμμο.**

**β. $ME = M\Gamma$**

**Λύση**

**α.** Επειδή $\Delta B = \Delta M$ και $\Delta A = \Delta E$, το ΑΒΕΜ είναι παραλληλόγραμμο, αφού οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

**β.** Επειδή το ΑΒΕΜ είναι παραλληλόγραμμο, έχουμε $ME = AB$.

Είναι $B\Gamma = 2AB \Leftrightarrow AB = \dfrac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow AB = M\Gamma \Leftrightarrow ME = M\Gamma$.

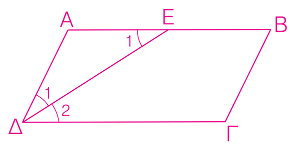
## 162 Θέμα 2 - 1557

**Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $AB = 2B\Gamma$ και Ε το μέσο της πλευράς του ΑΒ. Να αποδείξετε ότι:**

**α. Το τρίγωνο ΕΑΔ είναι ισοσκελές.**

**β. Η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Delta}$.**

**Λύση**




**α.** Είναι Ε το μέσο του ΑΒ και $AB = 2B\Gamma \Leftrightarrow 2AE = 2B\Gamma \Leftrightarrow AE = B\Gamma$.

Αφού το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, έχουμε $B\Gamma = A\Delta$.
Άρα $AE = A\Delta$, οπότε το τρίγωνο ΕΑΔ είναι ισοσκελές.

**β.** Είναι:
- $\hat{\Delta}_1 = \hat{E}_1$, αφού το τρίγωνο ΕΑΔ είναι ισοσκελές με $AE = A\Delta$.
- $\hat{\Delta}_2 = \hat{E}_1$, ως εντός εναλλάξ

Οπότε $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$, άρα η ΔΕ είναι διχοτόμος της $\hat{\Delta}$.

## 163 Θέμα 2 - 1531

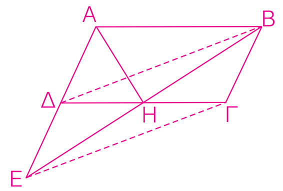
**Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $AB = 2B\Gamma$. Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΔ κατά τμήμα $\Delta E = A\Delta$ και φέρουμε την ΒΕ που τέμνει τη ΔΓ στο σημείο Η. Να αποδείξετε ότι:**

**α. το τρίγωνο ΒΑΕ είναι ισοσκελές**

**β. το ΔΕΓΒ είναι παραλληλόγραμμο**

**γ. η ΑΗ είναι διάμεσος του ΒΑΕ τριγώνου.**

**Λύση**




**α.** Είναι $AB = 2B\Gamma \Leftrightarrow AB = 2A\Delta \Leftrightarrow AB = AE$ .
Άρα το τρίγωνο $BAE$ είναι ισοσκελές με $AB = AE$ .

**β.** Είναι $\Delta E = A\Delta$ και $A\Delta // = B\Gamma$ .
Οπότε $\Delta E // = B\Gamma$ , άρα το $\Delta E\Gamma B$ είναι παραλληλόγραμμο.

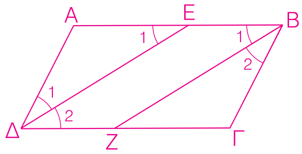
**γ.** Επειδή το $\Delta E\Gamma B$ είναι παραλληλόγραμμο, οι διαγώνιοί του διχοτομούνται, άρα $EH = HB$ .
Οπότε η $AH$ είναι διάμεσος του τριγώνου $BAE$ .

## 164 Θέμα 2 - 1609

**Θεωρούμε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ . Αν οι διχοτόμοι των απέναντι γωνιών $\hat{\Delta}$ και $\hat{B}$ τέμνουν τις πλευρές $AB$ και $\Gamma\Delta$ στα σημεία $E$ και $Z$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:**

**α. Τα τρίγωνα $AE\Delta$ και $B\Gamma Z$ είναι ίσα.**

**β. Το τετράπλευρο $\Delta EBZ$ είναι παραλληλόγραμμο.**




**Λύση**

**α.** Τα τρίγωνα $AE\Delta$ και $B\Gamma Z$ έχουν:

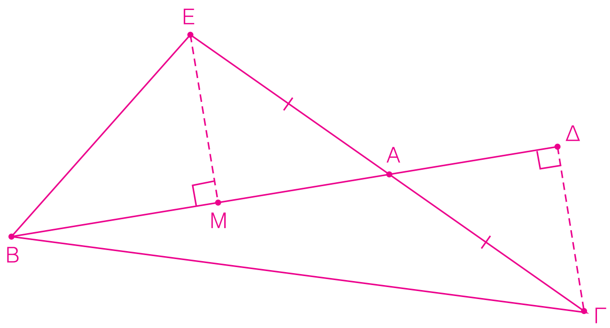
- $A\Delta = B\Gamma$
- $\hat{\Delta}_1 = \hat{B}_2$ , ως μισά των ίσων γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Delta}$
- $\hat{A} = \hat{\Gamma}$

Οπότε είναι ίσα (ΓΠΓ).

**β.** Επειδή $AB = \Gamma\Delta$ και $AE = \Gamma Z$ , αφού τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $B\Gamma Z$ είναι ίσα, έχουμε $BE = \Delta Z$ , ως διαφορές ίσων τμημάτων.
Αφού $BE // = \Delta Z$ το $\Delta EBZ$ είναι παραλληλόγραμμο.

## 165 Θέμα 2 - 13833

**Στο παρακάτω σχήμα το ΓΔ είναι ύψος του τριγώνου ΑΒΓ, το ΕΗ είναι ύψος του τριγώνου ΑΒΕ και η ΒΑ είναι διάμεσος του τριγώνου ΒΕΓ.**




**α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΑΕΗ είναι ίσα.**

**β. Να αποδείξετε ότι $AH = A\Delta$ .**

**γ. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΓΔΕΗ είναι παραλληλόγραμμο.**

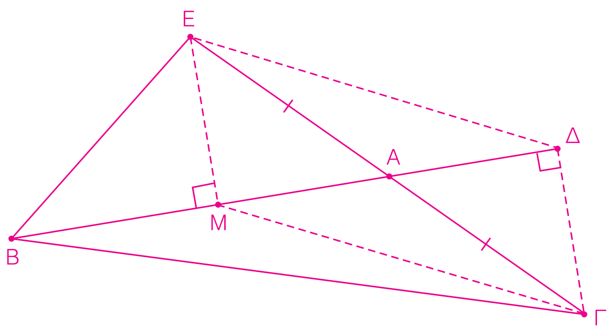
**Λύση**

**α.** Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΓΔ και ΑΕΗ έχουν:

**i.** $\hat{H} = \hat{\Delta} = 90^{o}$ (γιατί ΓΔ και ΕΗ ύψη)

**ii.** ΑΓ = ΑΕ (γιατί ΒΑ διάμεσος από υπόθεση)

**iii.** $\Delta\hat{A}\Gamma = E\hat{A}H$ (ως κατακορυφήν)




Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, αφού είναι ορθογώνια που έχουν την υποτείνουσα και μια οξεία γωνία ίσες μία προς μία.

**β.** Από την ισότητα των τριγώνων ΑΓΔ και ΑΕΗ προκύπτει ότι $A\hat{E}H = A\hat{\Gamma}\Delta$ άρα και ΑΗ = ΑΔ ως πλευρές ίσων τριγώνων απέναντι από ίσες γωνίες.

**γ.** Η ΒΑ είναι διάμεσος του τριγώνου ΕΒΓ άρα ΕΑ=ΑΓ και από το **β.** ερώτημα έχουμε ότι ΑΗ = ΑΔ.

Άρα το τετράπλευρο ΓΔΕΗ είναι παραλληλόγραμμο αφού οι διαγώνιοι του ΕΓ και ΔΗ διχοτομούνται.

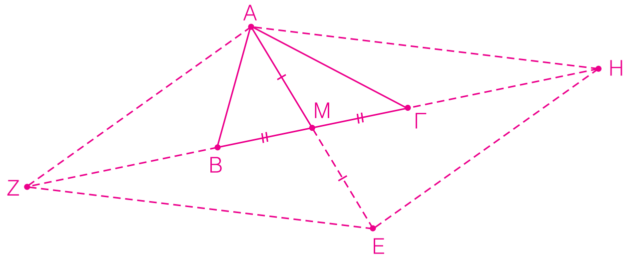
## 166 Θέμα 2 - 13834

**Σε τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε τη διάμεσό του ΑΜ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΒΓ προς το μέρος του Β κατά τμήμα $ΒΖ = ΒΓ$ και προς το μέρος του Γ κατά τμήμα $ΓΗ = ΒΓ$, επίσης προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ κατά τμήμα $ΜΕ = ΑΜ$.**

**α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΜΖ και ΕΜΗ είναι ίσα.**

**β. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΗΕΖ είναι παραλληλόγραμμο.**

**Λύση**




**α.** Τα τρίγωνα ΑΜΖ και ΕΜΗ έχουν:

**i.** ΑΜ = ΜΕ

**ii.** ΜΖ = ΜΗ, άθροισμα ίσων τμημάτων ΜΒ + ΒΖ και ΜΓ + ΓΗ

**iii.** $Α\widehat{Μ}Ζ = Ε\widehat{Μ}Η$, ως κατακορυφήν

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, επειδή έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες.

**β.** Έχουμε ΑΜ = ΜΕ και ΜΖ = ΜΗ. Επομένως στο τετράπλευρο ΑΗΕΖ οι διαγώνιοι ΑΕ και ΖΗ διχοτομούνται στο σημείο Μ, άρα το τετράπλευρο ΑΗΕΖ είναι παραλληλόγραμμο.

## 167 Θέμα 4 - 13742

**Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$ και Μ το μέσο της βάσης του ΒΓ. Φέρουμε $ΒΚ \perp ΒΓ$ έτσι ώστε $ΒΚ = ΑΓ$ (το σημείο Κ είναι στο ημιεπίπεδο που δεν ανήκει το Α).**

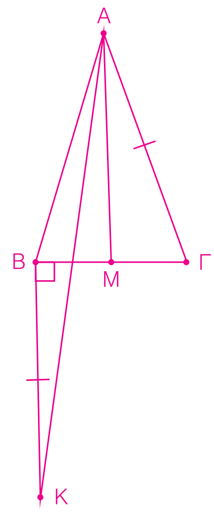
**α. Να αποδείξετε ότι $ΑΜ // ΒΚ$ και $ΑΒ = ΒΚ$.**

**β. Να δείξετε ότι η ΑΚ είναι διχοτόμος της γωνίας ΒΑΜ.**

**γ. Να αποδείξετε ότι $Β\hat{Κ}Α = 45^\circ - \dfrac{\hat{Γ}}{2}$.**

**δ. Μπορεί το τετράπλευρο ΑΒΚΜ να είναι παραλληλόγραμμο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.**

**Λύση**




**α.** Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, το τμήμα ΑΜ είναι διάμεσος προς τη βάση του ΒΓ, οπότε είναι και ύψος και διχοτόμος της γωνίας Α. Δηλαδή $ΑΜ \perp ΒΓ$ και $Β\hat{Α}Μ = ΓΑΜ$.

Είναι: • $ΚΒ \perp ΒΓ$ και $ΑΜ \perp ΒΓ$, οπότε $ΑΜ // ΚΒ$.

• $ΒΚ = ΑΓ$ και $ΑΒ = ΑΓ$, οπότε $ΑΒ = ΒΚ$.

**β.** Έχουμε: • $ΑΒ = ΒΚ$ άρα το τρίγωνο ΑΒΚ είναι ισοσκελές, οπότε $Β\hat{Α}Κ = Β\hat{Κ}Α$.

• $Κ\hat{Α}Μ = Β\hat{Κ}Α$, ως εντός εναλλάξ. Άρα $Β\hat{Α}Κ = Β\hat{Κ}Α = Κ\hat{Α}Μ$ (1), οπότε η ΑΚ είναι διχοτόμος της γωνίας $Β\hat{Α}Μ$.

**γ.** Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΚ είναι

$$Β\hat{Α}Κ + Κ\hat{Β}Α + Β\hat{Κ}Α = 180^\circ \Leftrightarrow Β\hat{Κ}Α + \hat{Β} + 90^\circ + Β\hat{Κ}Α = 180^\circ \Leftrightarrow 2Β\hat{Κ}Α + \hat{Β} + 90^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow$$

$$2Β\hat{Κ}Α + \hat{Β} = 90^\circ \Leftrightarrow 2Β\hat{Κ}Α + \hat{Γ} = 90^\circ \Leftrightarrow 2Β\hat{Κ}Α = 90^\circ - \hat{Γ} \Leftrightarrow Β\hat{Κ}Α = 45^\circ - \frac{\hat{Γ}}{2}$$

**δ.** Το τετράπλευρο ΑΒΚΜ έχει τις δυο απέναντι πλευρές του ΑΜ και ΒΚ παράλληλες.

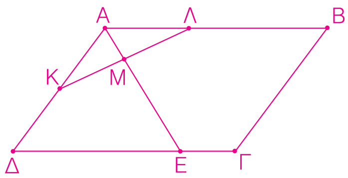
Αν ήταν παραλληλόγραμμο οι ΑΜ και ΒΚ θα ήταν και ίσες. Αν $ΑΜ = ΒΚ$ τότε θα ισχύει ότι $ΑΜ = ΑΒ$.

Όμως τα τμήματα ΑΜ και ΑΒ είναι κάθετο και πλάγιο τμήμα αντίστοιχα προς τη ΒΓ, οπότε ισχύει ότι $ΑΜ < ΑΒ$.

Επομένως $ΑΜ < ΚΒ$ και το τετράπλευρο ΑΒΚΜ δεν μπορεί να είναι παραλληλόγραμμο.

## 168 Θέμα 4 - 1785

**Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$, με $AB>A\Delta$. Θεωρούμε σημεία $K$, $\Lambda$, των $A\Delta$ και $AB$ αντίστοιχα ώστε $AK=A\Lambda$. Έστω $M$ το μέσο του $K\Lambda$ και η προέκταση του $AM$ (προς το $M$) τέμνει τη $\Delta\Gamma$ στο σημείο $E$.**




**Να αποδείξετε ότι:**

**α.** $A\Delta=\Delta E$ **β.** $B\Gamma+\Gamma E=AB$ **γ.** $\hat{B}=2A\hat{\Lambda}K$

**Λύση**

**α.** Επειδή $AK=A\Lambda$ το τρίγωνο $AK\Lambda$ είναι ισοσκελές, οπότε η διάμεσος $AM$ είναι και διχοτόμος της $\hat{A}$, οπότε $\Delta\hat{A}E=\Lambda\hat{A}M$.

Είναι $\Lambda\hat{A}M=\Delta\hat{E}A$, ως εντός εναλλάξ, οπότε $A\hat{E}\Delta=\Delta\hat{A}E$.

Άρα $A\Delta=\Delta E$.

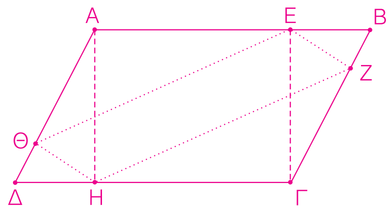
**β.** Είναι $B\Gamma+\Gamma E=A\Delta+\Gamma E=\Delta E+\Gamma E=\Delta\Gamma=AB$.

**γ.** Είναι:
- $\hat{A}+\hat{B}=180^\circ \Leftrightarrow \hat{B}=180^\circ-\hat{A}$, ως εντός και επί τα αυτά μέρη
- $\hat{A}+A\hat{\Lambda}K+A\hat{K}\Lambda=180^\circ \Leftrightarrow A\hat{\Lambda}K+A\hat{\Lambda}K=180^\circ-\hat{A} \Leftrightarrow 2A\hat{\Lambda}K=\hat{B}$

Άρα $\hat{B}=2A\hat{\Lambda}K$.

## 169 Θέμα 4 - 1839

**Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ θεωρούμε σημεία $E$, $Z$, $H$, $\Theta$ στις πλευρές $AB$, $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, $\Delta A$ αντίστοιχα, με $AE=\Gamma H$ και $BZ=\Delta\Theta$.**




**Να αποδείξετε ότι:**

**α. Το τετράπλευρο $AE\Gamma H$ είναι παραλληλόγραμμο.**

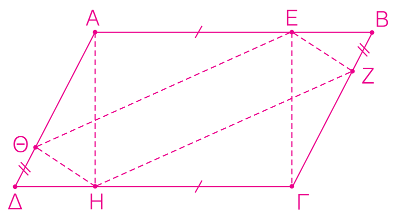
**β. Το τετράπλευρο $EZH\Theta$ είναι παραλληλόγραμμο.**

**γ. Τα τμήματα $A\Gamma$, $B\Delta$, $EH$ και $Z\Theta$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.**

**Λύση**

**α.** Επειδή $AE//=\Gamma H$ το $AE\Gamma H$ είναι παραλληλόγραμμο.

**β.** Τα τρίγωνα $\Delta H\Theta$ και $BEZ$ έχουν:




- $\Delta H=BE$, αφού $\Delta H=\Delta\Gamma-H\Gamma=AB-AE=BE$
- $\hat{\Delta}=\hat{B}$, ως απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου
- $\Delta\Theta=BZ$, από υπόθεση

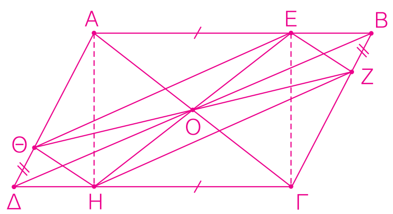
Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ), άρα $\Theta H=EZ$, (1).

Τα τρίγωνα $A\Theta E$ και $\Gamma HZ$ έχουν:
- $AE=\Gamma H$, από υπόθεση
- $\hat{A}=\hat{\Gamma}$, ως απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου
- $A\Theta=\Gamma Z$, αφού $A\Theta=A\Delta-\Theta\Delta=B\Gamma-BZ=\Gamma Z$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ), άρα $\Theta E=HZ$.

Επομένως το τετράπλευρο $EZH\Theta$ έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες, άρα είναι παραλληλόγραμμο.

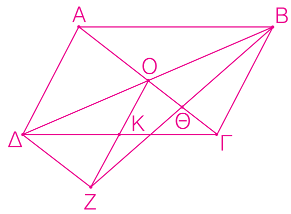
**γ.** Έστω $O$ το μέσον της $A\Gamma$.




- Επειδή το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο οι διαγώνιοί του διχοτομούνται, άρα η $B\Delta$ διέρχεται από το $O$.
- Επειδή το $AE\Gamma H$ είναι παραλληλόγραμμο οι διαγώνιοί του διχοτομούνται, άρα η $EH$ διέρχεται από το $O$ που είναι το μέσον της $A\Gamma$.
- Επειδή το $EZH\Theta$ είναι παραλληλόγραμμο οι διαγώνιοί του διχοτομούνται, άρα η $\Theta Z$ διέρχεται από το μέσον της $EH$ που είναι το $O$.

Άρα οι $A\Gamma$, $B\Delta$, $EH$ και $Z\Theta$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

## 170 Θέμα 4 - 1877




**Έστω παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $O$ το σημείο τομής των διαγωνίων του και $K$ το μέσο του $\Gamma\Delta$. Προεκτείνουμε το τμήμα $OK$ κατά τμήμα $KZ = KO$. Η $BZ$ τέμνει τη διαγώνιο $A\Gamma$ στο $\Theta$. Να αποδείξετε ότι:**

**α. Τα τμήματα $O\Gamma$ και $BZ$ διχοτομούνται.**

**β. $AO = \Delta Z$**

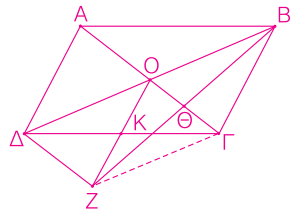
**γ. Τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{AOB}$ και $\overset{\Delta}{\Delta Z\Gamma}$ είναι ίσα.**

**Λύση**

**α.** Επειδή $KO = KZ$ και $K\Delta = K\Gamma$, το $O\Gamma Z\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε $\Gamma Z // = O\Delta$.
Οπότε $\Gamma Z // = OB$, επομένως το $OB\Gamma Z$ είναι παραλληλόγραμμο.
Άρα τα $O\Gamma$ και $BZ$ διχοτομούνται.

**β.** Επειδή το $O\Delta Z\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο, έχουμε $\Delta Z = O\Gamma$ και αφού $O\Gamma = AO$, έχουμε $AO = \Delta Z$.

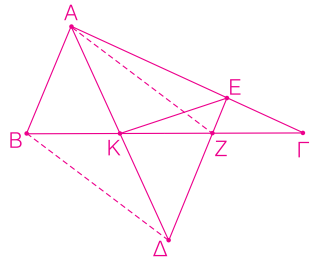
**γ.** Τα τρίγωνα $AOB$ και $\Delta Z\Gamma$ έχουν:




- $OA = \Delta Z$
- $OB = \Gamma Z$
- $AB = \Gamma\Delta$

Άρα είναι ίσα (ΠΠΠ).

## 171 Θέμα 4 - 1857




**Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, με $AK$ διχοτόμο της γωνίας $A$. Στην προέκταση της $AK$ θεωρούμε σημείο $\Delta$ ώστε $AK = K\Delta$.**
**Η παράλληλη από το $\Delta$ προς την $AB$ τέμνει τις $A\Gamma$ και $B\Gamma$ στα $E$ και $Z$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:**

**α. Το τρίγωνο $AE\Delta$ είναι ισοσκελές.**

**β. Η $EK$ είναι μεσοκάθετος της $A\Delta$.**

**γ. Τα τρίγωνα $AKB$ και $K\Delta Z$ είναι ίσα.**

**δ. Το τετράπλευρο $AZ\Delta B$ είναι παραλληλόγραμμο.**

**Λύση**

**α.** Είναι:
- $B\hat{A}\Delta = \Delta\hat{A}E$, αφού $A\Delta$ διχοτόμος της $\hat{A}$
- $B\hat{A}\Delta = A\hat{\Delta}E$, ως εντός εναλλάξ

Άρα $\Delta\hat{A}E = A\hat{\Delta}E$, οπότε το τρίγωνο $AE\Delta$ είναι ισοσκελές.

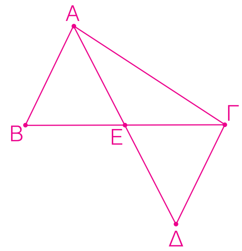
**β.** Στο ισοσκελές τρίγωνο $AE\Delta$ η $EK$ είναι διάμεσος, οπότε είναι και ύψος.
Άρα η $EK$ είναι η μεσοκάθετος του $A\Delta$.

**γ.** Τα τρίγωνα $AKB$, $K\Delta Z$ έχουν:
- $KA = K\Delta$
- $A\hat{K}B = \Delta\hat{K}Z$
- $B\hat{A}K = K\hat{\Delta}Z$, ως εντός εναλλάξ

Οπότε είναι ίσα (ΓΠΓ).

**δ.** Επειδή τα τρίγωνα $AKB$ και $K\Delta Z$ είναι ίσα, έχουμε $KB = KZ$.
Επειδή $KA = K\Delta$ και $KB = KZ$, το $AZ\Delta B$ είναι παραλληλόγραμμο.

## 172 Θέμα 4 - 1890




**Στο διπλανό σχήμα φαίνονται οι θέσεις στο χάρτη πέντε χωριών Α, Β, Γ, Δ και Ε και οι δρόμοι που τα συνδέουν. Το χωριό Ε ισαπέχει από τα χωριά Β, Γ και επίσης από τα χωριά Α και Δ.**

**α. Να αποδείξετε ότι:**

**i. η απόσταση των χωριών Α και Β είναι ίση με την απόσταση των χωριών Γ και Δ.**

**ii. αν οι δρόμοι ΑΒ και ΓΔ έχουν δυνατότητα να προεκταθούν, να αποδείξετε ότι αποκλείεται να συναντηθούν.**

**iii. τα χωριά Β και Γ ισαπέχουν από τον δρόμο ΑΔ.**

**β. Να προσδιορίσετε γεωμετρικά το σημείο του δρόμου ΑΓ που ισαπέχει από τα χωριά Α και Δ.**

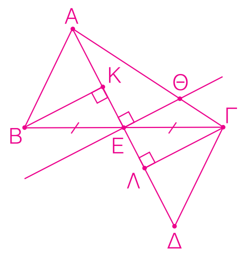
**Λύση**

**α. i.** Έχουμε $ΕΒ = ΕΓ$ και $ΕΑ = ΕΔ$, οπότε το ΑΒΔΓ είναι παραλληλόγραμμο, επομένως $ΑΒ = ΓΔ$. Άρα η απόσταση των χωριών Α και Β είναι ίση με την απόσταση των χωριών Γ και Δ.

**ii.** Επειδή το ΑΒΔΓ είναι παραλληλόγραμμο, έχουμε $ΑΒ // ΓΔ$, οπότε οι δρόμοι ΑΒ και ΓΔ όσο και να προεκταθούν αποκλείεται να συναντηθούν.

**iii.** Φέρουμε $ΒΚ \perp ΑΔ$ και $ΓΛ \perp ΑΔ$.

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΚΕ και ΓΛΕ έχουν:
- $ΕΒ = ΕΓ$
- $Β\hat{Ε}Κ = Γ\hat{Ε}Λ$



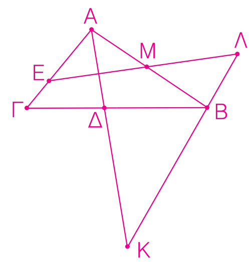

Οπότε είναι ίσα, άρα $ΒΚ = ΓΛ$.

Δηλαδή τα χωριά Β, Γ ισαπέχουν από το δρόμο ΑΔ.

**β.** Για να ισαπέχει κάποιο σημείο από τα Α και Δ, θα πρέπει να ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΔ.

Αφού το σημείο αυτό ανήκει στο δρόμο ΑΓ, θα είναι το σημείο τομής Θ της ΑΓ με τη μεσοκάθετο του ΑΔ.

## 173 Θέμα 4 - 1882




**Έστω τρίγωνο $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$, ΑΔ η διχοτόμος της γωνίας $\hat{Α}$ και Μ το μέσον της ΑΒ.**
**Η κάθετη από το Μ στην ΑΔ τέμνει το ΑΓ στο Ε.**
**Η παράλληλη από το Β στην ΑΓ τέμνει την προέκταση της ΕΜ στο Λ.**
**Να αποδείξετε ότι:**

**α. Τα τρίγωνα ΑΕΜ, ΜΒΛ και ΑΒΚ είναι ισοσκελή.**

**β. Το τετράπλευρο ΑΛΒΕ είναι παραλληλόγραμμο.**

**Λύση**

**α.** Στο τρίγωνο ΑΕΜ η ΑΔ είναι διχοτόμος και ύψος, οπότε είναι ισοσκελές.

Είναι:
- $Α\hat{Ε}Μ = Α\widehat{Μ}Ε$, αφού $ΑΕ = ΑΜ$
- $Α\hat{Ε}Μ = Μ\hat{Λ}Β$, ως εντός εναλλάξ
- $Α\widehat{Μ}Ε = Β\widehat{Μ}Λ$, ως κατακορυφήν.

Άρα $Β\widehat{Μ}Λ = Μ\hat{Λ}Β$, οπότε το τρίγωνο ΒΜΛ είναι ισοσκελές.

Είναι:
- $\hat{Κ} = Γ\hat{Α}Δ$, ως εντός εναλλάξ.
- $Γ\hat{Α}Δ = Δ\hat{Α}Β$, γιατί η ΑΔ είναι διχοτόμος της $\hat{Α}$.

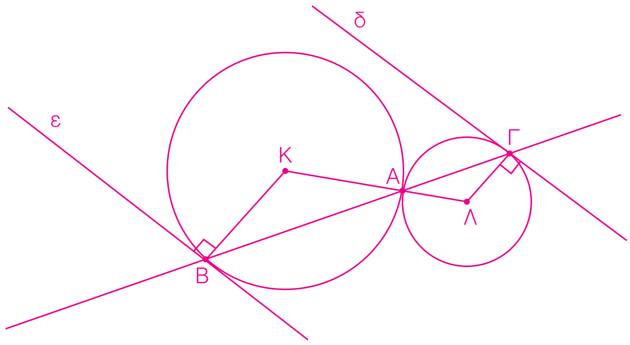
Άρα $Δ\hat{Α}Β = \hat{Κ}$, οπότε το τρίγωνο ΑΒΚ είναι ισοσκελές.

**β.** Από τα ισοσκελή τρίγωνα ΑΕΜ και ΜΒΛ και επειδή το Μ είναι μέσο του ΑΒ, έχουμε $ΑΕ = ΑΜ = ΜΒ = ΒΛ$.

Οπότε $ΑΕ =// ΒΛ$, άρα το ΑΛΒΕ είναι παραλληλόγραμμο.

## 174 Θέμα 4 - 13845

**Οι κύκλοι $(Κ , R)$ , $(Λ , ρ)$ εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Α. Φέρουμε τυχαία ευθεία η οποία διέρχεται από το Α και δεν περνάει από τα κέντρα των κύκλων, τέμνει τους κύκλους αντίστοιχα στα σημεία Β και Γ. Φέρουμε τις εφαπτόμενες (ε) και (δ) στα σημεία Β και Γ.**




**Να αποδείξετε ότι:**

**α.** $\mathbf{Κ\hat{Β}Α = Λ\hat{Γ}Α}$ **.**

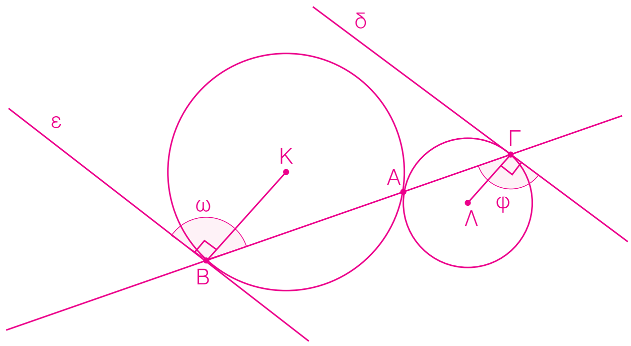
**β.** $\mathbf{(ε)//(δ)}$ **.**

**γ. Να εξετάσετε σε ποια περίπτωση το τετράπλευρο ΚΓΛΒ θα είναι παραλληλόγραμμο; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.**

**Λύση**

**α.** Το τρίγωνο ΑΚΒ είναι ισοσκελές με ΚΒ = ΚΑ, άρα $Κ\hat{Β}Α = Κ\hat{Α}Β$ (1).
Το τρίγωνο ΑΛΓ είναι ισοσκελές με ΛΑ = ΛΓ, άρα $Λ\hat{Α}Γ = Λ\hat{Γ}Α$ (2).

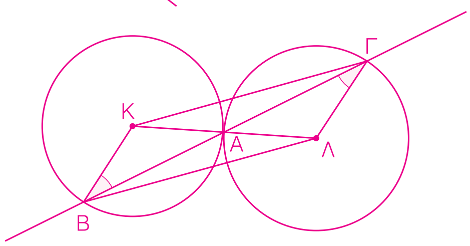
Είναι $Κ\hat{Α}Β = Λ\hat{Α}Γ$ , ως κατακορυφήν, οπότε είναι ίσες, άρα $Κ\hat{Β}Α = Λ\hat{Γ}Α$ .




**β.** Έστω ω και φ οι γωνίες όπως φαίνονται στο σχήμα, οπότε $\hat{ω} = 90^o + Κ\hat{Β}Α$ και $\hat{φ} = 90^o + Λ\hat{Γ}Α$ . Επειδή $Κ\hat{Β}Α = Λ\hat{Γ}Α$ έχουμε $ω = φ$.

Οι ίσες γωνίες ω και φ είναι εντός εναλλάξ των ευθειών (ε) και (δ) που τέμνονται από τη ΒΓ, άρα (ε) // (δ).

**γ.** Για να είναι το τετράπλευρο ΚΓΛΒ παραλληλόγραμμο, θα πρέπει οι απέναντι πλευρές του ΚΒ και ΓΛ να είναι ίσες και παράλληλες.



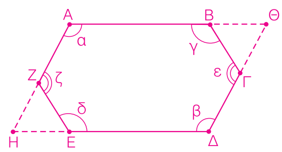

Από το ερώτημα (α) έχουμε ότι οι εντός εναλλάξ γωνίες $Κ\hat{Β}Α$ και $Λ\hat{Γ}Α$ των ΚΒ και ΓΛ που τέμνονται από τη ΒΓ είναι ίσες, άρα ΚΒ // ΓΛ.

Τα ευθύγραμμα τμήματα ΚΒ και ΓΛ είναι ακτίνες των δύο κύκλων, οπότε για να είναι ίσα θα πρέπει οι κύκλοι να είναι ίσοι μεταξύ τους.

Άρα για να είναι το τετράπλευρο ΚΓΛΒ παραλληλόγραμμο θα πρέπει R = ρ.

## 175 Θέμα 4 - 1746

**Στο κυρτό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ ισχύουν τα εξής:** $\hat{α} = \hat{β}$ , $\hat{γ} = \hat{δ}$ **και** $\hat{ε} = \hat{ζ}$ **.**




**α. Να υπολογίσετε το άθροισμα** $\hat{α} + \hat{γ} + \hat{ε}$ **.**

**β. Αν οι πλευρές ΑΖ και ΔΕ προεκτεινόμενες τέμνονται στο Η και οι πλευρές ΑΒ και ΔΓ προεκτεινόμενες τέμνονται στο Θ , να αποδείξετε ότι:**

**i. Οι γωνίες Α και Η είναι παραπληρωματικές.**

**ii. Το τετράπλευρο ΑΘΔΗ είναι παραλληλόγραμμο.**

**Λύση**

**α.** Το άθροισμα των γωνιών του εξαγώνου είναι $(2 \cdot 6 - 4)$ ορθές, δηλαδή $(2 \cdot 6 - 4) \cdot 90^o = 8 \cdot 90^o = 720^o$ .

Οπότε $\hat{α} + \hat{γ} + \hat{ε} + \hat{β} + \hat{δ} + \hat{ζ} = 720^o \Rightarrow \hat{α} + \hat{γ} + \hat{ε} + \hat{α} + \hat{γ} + \hat{ε} = 720^o \Rightarrow 2(\hat{α} + \hat{γ} + \hat{ε}) = 720^o \Rightarrow \hat{α} + \hat{γ} + \hat{ε} = 360^o$ .

**β. i.** Είναι $\hat{Α} + \hat{Η} = \hat{α} + 180^o - Η\hat{Ζ}Ε - Η\hat{Ε}Ζ = \hat{α} + 180^o - (180^o - \hat{ζ}) - (180^o - \hat{δ}) = \hat{α} + 180^o - 180^o + \hat{ζ} - 180^o + \hat{δ}$

$$= \hat{α} + \hat{ζ} + \hat{δ} - 180^o = \hat{α} + \hat{ε} + \hat{γ} - 180^o = 360^o - 180^o = 180^o$$

**ii.** Επειδή οι γωνίες $\hat{A}$ , $\hat{H}$ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη και παραπληρωματικές, προκύπτει $A\Theta // H\Delta$ .
Όμοια έχουμε ότι $\hat{A}+\hat{\Theta}=180^o$, οπότε $AH // \Theta\Delta$ . Άρα το $A\Theta\Delta H$ είναι παραλληλόγραμμο.

## 176 Θέμα 4 - 1730

**Έστω ότι $E$ και $Z$ είναι τα μέσα των πλευρών $AB$ και $\Gamma\Delta$ παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ αντίστοιχα. Αν για το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ επιπλέον ισχύει $AB > A\Delta$ , να εξετάσετε αν είναι αληθείς ή όχι οι ακόλουθοι ισχυρισμοί:**

**Ισχυρισμός 1: Το τετράπλευρο $\Delta EBZ$ είναι παραλληλόγραμμο.**

**Ισχυρισμός 2: $A\hat{E}\Delta = B\hat{Z}\Gamma$ .**

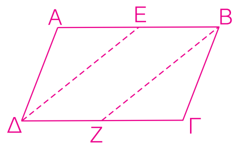
**Ισχυρισμός 3: Οι $\Delta E$ και $BZ$ είναι διχοτόμοι των απέναντι γωνιών $\hat{\Delta}$ και $\hat{B}$ .**

**α. Στην περίπτωση που θεωρείτε ότι κάποιος ισχυρισμός είναι αληθής να τον αποδείξετε.**

**β. Στην περίπτωση που κάποιος ισχυρισμός δεν είναι αληθής, να βρείτε τη σχέση των διαδοχικών πλευρών του παραλληλογράμμου ώστε να είναι αληθής.**

**Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.**

**Λύση**




**α.** • Επειδή το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο, έχουμε

$$AB // = \Gamma\Delta \Rightarrow \frac{AB}{2} // = \frac{\Gamma\Delta}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow EB // = \Delta Z$ , άρα το $\Delta EBZ$ είναι παραλληλόγραμμο.

Οπότε ο ισχυρισμός 1 είναι αληθής.

• Είναι: • $A\hat{E}\Delta = E\hat{\Delta}\Gamma$ , ως εντός εναλλάξ

• $E\hat{\Delta}\Gamma = B\hat{Z}\Gamma$ , ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη

Επομένως $A\hat{E}\Delta = B\hat{Z}\Gamma$ . Άρα ο ισχυρισμός 2 είναι αληθής.

• Ο ισχυρισμός 3 δεν είναι αληθής.

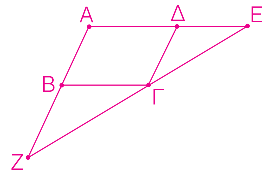
**β.** Ο ισχυρισμός 3 είναι αληθής, αν και μόνο αν $A\hat{\Delta}E = E\hat{\Delta}\Gamma$ και $A\hat{B}Z = Z\hat{B}\Gamma$ .

Επειδή $AB // \Gamma\Delta$ έχουμε $E\hat{\Delta}\Gamma = A\hat{E}\Delta$ , δηλαδή $A\hat{\Delta}E = A\hat{E}\Delta$ .

Οπότε το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές με $AE = A\Delta \Leftrightarrow \frac{AB}{2} = A\Delta \Leftrightarrow AB = 2A\Delta$ .

Στην περίπτωση αυτή και η $BZ$ είναι η διχοτόμος της $\hat{B}$.
Άρα η ζητούμενη σχέση είναι $AB = 2A\Delta$ .

## 177 Θέμα 4 - 1805




**Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και στην προέκταση της $A\Delta$ θεωρούμε σημείο $E$ τέτοιο ώστε $\Delta E = \Delta\Gamma$ ενώ στην προέκταση της $AB$ θεωρούμε σημείο $Z$ τέτοιο ώστε $BZ = B\Gamma$ .**

α. **Να αποδείξετε ότι:**

i. $B\hat{\Gamma}Z = \Delta\hat{\Gamma}E$

ii. **τα σημεία $Z$ , $\Gamma$ , $E$ είναι συνευθειακά.**

β. **Ένας μαθητής για να αποδείξει ότι τα σημεία $Z$ , $\Gamma$ , $E$ είναι συνευθειακά ανέπτυξε τον παρακάτω συλλογισμό.**

**«Έχουμε: $B\hat{\Gamma}Z = \Delta\hat{E}\Gamma$ (ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων $\Delta E$ και $B\Gamma$ που τέμνονται από τη $ZE$ ) και $B\hat{\Gamma}\Delta = \Gamma\hat{\Delta}E$ (ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $\Delta E$ και $B\Gamma$ που τέμνονται από την $\Delta\Gamma$ ) .**

**Όμως $\Delta\hat{\Gamma}E + \Gamma\hat{\Delta}E + \Delta\hat{E}\Gamma = 180^o$ (ως άθροισμα των γωνιών του τριγώνου $\Delta E\Gamma$ ) .**

**Άρα σύμφωνα με τα προηγούμενα:**

$$\Delta\hat{\Gamma}E + B\hat{\Gamma}\Delta + B\hat{\Gamma}Z = 180^o$$

**Οπότε τα σημεία $Z$ , $\Gamma$ , $E$ είναι συνευθειακά.».**

**Όμως ο καθηγητής υπέδειξε ένα λάθος στο συλλογισμό αυτό. Να βρείτε το λάθος στο συγκεκριμένο συλλογισμό.**

**Λύση**

**α. i.** • Το τρίγωνο $B\Gamma Z$ είναι ισοσκελές, οπότε $B\hat{\Gamma}Z = B\hat{Z}\Gamma$ και η $\hat{B}$ είναι εξωτερική γωνία στο τρίγωνο $B\Gamma Z$, οπότε $\hat{B} = B\hat{\Gamma}Z + B\hat{Z}\Gamma = 2B\hat{\Gamma}Z$ .

• Το τρίγωνο $\Delta\Gamma E$ είναι ισοσκελές, οπότε $\Delta\hat{\Gamma}E = \Delta\hat{E}\Gamma$ και η $\hat{\Delta}$ είναι εξωτερική γωνία στο τρίγωνο $\Delta\Gamma E$ , οπότε $\hat{\Delta} = \Delta\hat{\Gamma}E + \Delta\hat{E}\Gamma = 2\Delta\hat{\Gamma}E$ .

Έχουμε $\hat{B} = \hat{\Delta} \Leftrightarrow 2B\hat{\Gamma}Z = 2\Delta\hat{\Gamma}E \Leftrightarrow B\hat{\Gamma}Z = \Delta\hat{\Gamma}E$ .

**ii.** Είναι $B\hat{\Gamma}Z + B\hat{\Gamma}\Delta + \Delta\hat{\Gamma}E = B\hat{Z}\Gamma + B\hat{\Gamma}\Delta + B\hat{Z}\Gamma = 2B\hat{Z}\Gamma + B\hat{\Gamma}\Delta = A\hat{B}\Gamma + B\hat{\Gamma}\Delta = 180^o$ .

Άρα τα $Z$ , $\Gamma$ , $E$ είναι συνευθειακά.

**β.** Το λάθος είναι ότι θεώρησε ως δεδομένο ότι τα σημεία $Z$ , $\Gamma$ , $E$ είναι συνευθειακά, ώστε να αποδείξει ότι $B\hat{\Gamma}Z = \Delta\hat{E}\Gamma$ .

## 178 Θέμα 4 - 1731

**Έστω ότι $E$ και $Z$ είναι τα μέσα των πλευρών $AB$ και $\Gamma\Delta$ παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ αντίστοιχα. Αν για το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ επιπλέον ισχύουν $AB > A\Delta$ και γωνία $A$ αμβλεία , να εξετάσετε αν είναι αληθείς οι ακόλουθοι ισχυρισμοί:**

**Ισχυρισμός 1: Το τετράπλευρο $\Delta EBZ$ είναι παραλληλόγραμμο.**

**Ισχυρισμός 2: Τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $B\Gamma Z$ είναι ίσα.**

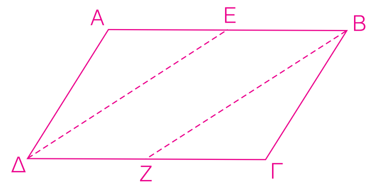
**Ισχυρισμός 3: Τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $B\Gamma Z$ είναι ισοσκελή.**

α. **Στην περίπτωση που θεωρείτε ότι κάποιος ισχυρισμός είναι αληθής να τον αποδείξετε.**

β. **Στην περίπτωση που κάποιος ισχυρισμός δεν είναι αληθής, να βρείτε τη σχέση των διαδοχικών πλευρών του παραλληλογράμμου ώστε να είναι αληθής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.**

**Λύση**

**α.** • Είναι $EB // \Delta Z$ και $AB = \Gamma\Delta \Rightarrow \frac{AB}{2} = \frac{\Gamma\Delta}{2} \Rightarrow EB = \Delta Z$ .




Οπότε το $\Delta EBZ$ είναι παραλληλόγραμμο.
Άρα ο ισχυρισμός 1 είναι αληθής.

• Τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $B\Gamma Z$ έχουν:
- $A\Delta = B\Gamma$
- $AE = \Gamma Z$ , ως μισά ίσων τμημάτων
- $\widehat{A} = \widehat{\Gamma}$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ). Άρα ο ισχυρισμός 2 είναι αληθής.

**β.** Έστω ότι τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $BZ\Gamma$ είναι ισοσκελή.

Τότε θα ισχύει $A\Delta = AE \Leftrightarrow A\Delta = \frac{AB}{2} \Leftrightarrow AB = 2A\Delta$ .

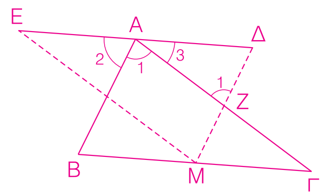
Και αντιστρόφως, αν $AB = 2A\Delta$ , τότε $A\Delta = AE$ , οπότε τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $BZ\Gamma$ θα είναι ισοσκελή.
Άρα τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $BZ\Gamma$ είναι ισοσκελή αν και μόνο αν η μία πλευρά του παραλληλογράμμου είναι διπλάσια της άλλης.

## 179 Θέμα 4 - 1810

**Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ . Από το μέσο $M$ του $B\Gamma$ φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα $M\Delta$ ίσο και παράλληλο με το $BA$ και ευθύγραμμο τμήμα $ME$ ίσο και παράλληλο με το $\Gamma A$ (τα σημεία $\Delta$ και $E$ είναι στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από τη $B\Gamma$ και το σημείο $A$ ). Να αποδείξετε ότι:**

**α. Τα σημεία $\Delta$ , $A$ , $E$ είναι συνευθειακά.**

**β. Η περίμετρος του τριγώνου $M\Delta E$ είναι ίση με την περίμετρο του τριγώνου $AB\Gamma$ .**




**γ. Όταν ένας καθηγητής έθεσε στους μαθητές του το ερώτημα αν τα σημεία $\Delta$ , $A$ , $E$ είναι συνευθειακά, ένας από αυτούς έκανε το παρακάτω σχήμα και απάντησε ως εξής:**

**$\widehat{Z}_1 = \widehat{A}_1$ (εντός εναλλάξ των $AB // M\Delta$ που τέμνονται από $AZ$ )**

**$A\widehat{\Delta}Z = \widehat{A}_2$ (εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των $AB // M\Delta$ που τέμνονται από $\Delta E$ )**

**Όμως $\widehat{Z}_1 + \widehat{A}_3 + A\widehat{\Delta}Z = 180^o$ (άθροισμα γωνιών του τριγώνου $A\Delta Z$ ) .**

**Άρα σύμφωνα με τα προηγούμενα έχουμε: $\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 + \widehat{A}_3 = 180^o$ .**

**Οπότε $\Delta$ , $E$ , $A$ συνευθειακά.**

**Όμως ο καθηγητής είπε ότι υπάρχει λάθος στο συλλογισμό. Μπορείτε να εντοπίσετε το λάθος του μαθητή;**

### Λύση

**α.** Επειδή:
- $M\Delta // = AB$ , το $ABM\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε $A\Delta // B\Gamma$ , (1)
- $ME // = A\Gamma$ , το $A\Gamma ME$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε $AE // B\Gamma$ , (2)

Από το $A$ διέρχεται μόνο μία παράλληλη προς τη $B\Gamma$ , οπότε από τις (1) και (2) έχουμε ότι τα σημεία $\Delta$ , $A$ , $E$ είναι συνευθειακά.

**β.** Επειδή τα $ABM\Delta$ και $A\Gamma ME$ είναι παραλληλόγραμμα, έχουμε $\Delta A = MB$ και $AE = M\Gamma$ .

Είναι $\Delta E = \Delta A + AE = MB + M\Gamma = B\Gamma$ .

Άρα $\Pi_{M\Delta E} = M\Delta + ME + \Delta E = AB + A\Gamma + B\Gamma = \Pi_{AB\Gamma}$ .

**γ.** Το λάθος του μαθητή βρίσκεται στον ισχυρισμό του ότι $A\widehat{\Delta}Z = \widehat{A}_2$ , θεωρώντας ότι η ευθεία $\Delta E$ διέρχεται από το $A$ . Δηλαδή θεώρησε δεδομένο ότι τα σημεία $\Delta$ , $A$ , $E$ είναι συνευθειακά.

## 180 Θέμα 4 - 1709

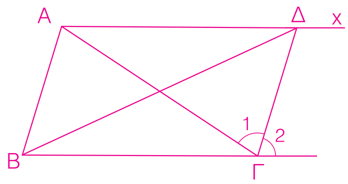
**Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$, στο οποίο η εξωτερική του γωνία $\widehat{Γ}$ είναι διπλάσια της εσωτερικής του γωνίας $\widehat{Α}$. Από την κορυφή $Α$ διέρχεται ημιευθεία $Αx // ΒΓ$ στο ημιεπίπεδο $(ΑΒ, Γ)$. Στην ημιευθεία $Αx$ θεωρούμε σημείο $Δ$ τέτοιο ώστε $ΑΔ = ΒΓ$. Να αποδείξετε ότι:**

**α. Η $ΒΔ$ διέρχεται από το μέσο του τμήματος $ΑΓ$.**

**β. Η $ΓΔ$ είναι διχοτόμος της $\widehat{Γ}_{εξ}$.**

**γ. Το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελές.**

**Λύση**




**α.** Επειδή $ΑΔ // = ΒΓ$, το $ΑΒΓΔ$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

Άρα η $ΒΔ$ διέρχεται από το μέσο του τμήματος $ΑΓ$.

**β.** Επειδή $ΑΒ // ΓΔ$, είναι $\widehat{Γ}_1 = \widehat{Α}$ ως εντός εναλλάξ.

Έχουμε $\widehat{Γ}_{εξ} = 2\widehat{Α} \Leftrightarrow \widehat{Γ}_1 + \widehat{Γ}_2 = 2\widehat{Α} \Leftrightarrow \widehat{Α} + \widehat{Γ}_2 = 2\widehat{Α} \Leftrightarrow \widehat{Γ}_2 = \widehat{Α}$.

Άρα η $ΓΔ$ είναι διχοτόμος της $\widehat{Γ}_{εξ}$.

**γ.** Είναι $\widehat{Γ}_{εξ} = \widehat{Α} + \widehat{Β}$, οπότε $\widehat{Γ}_{εξ} = 2\widehat{Α} \Leftrightarrow \widehat{Α} + \widehat{Β} = 2\widehat{Α} \Leftrightarrow \widehat{Β} = \widehat{Α}$.

Άρα το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελές.

# 18. Ορθογώνιο

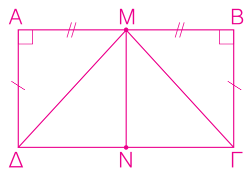
## 181 Θέμα 2 - 1599

**Σε ορθογώνιο $ΑΒΓΔ$, αν $Μ$ και $Ν$ είναι τα μέσα των $ΑΒ$ και $ΓΔ$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:**

**α. $ΜΔ = ΜΓ$**

**β. Η ευθεία $ΜΝ$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος $ΓΔ$.**

**Λύση**




**α.** Τα τρίγωνα $ΑΜΔ$ και $ΜΒΓ$ είναι ορθογώνια και έχουν:

- $ΑΔ = ΒΓ$, ως απέναντι πλευρές ορθογωνίου
- $ΑΜ = ΜΒ$, διότι το $Μ$ είναι μέσο του $ΑΒ$

Άρα είναι ίσα, οπότε $ΜΔ = ΜΓ$.

**β.** Στο ισοσκελές $ΜΓΔ$ η $ΜΝ$ είναι διάμεσος, οπότε και ύψος.

Άρα η ευθεία $ΜΝ$ είναι η μεσοκάθετος του $ΓΔ$.

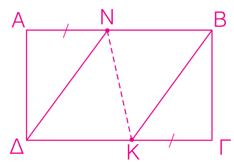
## 182 Θέμα 2 - 1692

**Έστω ορθογώνιο $ΑΒΓΔ$ και τα σημεία $Ν$ και $Κ$ των $ΑΒ$ και $ΔΓ$ αντίστοιχα, τέτοια ώστε $ΑΝ = ΚΓ$. Να αποδείξετε ότι:**

**α. τα τρίγωνα $ΑΝΔ$ και $ΒΓΚ$ είναι ίσα**

**β. το τετράπλευρο $ΝΒΚΔ$ είναι παραλληλόγραμμο.**

**Λύση**




**α.** Επειδή το $ΑΒΓΔ$ είναι ορθογώνιο, έχουμε $\hat{Α} = \hat{Γ} = 90^\circ$ και $ΑΔ = ΒΓ$.

Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΑΝΔ$ και $ΒΓΚ$ έχουν:

- $ΑΔ = ΒΓ$
- $ΑΝ = ΓΚ$

Οπότε είναι ίσα.

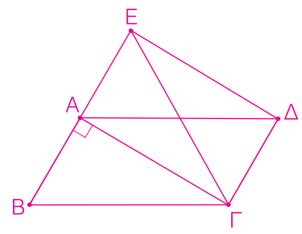
**β.** Επειδή το $ΑΒΓΔ$ είναι ορθογώνιο, έχουμε $ΑΒ // = ΓΔ$.

Είναι $ΑΝ = ΚΓ$, οπότε $ΒΝ = ΑΒ - ΑΝ = ΓΔ - ΓΚ = ΚΔ$

Επομένως $ΝΒ // = ΚΔ$.

Άρα το $ΝΒΚΔ$ είναι παραλληλόγραμμο.

## 183 Θέμα 2 - 1653




**Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ είναι παραλληλόγραμμο και το $ΑΓΔΕ$ είναι ορθογώνιο. Να αποδείξετε ότι:**

**α. Το σημείο $Α$ είναι μέσο του $ΒΕ$.**

**β. Το τρίγωνο $ΒΕΓ$ είναι ισοσκελές.**

**γ. $Β\hat{Γ}Α = Α\hat{Δ}Ε$**

**Λύση**

**α.** Είναι:
- $ΑΒ = ΓΔ$, (1) και $ΑΒ // ΓΔ$, (2) ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου $ΑΒΓΔ$.
- $ΑΕ = ΓΔ$, (3) και $ΑΕ // ΓΔ$, (4) ως απέναντι πλευρές του ορθογωνίου $ΑΓΔΕ$.

Από τις (2), (4) έχουμε $ΑΒ // ΑΕ$, οπότε τα $Β$, $Α$ και $Ε$ είναι συνευθειακά.

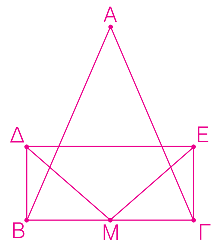
Επειδή $ΑΒ = ΑΕ$, από τις (1), (3) έχουμε ότι $Α$ είναι μέσο του $ΒΕ$.

**β.** Στο τρίγωνο $ΒΕΓ$ το $ΓΑ$ είναι ύψος και διάμεσος, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

**γ.** Είναι:
- $Β\hat{Γ}Α = Γ\hat{Α}Δ$, ως εντός εναλλάξ
- $Γ\hat{Α}Δ = Α\hat{Δ}Ε$, ως εντός εναλλάξ

Άρα $Β\hat{Γ}Α = Α\hat{Δ}Ε$.

## 184 Θέμα 2 - 1668




**Έστω ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $ΑΒ = ΑΓ$ και $Μ$ το μέσο της πλευράς $ΒΓ$. Στα σημεία $Β$ και $Γ$ φέρουμε κάθετες στη $ΒΓ$ προς το ίδιο μέρος, και θεωρούμε σε αυτές σημεία $Δ$ και $Ε$ αντίστοιχα, τέτοια ώστε $ΜΔ = ΜΕ$. Να αποδείξετε ότι:**

**α. Τα τμήματα $ΒΔ$ και $ΓΕ$ είναι ίσα.**

**β. Το τετράπλευρο $ΒΔΕΓ$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.**

**Λύση**

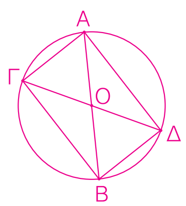
**α.** Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΒΔΜ$ και $ΓΕΜ$ έχουν:
- $ΜΔ = ΜΕ$
- $ΜΒ = ΜΓ$

Οπότε είναι ίσα, άρα $ΒΔ = ΓΕ$.

**β.** Είναι $ΒΔ \perp ΒΓ$ και $ΓΕ \perp ΒΓ$, οπότε $ΒΔ // ΓΕ$.

Επειδή $ΒΔ // = ΓΕ$, το $ΒΔΕΓ$ είναι παραλληλόγραμμο και αφού επιπλέον είναι $Δ\hat{Β}Γ = 90^{o}$, είναι ορθογώνιο.

## 185 Θέμα 2 - 1683




**Σε κύκλο κέντρου $Ο$ φέρουμε δυο διαμέτρους του $ΑΒ$ και $ΓΔ$. Να αποδείξετε ότι:**

**α. Οι χορδές $ΑΓ$ και $ΒΔ$ του κύκλου είναι ίσες.**

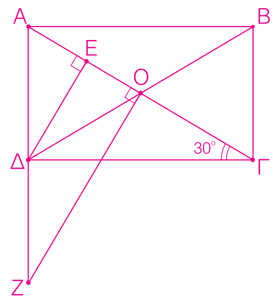
**β. Το τετράπλευρο $ΑΓΒΔ$ είναι ορθογώνιο.**

**Λύση**

**α.** Είναι $Α\hat{Ο}Γ = Β\hat{Ο}Δ$, οπότε $\overset{\frown}{ΑΓ} = \overset{\frown}{ΒΔ}$, άρα $ΑΓ = ΔΒ$.

**β.** Στο τετράπλευρο $ΑΓΒΔ$ οι διαγώνιοι $ΑΒ$ και $ΓΔ$ διχοτομούνται και είναι ίσες.
Άρα το $ΑΓΒΔ$ είναι ορθογώνιο.

## 186 Θέμα 4 - 1729




**Στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ είναι $Δ\hat{Γ}Α = 30^o$ και $Ο$ το κέντρο του. Φέρουμε $ΔΕ \perp ΑΓ$ .**

**α. Να αποδείξετε ότι η γωνία $Α\hat{Δ}Γ$ χωρίζεται από τη $ΔΕ$ και τη διαγώνιο $ΔΒ$ σε τρεις ίσες γωνίες.**

**β. Φέρουμε κάθετη στην $ΑΓ$ στο σημείο $Ο$ η οποία τέμνει την προέκταση της $ΑΔ$ στο $Ζ$ . Να δείξετε ότι τα τρίγωνα $ΑΖΟ$ και $ΑΒΓ$ είναι ίσα.**

**Λύση**

**α.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο:
- $ΑΔΓ$ είναι $Δ\hat{Γ}Α = 30^o$ , οπότε $Δ\hat{Α}Γ = 60^o$
- $ΔΑΕ$ είναι $Δ\hat{Α}Γ = 60^o$ , οπότε $Α\hat{Δ}Ε = 30^o$

Οι διαγώνιοι $ΑΓ$ και $ΒΔ$ του ορθογωνίου $ΑΒΓΔ$ είναι ίσες και διχοτομούνται, άρα $ΟΓ = \frac{ΑΓ}{2} = \frac{ΒΔ}{2} = ΟΔ$ .

Επομένως το τρίγωνο $ΟΓΔ$ είναι ισοσκελές με βάση $ΔΓ$, οπότε $Ο\hat{Δ}Γ = Ο\hat{Γ}Δ = 30^o$ .

Είναι: $Α\hat{Δ}Ε + Ε\hat{Δ}Ο + Ο\hat{Δ}Γ = 90^o \Leftrightarrow 30^o + Ε\hat{Δ}Ο + 30^o = 90^o \Leftrightarrow Ε\hat{Δ}Ο = 30^o$ .

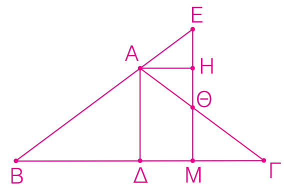
Επομένως $Α\hat{Δ}Ε = Ε\hat{Δ}Ο = Ο\hat{Δ}Γ = 30^o$ .

Άρα η γωνία $Α\hat{Δ}Γ$ χωρίζεται από τις $ΔΕ$ και $ΔΒ$ σε τρεις ίσες γωνίες.

**β.** Το τρίγωνο $ΟΑΔ$ είναι ισοσκελές με $ΟΑ = ΟΔ$ και είναι $Δ\hat{Α}Γ = 60^o$ οπότε $Δ\hat{Α}Ε = 60^o$ .
Άρα το ισοσκελές τρίγωνο $ΟΑΔ$ είναι ισόπλευρο με $ΟΑ = ΟΔ = ΑΔ$ .
Όμως $ΑΔ = ΒΓ$ , οπότε $ΟΑ = ΒΓ$ .
Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΑΖΟ$ και $ΑΒΓ$ έχουν:
- $ΟΑ = ΒΓ$
- $Α\hat{Γ}Β = 90^o - 30^o = 60^o = Ζ\hat{Α}Ο$

Άρα είναι ίσα.

## 187 Θέμα 4 - 1822




**Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ $(ΑΒ = ΑΓ)$ , και τυχαίο σημείο $Μ$ της πλευράς $ΒΓ$ . Από το σημείο $Μ$ φέρουμε ευθεία κάθετη στην πλευρά $ΒΓ$ που τέμνει τις ευθείες $ΑΒ$ και $ΑΓ$ στα σημεία $Ε$ και $Θ$ αντίστοιχα. Αν $ΑΔ$ και $ΑΗ$ τα ύψη των τριγώνων $ΑΒΓ$ και $ΑΘΕ$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:**

**α. $Δ\hat{Α}Η = 90^o$**

**β. Το τρίγωνο $ΑΘΕ$ είναι ισοσκελές.**

**γ. $ΜΘ + ΜΕ = 2ΑΔ$**

**Λύση**

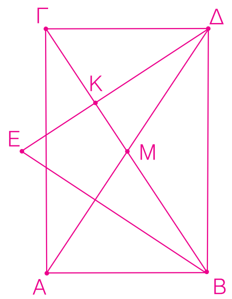
**α.** Το $ΑΗΜΔ$ είναι ορθογώνιο, αφού $\hat{Δ} = \hat{Μ} = \hat{Η} = 90^o$ .

Άρα $Δ\hat{Α}Η = 90^o$ .

**β.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΕΜΒ$ έχουμε $\hat{Ε} = 90^o - \hat{Β} \Rightarrow \hat{Ε} = 90^o - \hat{Γ}$ , αφού το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελές.
Είναι $Α\hat{Θ}Ε = Μ\hat{Θ}Γ$ , ως κατακορυφήν και $Μ\hat{Θ}Γ = 90^o - \hat{Γ}$ από το ορθογώνιο τρίγωνο $ΜΘΓ$,
οπότε $Α\hat{Θ}Ε = 90^o - \hat{Γ}$ .
Επομένως $\hat{Ε} = Α\hat{Θ}Ε$ , άρα το τρίγωνο $ΑΘΕ$ είναι ισοσκελές.

**γ.** Το $ΑΔΜΗ$ είναι ορθογώνιο, οπότε $ΜΗ = ΑΔ$ .
Το τρίγωνο $ΑΘΕ$ είναι ισοσκελές, οπότε το ύψος $ΑΗ$ είναι και διάμεσος, άρα $ΘΗ = ΗΕ$ .
Είναι $ΜΘ + ΜΕ = ΜΗ - ΗΘ + ΜΗ + ΗΕ = 2ΜΗ - ΗΘ + ΗΘ = 2ΑΔ$ .

## 188 Θέμα 4 - 1833




**Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ ($\hat{Α} = 90^{o}$). Φέρουμε τη διάμεσό του $ΑΜ$ την οποία προεκτείνουμε (προς το μέρος του $Μ$) κατά τμήμα $ΜΔ = ΑΜ$. Θεωρούμε ευθεία $ΔΚ$ κάθετη στη $ΒΓ$, η οποία τέμνει τη διχοτόμο της γωνίας $Β$ στο $Ε$. Να αποδείξετε ότι:**

**α. Το τετράπλευρο $ΑΒΔΓ$ είναι ορθογώνιο.**

**β. $Κ\hat{Ε}Β = 90^{o} - \dfrac{\hat{Β}}{2}$** **γ. $ΔΕ = ΒΔ$**

**Λύση**

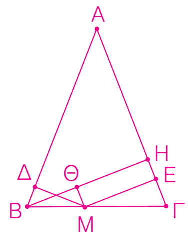
**α.** Επειδή $ΜΑ = ΜΔ$ και $ΜΓ = ΜΒ$, το $ΑΒΔΓ$ είναι παραλληλόγραμμο και επειδή επιπλέον έχει $\hat{Α} = 90^{o}$ είναι ορθογώνιο.

**β.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΚΕΒ$ έχουμε $Κ\hat{Ε}Β = 90^{o} - Κ\hat{Β}Ε \Leftrightarrow Κ\hat{Ε}Β = 90^{o} - \dfrac{\hat{Β}}{2}$.

**γ.** Είναι $Δ\hat{Β}Ε = 90^{o} - Ε\hat{Β}Α = 90^{o} - \dfrac{\hat{Β}}{2}$.

Οπότε $Δ\hat{Β}Ε = Κ\hat{Ε}Β$. Άρα $ΔΕ = ΒΔ$.

## 189 Θέμα 4 - 1800




**Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $ΑΒ = ΑΓ$, τυχαίο σημείο $Μ$ της βάσης του $ΒΓ$ και το ύψος του $ΒΗ$. Από το $Μ$ φέρουμε κάθετες $ΜΔ$, $ΜΕ$ και $ΜΘ$ στις $ΑΒ$, $ΑΓ$ και $ΒΗ$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:**

**α. Το τετράπλευρο $ΜΕΗΘ$ είναι ορθογώνιο.**

**β. $ΒΘ = ΜΔ$**

**γ. Το άθροισμα $ΜΔ + ΜΕ = ΒΗ$.**

**Λύση**

**α.** Στο τετράπλευρο $ΜΕΗΘ$ είναι $\hat{Ε} = \hat{Η} = \hat{Θ} = 90^{o}$, οπότε είναι ορθογώνιο.

**β.** Είναι $ΜΘ \perp ΒΗ$ και $ΓΗ \perp ΒΗ$, άρα $ΜΘ \,//\, ΑΓ$.

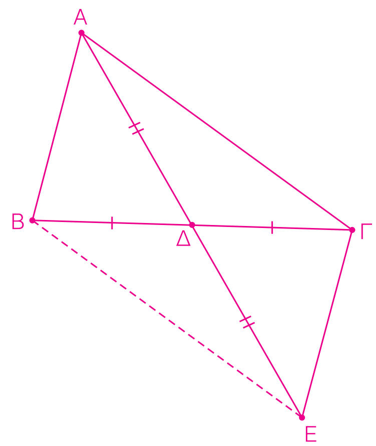
Οπότε $Β\hat{Μ}Θ = \hat{Γ}$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη και αφού $\hat{Γ} = \hat{Β}$ έχουμε $Β\hat{Μ}Θ = \hat{Β}$.

Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΘΒΜ$ και $ΔΒΜ$ έχουν:
- $ΜΒ$ κοινή
- $Β\hat{Μ}Θ = \hat{Β}$

Οπότε είναι ίσα, άρα $ΒΘ = ΜΔ$.

**γ.** Είναι $ΜΔ + ΜΕ = ΒΘ + ΘΗ = ΒΗ$.

## 190 Θέμα 4 - 13746




**Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσός του ΑΔ. Στην προέκταση της διαμέσου ΑΔ προς το Δ παίρνουμε σημείο Ε, έτσι ώστε $ΑΔ = ΔΕ$.**

**α. Να αποδείξετε ότι :**

**i. Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΕΓΔ είναι ίσα.**

**ii. Η διάμεσος ΑΔ είναι μικρότερη από το ημιάθροισμα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ που την περιέχουν.**

**β. Αν στο τρίγωνο ΑΒΓ το διπλάσιο της διαμέσου ΑΔ ισούται με την πλευρά ΒΓ, να χαρακτηρίσετε το είδος του τετράπλευρου ΑΒΕΓ και το είδος του τριγώνου ΑΒΓ και να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.**

**Λύση**

**α. i.** Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $E\Gamma\Delta$ έχουν:

- $A\Delta = \Delta E$ ,
- $B\Delta = \Delta\Gamma$ ,
- $A\hat{\Delta}B = E\hat{\Delta}\Gamma$ , ως κατακορυφήν γωνίες

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα (ΠΓΠ), οπότε $AB = \Gamma E$ (1)

**i.** Από την τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο ΑΓΕ έχουμε:

$$AE < A\Gamma + \Gamma E \Leftrightarrow AE < A\Gamma + AB \Leftrightarrow 2A\Delta < AB + A\Gamma \Leftrightarrow A\Delta < \frac{AB + A\Gamma}{2}.$$

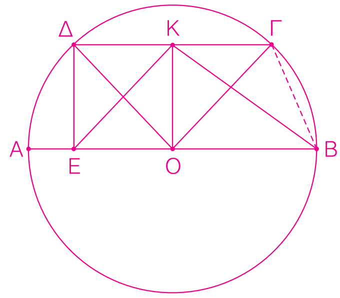
Άρα η διάμεσος $A\Delta$ είναι μικρότερη από το ημιάθροισμα των πλευρών $AB$ και $A\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$ που την περιέχουν.

**β.** • Έχουμε $2A\Delta = B\Gamma \Leftrightarrow AE = B\Gamma$ , άρα στο τετράπλευρο $ABE\Gamma$ οι διαγώνιές του είναι ίσες.

• Είναι $A\Delta = \Delta E$ και $B\Delta = \Delta\Gamma$ , δηλαδή οι διαγώνιες του τετράπλευρου $ABE\Gamma$ διχοτομούνται, οπότε αυτό είναι παραλληλόγραμμο και επιπλέον είναι ίσες, άρα το τετράπλευρο $ABE\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

Επομένως στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{A} = 90^o$ , αφού το $ABE\Gamma$ ορθογώνιο, άρα το $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο τρίγωνο.

## 191 Θέμα 4 - 1879




**Έστω κύκλος με κέντρο Ο και διάμετρο ΑΒ. Φέρουμε χορδή $\Gamma\Delta // AB$ με Κ το μέσο της. Από το Δ φέρνουμε το τμήμα ΔΕ κάθετο στην ΑΒ. Να αποδείξετε ότι:**

**α. Το τετράπλευρο ΚΓΟΕ είναι παραλληλόγραμμο.**

**β.** $\Delta\hat{E}K = \dfrac{\Delta\hat{O}\Gamma}{2}$ **γ.** $KE < KB$

**Λύση**

**α.** Επειδή το σημείο Κ είναι το μέσο της χορδής ΓΔ , έχουμε $OK \perp \Gamma\Delta$ .
Είναι $AB // \Delta\Gamma$ και $\Delta E \perp AB$ , άρα $\Delta E \perp \Delta\Gamma$ .
Στο ΔΚΟΕ είναι $\hat{\Delta} = \hat{E} = \hat{K} = 90^o$ , οπότε είναι ορθογώνιο.
Άρα $EO = \Delta K$ και αφού $\Delta K = K\Gamma$ έχουμε $EO = K\Gamma$ .
Επομένως $EO // = K\Gamma$ , άρα το ΚΓΟΕ είναι παραλληλόγραμμο.

**β.** Στο ισοσκελές τρίγωνο ΟΓΔ $(O\Gamma = O\Delta)$ , η ΟΚ είναι διάμεσος, οπότε είναι και διχοτόμος, άρα $K\hat{O}\Gamma = \dfrac{\Delta\hat{O}\Gamma}{2}$ .

Οι γωνίες $\Delta\hat{E}K$ και $K\hat{O}\Gamma$ είναι ίσες, ως οξείες με πλευρές παράλληλες, άρα $\Delta\hat{E}K = K\hat{O}\Gamma$ .

Επομένως $\Delta\hat{E}K = \dfrac{\Delta\hat{O}\Gamma}{2}$ .

**γ.** Είναι $KE = O\Delta$ , ως διαγώνιοι του ορθογωνίου ΔΕΟΚ και $O\Delta = OB$ , ως ακτίνες του κύκλου.
Άρα $KE = OB$ .
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΒΚ, η ΚΒ είναι υποτείνουσά του, οπότε $OB < KB$ .
Άρα $KE < KB$

2[ος] τρόπος
Είναι $KO \perp AB$ και $EO < AO = OB$ , άρα για τα πλάγια τμήματα ΚΕ και ΚΒ έχουμε $KE < KB$ .

## 192 Θέμα 4 - 1733

**Έστω $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ δυο κάθετες ευθείες που τέμνονται στο Ο και τυχαίο σημείο Μ του επιπέδου που δεν ανήκει στις ευθείες.**

**α. Αν $M_1$ είναι το συμμετρικό του Μ ως προς την $\varepsilon_1$ και $M_2$ το συμμετρικό του $M_1$ ως προς την $\varepsilon_2$, να αποδείξετε ότι:**

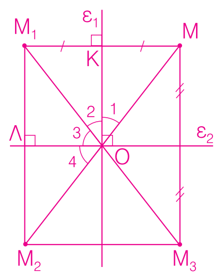
**i. $OM = OM_1$**

**ii. Τα σημεία Μ, Ο και $M_2$ είναι συνευθειακά.**

**iii. Το τρίγωνο $MM_1M_2$ είναι ορθογώνιο.**

**β. Αν $M_3$ είναι το συμμετρικό σημείο του $M_2$ ως προς την $\varepsilon_1$, τι είδους παραλληλόγραμμο είναι το $MM_1M_2M_3$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.**

**Λύση**




**α. i.** Η ευθεία $\varepsilon_1$ είναι η μεσοκάθετος του $MM_1$, οπότε $OM = OM_1$.

**ii.** Στο ισοσκελές τρίγωνο $OMM_1$ η διάμεσος ΟΚ είναι και διχοτόμος, άρα $M\hat{O}M_1 = 2\hat{O}_2$.

Επειδή στο τρίγωνο $M_1OM_2$ η ΟΛ είναι διάμεσος και ύψος το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

Άρα η ΟΛ είναι και διχοτόμος και ισχύει $M_1\hat{O}M_2 = 2\hat{O}_3$.

Τότε $M\hat{O}M_2 = M\hat{O}M_1 + M_1\hat{O}M_2 = 2\hat{O}_2 + 2\hat{O}_3 = 2(\hat{O}_2 + \hat{O}_3) = 2\cdot 90^o = 180^o$.

Αφού η γωνία $M\hat{O}M_2$ είναι ευθεία γωνία, τα σημεία Μ, Ο και $M_2$ είναι συνευθειακά.

**iii.** Το $KM_1\Lambda O$ είναι ορθογώνιο, αφού έχει τρεις ορθές γωνίες $\hat{K} = \hat{\Lambda} = \hat{O} = 90^o$.

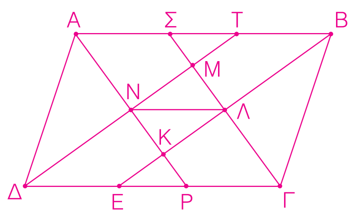
Επειδή το $KM_1\Lambda O$ είναι ορθογώνιο έχουμε $\hat{M}_1 = 90^o$, οπότε το τρίγωνο $MM_1M_2$ είναι ορθογώνιο.

**β.** Τα $M_1$ και $M_3$ είναι τα συμμετρικά του Μ ως προς τις $\varepsilon_1$ και $\varepsilon_2$. Από το **α.ii.** ερώτημα έχουμε ότι τα $M_1$, Ο και $M_3$ είναι συνευθειακά. Είναι

$OM_1 = OM = OM_2 = OM_3$, οπότε στο $MM_1M_2M_3$ οι διαγώνιοι διχοτομούνται και είναι ίσες, άρα είναι ορθογώνιο.

## 193 Θέμα 4 - 1891

**Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΑΒ > ΑΔ και οι διχοτόμοι των γωνιών του ΑΡ, ΒΕ, ΓΣ και ΔΤ (όπου Ρ, Ε στην ΔΓ και Σ, Τ στην ΑΒ) τέμνονται στα σημεία Κ, Λ, Μ και Ν όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Να αποδείξετε ότι:**




**α. το τετράπλευρο ΔΕΒΤ είναι παραλληλόγραμμο.**

**β. το τετράπλευρο ΚΛΜΝ είναι ορθογώνιο.**

**γ. ΛΝ // ΑΒ**

**δ. ΛΝ = ΑΒ − ΑΔ**

**Λύση**

**α.** Είναι:

- $A\hat{\Delta}T = T\hat{\Delta}E$ και $T\hat{\Delta}E = A\hat{T}\Delta$, ως εντός εναλλάξ, οπότε $A\hat{\Delta}T = A\hat{T}\Delta$, άρα το τρίγωνο ΑΔΤ είναι ισοσκελές με ΑΔ = ΑΤ.
- $\Gamma\hat{B}E = E\hat{B}T$ και $E\hat{B}T = B\hat{E}\Gamma$, ως εντός εναλλάξ, οπότε $\Gamma\hat{B}E = B\hat{E}\Gamma$.

Άρα το τρίγωνο ΒΓΕ είναι ισοσκελές με ΓΒ = ΓΕ.

Είναι ΒΤ = ΑΒ − ΑΤ = ΑΒ − ΑΔ = ΓΔ − ΒΓ = ΓΔ − ΓΕ = ΔΕ

Επειδή ΒΤ //= ΔΕ, το ΔΕΒΤ είναι παραλληλόγραμμο.

**β.** • Στο ισοσκελές τρίγωνο $A\Delta T$ η διχοτόμος του $AN$ είναι και ύψος, οπότε $AN \perp \Delta T$, άρα $M\hat{N}K = 90^o$, και $\Delta T // BE$, οπότε είναι $AN \perp BE$, άρα $N\hat{K}\Lambda = 90^o$.

• Στο ισοσκελές τρίγωνο ΒΓΕ η διχοτόμος της ΓΛ είναι και ύψος, οπότε $\Gamma\Lambda \perp BE$, άρα $M\hat{\Lambda}K = 90^o$.
Επειδή το $K\Lambda MN$ έχει τρεις ορθές γωνίες, είναι ορθογώνιο.

**γ.** Το $\Delta EBT$ είναι παραλληλόγραμμο και τα $N$, $\Lambda$ είναι τα μέσα των τμημάτων $\Delta T$, $BE$ που είναι ίσα.
Άρα $NT // = B\Lambda$, οπότε το $TB\Lambda N$ είναι παραλληλόγραμμο, επομένως $N\Lambda // AB$.

**δ.** Είναι $N\Lambda = BT = AB - AT = AB - A\Delta$.

## 194 Θέμα 4 - 13699

**Δίνονται δυο κύκλοι $(K, \rho_1)$ και $(\Lambda, \rho_2)$ που εφάπτονται εξωτερικά σε σημείο Α. Έστω ότι μια ευθεία (ε) εφάπτεται εξωτερικά στους δυο κύκλους σε σημεία τους Β και Γ αντίστοιχα και ότι η εσωτερική εφαπτομένη (ζ) των κύκλων στο σημείο επαφής τους Α τέμνει την ευθεία (ε) σε σημείο Μ.**

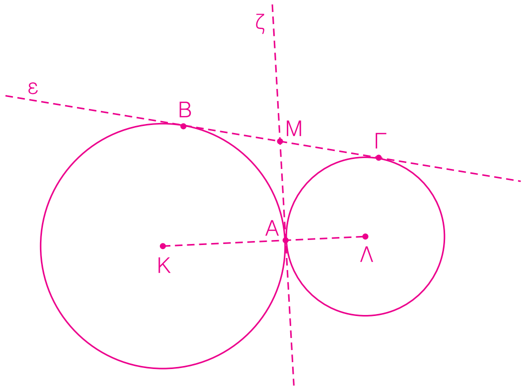
**α. Να αποδείξετε ότι:**

**i. οι ευθείες ΚΒ και ΛΜ τέμνονται σε σημείο, έστω Δ.**

**ii. το τρίγωνο ΔΚΛ είναι ισοσκελές.**

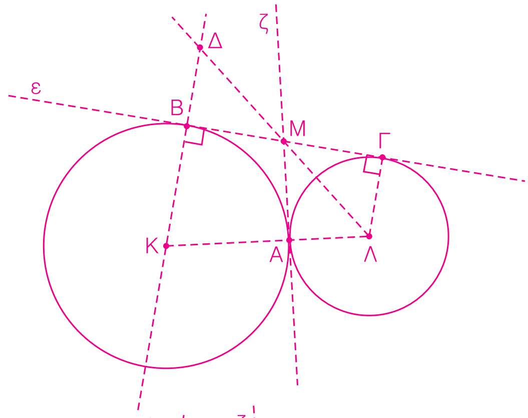
**β. Με ποια σχέση πρέπει να συνδέονται οι ακτίνες $\rho_1$ και $\rho_2$ των δύο κύκλων ώστε το ισοσκελές τρίγωνο ΔΚΛ να είναι ορθογώνιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.**

**Λύση**




**α.** Οι ακτίνες των δυο κύκλων στα σημεία επαφής $B$ και $\Gamma$ είναι κάθετες στην $(\varepsilon)$, οπότε θα είναι $KB // \Lambda\Gamma$.

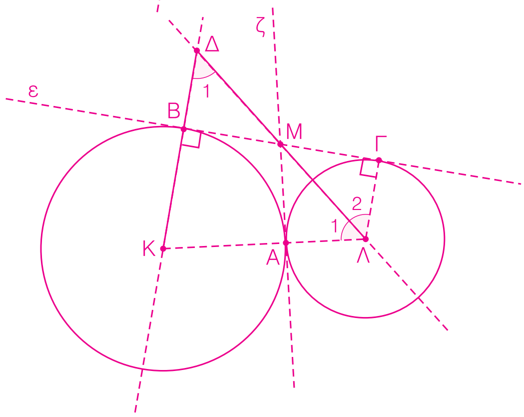
Η ΛΜ δεν είναι κάθετη στην $(\varepsilon)$, γιατί αν η $\Lambda M$ ήταν κάθετη στη $(\varepsilon)$ τότε από το σημείο $\Lambda$ θα άγονταν δυο κάθετες στην $(\varepsilon)$, η $\Lambda M$ και η $\Lambda\Gamma$ ως ακτίνα στο σημείο επαφής $\Gamma$ του κύκλου $(\Lambda, \rho_2)$ με την ευθεία $(\varepsilon)$, που είναι άτοπο, και αφού η $\Lambda M$ τέμνει την $\Lambda\Gamma$ στο $\Lambda$ θα τέμνει και την παράλληλή της την $KB$ έστω σε σημείο $\Delta$.




**β.** • Είναι $K\Delta // \Lambda\Gamma$, οπότε $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Lambda}_2$ (1) ως γωνίες εντός εναλλάξ.

• Η $\Delta\Lambda$ είναι διακεντρική ευθεία του σημείου Μ στον κύκλο $(\Lambda, \rho_2)$, οπότε θα διχοτομεί τη γωνία $\Gamma\hat{\Lambda}A$ δηλαδή $\hat{\Lambda}_2 = \hat{\Lambda}_1$ (2).

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Lambda}_1$, οπότε το τρίγωνο $\Delta K\Lambda$ είναι ισοσκελές.



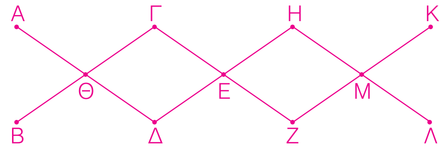

**γ.** Το ισοσκελές τρίγωνο $\Delta K\Lambda$ με ίσες πλευρές τις $K\Lambda$, $KB$ θα είναι ορθογώνιο όταν $\Delta\hat{K}\Lambda = 90^o$.

Αν $\Delta\hat{K}\Lambda = 90^o$ τότε $K\Lambda \perp K\Delta$, οπότε $K\Lambda // (\varepsilon)$, άρα το τετράπλευρο $K\Lambda\Gamma B$ θα είναι ορθογώνιο γιατί θα είχε τρεις ορθές γωνίες, τις $\Delta\hat{K}\Lambda$, $K\hat{B}\Gamma$ και $\Lambda\hat{\Gamma}B$.

Αν το $K\Lambda\Gamma B$ είναι ορθογώνιο τότε $KB = \Lambda\Gamma \Leftrightarrow \rho_1 = \rho_2$.

Επομένως, αν οι κύκλοι είναι ίσοι, τότε το ισοσκελές τρίγωνο $\Delta K\Lambda$ θα είναι ορθογώνιο.

## 195 Θέμα 4 - 1714




**Στην παρακάτω εικόνα φαίνεται μια κρεμάστρα τοίχου η οποία αποτελείται από έξι ίσα ευθύγραμμα κομμάτια ξύλου**

**( ΑΔ , ΒΓ , ΓΖ , ΔΗ , ΖΚ , ΗΛ )**

**που είναι στερεωμένα με έντεκα καρφιά**

**( Α , Β , Γ , Δ , Θ , Ε , Μ , Η , Κ , Λ , Ζ )**

**Αν το σημείο Θ , είναι μέσο των τμημάτων ΑΔ και ΒΓ ενώ το σημείο Ε είναι μέσο των τμημάτων ΓΖ και ΔΗ , να αποδείξετε ότι:**

**α. Το τετράπλευρο ΓΗΖΔ είναι ορθογώνιο.**

**β. Τα σημεία Β , Δ , Ζ είναι συνευθειακά.**

**γ. Το τετράπλευρο ΑΓΖΔ είναι παραλληλόγραμμο.**

**Λύση**

**α.** Επειδή στο ΓΗΖΔ οι διαγώνιοί του διχοτομούνται και είναι ίσες, είναι ορθογώνιο.

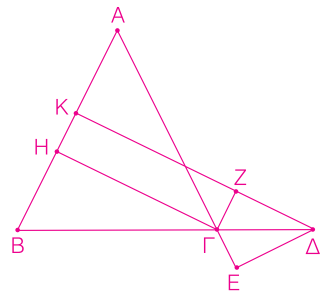
**β.** Όμοια το ΑΓΔΒ είναι ορθογώνιο.

Είναι $B\hat{\Delta}Z = B\hat{\Delta}\Gamma + \Gamma\hat{\Delta}Z = 90^o + 90^o = 180^o$ , οπότε τα Β , Δ , Ζ είναι συνευθειακά.

**γ.** Το ΓΘΔΕ είναι παραλληλόγραμμο, αφού έχει τις απέναντι πλευρές ίσες.

Οπότε $\Theta\Delta // = \Gamma E \Rightarrow 2\Theta\Delta // = 2\Gamma E \Rightarrow A\Delta // = \Gamma Z$ , άρα το ΑΓΖΔ είναι παραλληλόγραμμο.

## 196 Θέμα 4 - 1816




**Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$ και σημείο Δ στην προέκταση της ΒΓ . Από το Δ φέρουμε ΔΚ κάθετη στην ΑΒ και ΔΕ κάθετη στην προέκταση της ΑΓ . Από το σημείο Γ φέρουμε ΓΗ κάθετη στην ΑΒ και ΓΖ κάθετη στην ΚΔ . Να αποδείξετε ότι:**

**α. Η γωνία ΖΓΔ είναι ίση με τη γωνία Β .**

**β. Η ΓΔ είναι διχοτόμος της γωνίας ΖΓΕ .**

**γ. Το τρίγωνο ΔΖΕ είναι ισοσκελές.**

**δ. $\Delta K - \Delta E = H\Gamma$**

**Λύση**

**α.** Επειδή $\Gamma Z \perp K\Delta$ και $AB \perp K\Delta$, έχουμε $\Gamma Z // AB$, οπότε $\hat{B} = Z\hat{\Gamma}\Delta$, ως εντός, εκτός και επί τα αυτά μέρη.

**β.** Είναι $\Delta\hat{\Gamma}E = \hat{\Gamma} = \hat{B} = Z\hat{\Gamma}\Delta$ , οπότε η ΓΔ είναι η διχοτόμος της $Z\hat{\Gamma}E$ .

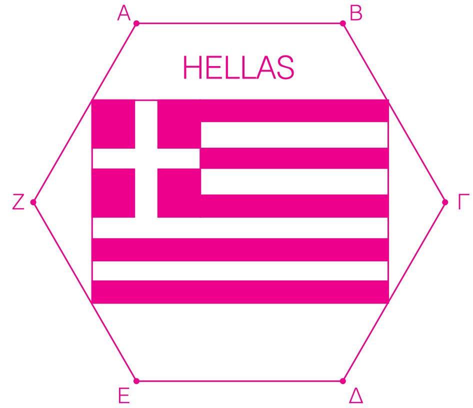
**γ.** Τα ορθογώνια τρίγωνα ΖΔΓ και ΕΔΓ έχουν:
- ΓΔ κοινή
- $Z\hat{\Gamma}\Delta = \Delta\hat{\Gamma}E$

Οπότε είναι ίσα, άρα το $\overset{\Delta}{\Delta Z E}$ είναι ισοσκελές.

**δ.** Το ΚΖΓΗ είναι ορθογώνιο, αφού έχει $\hat{K} = \hat{H} = \hat{Z} = 90^o$ , οπότε $H\Gamma = KZ$ .

Είναι $\Delta K - \Delta E = \Delta K - \Delta Z = KZ = H\Gamma$ .

## 197 Θέμα 4 - 13523




**Ο χαρταετός του σχήματος είναι ένα εξάγωνο με ίσες πλευρές και ίσες γωνίες.**

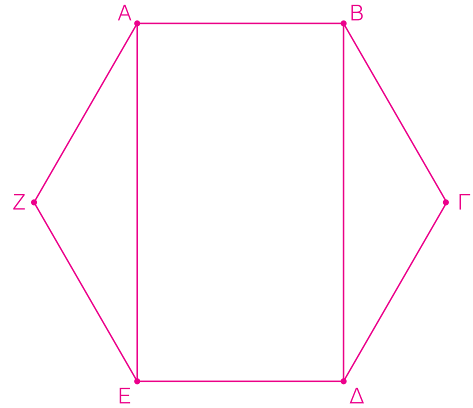
**α. Να αποδείξετε ότι $ΑΕ = ΒΔ$.**

**β. Να αποδείξετε ότι $ΑΕ \perp ΕΔ$.**

**γ. i. Αν οι ΑΔ και ΒΕ τέμνονται στο Ο, τότε να αποδείξετε ότι $2ΒΟ = ΑΔ$.**

**ii. Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι υπάρχει κύκλος με διάμετρο την ΑΔ που διέρχεται από το Β. Συμφωνείτε με τον ισχυρισμό του; Δικαιολογήστε την απάντηση σας.**

### Λύση

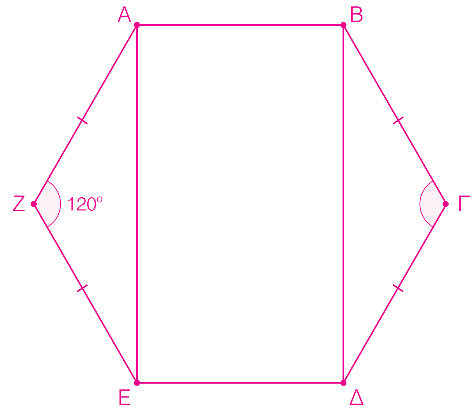



**α.** Στο εξάγωνο $ΑΒΓΔΕΖ$ οι πλευρές και οι γωνίες του είναι ίσες. Έστω λ το μήκος της πλευράς του εξαγώνου και φ η γωνία του.

Τα τρίγωνα $ΑΖΕ$ και $ΒΓΔ$ έχουν:

- $ΑΖ = ΒΓ = λ$
- $ΖΕ = ΓΔ = λ$
- $Α\hat{Ζ}Ε = Β\hat{Γ}Δ = φ$

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ), οπότε $ΑΕ = ΒΔ$.




**β.** Το άθροισμα των γωνιών του εξάγωνου είναι $(2ν-4)$ ορθές, δηλαδή $(2\cdot 6-4)\cdot 90^o = 720^o$.

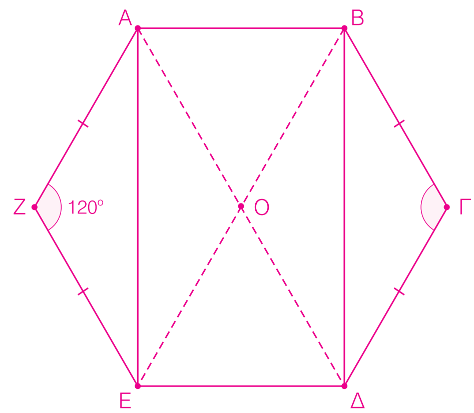
Επειδή όλες οι γωνίες ίσες, η κάθε μία θα είναι $720^o : 6 = 120^o$.

Στο ισοσκελές τρίγωνο $ΑΖΕ$ $(ΑΖ = ΖΕ)$ οι γωνίες της βάσης $Ζ\hat{Α}Ε$ και $Ζ\hat{Ε}Α$ θα είναι ίσες και ισχύει:

$$\hat{Ζ} + Ζ\hat{Α}Ε + Ζ\hat{Ε}Α = 180^o \Leftrightarrow Ζ\hat{Α}Ε + Ζ\hat{Ε}Α = 180^o - \hat{Ζ} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2Ζ\hat{Ε}Α = 180^o - 120^o \Leftrightarrow 2Ζ\hat{Ε}Α = 60^o \Leftrightarrow Ζ\hat{Ε}Α = 30^o$$

Άρα $Α\hat{Ε}Δ = Ζ\hat{Ε}Δ - Ζ\hat{Ε}Α = 120^o - 30^o = 90^o$, οπότε $ΑΕ \perp ΕΔ$.




**γ. i.** Επειδή: • $ΑΒ = ΕΔ$ και $ΑΕ = ΒΔ$, το ΑΕΔΒ είναι παραλληλόγραμμο, γιατί έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες.

- $ΑΕ \perp ΕΔ$ το ΑΕΔΒ έχει μία γωνία ορθή, άρα είναι ορθογώνιο.

Οι διαγώνιες του ΑΔ και ΒΕ είναι ίσες και διχοτομούνται, επομένως $ΒΟ = \frac{ΒΕ}{2} = \frac{ΑΔ}{2}$.

Άρα $2ΒΟ = ΑΔ$.

**ii.** Από το i. έχουμε $ΒΟ = ΑΟ = ΟΔ$, επομένως, τα $Α$, $Β$, $Δ$ ισαπέχουν από το Ο.

Άρα, βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο το Ο και ακτίνα ΟΒ.

Επομένως, ο ισχυρισμός του μαθητή είναι σωστός.

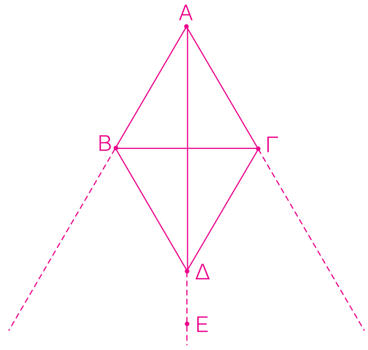
## 19. Ρόμβος

### 198 Θέμα 2 - 1681

**Δίνεται ρόμβος ΑΒΔΓ. Στην προέκταση της διαγωνίου ΑΔ (προς το Δ) παίρνουμε τυχαίο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:**

**α. Το σημείο Ε ισαπέχει από τις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ και ΑΓ (προς το μέρος των Β και Γ αντίστοιχα).**

**β. Το σημείο Ε ισαπέχει από τα σημεία Β και Γ.**




**Λύση**

α. Οι διαγώνιοι του ρόμβου διχοτομούν τις γωνίες του, οπότε η ΕΑ είναι η διχοτόμος της $\hat{A}$, επομένως το Ε ισαπέχει από τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ της $\hat{A}$.

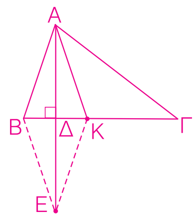
β. Οι διαγώνιοι του ρόμβου διχοτομούνται κάθετα, άρα ΕΑ είναι η μεσοκάθετος του ΒΓ, οπότε το Ε ισαπέχει από τα Β και Γ.

### 199 Θέμα 2 - 1570

**Θεωρούμε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < A\Gamma$ και το ύψος του ΑΔ. Προεκτείνουμε το ΑΔ (προς το Δ) κατά τμήμα $\Delta E = A\Delta$. Έστω Κ το συμμετρικό του Β ως προς το Δ. Να αποδείξετε ότι:**

**α. Το τρίγωνο ΑΒΚ είναι ισοσκελές.**

**β. Το τετράπλευρο ΑΒΕΚ είναι ρόμβος.**




**Λύση**

α. Στο τρίγωνο ΑΒΚ το ΑΔ είναι ύψος και διάμεσος, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

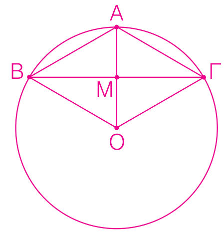
β. Είναι $\Delta A = \Delta E$ και $\Delta B = \Delta K$, οπότε το ΑΚΕΒ είναι παραλληλόγραμμο και αφού έχει $AB = AK$ είναι ρόμβος.

### 200 Θέμα 2 - 1679

**Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Θεωρούμε την ακτίνα ΟΑ και τη χορδή ΒΓ κάθετη στην ΟΑ στο μέσο της Μ.**

**α. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΓΟΒ είναι ρόμβος.**

**β. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου ΑΓΟΒ.**




**Λύση**

α. Το ΟΜ είναι απόστημα της χορδής ΒΓ, οπότε το Μ είναι μέσο της ΒΓ.

Στο τετράπλευρο ΑΓΟΒ οι διαγώνιοί του διχοτομούνται και τέμνονται κάθετα.

Άρα το ΑΓΟΒ είναι ρόμβος.

β. Είναι $OA = OB = O\Gamma = \rho$, $O\Gamma = A\Gamma$ και $OB = AB$.

Οπότε τα τρίγωνα ΟΑΓ και ΟΑΒ είναι ισόπλευρα.

Άρα στο ΑΓΟΒ είναι $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 60^\circ$ και $\hat{O} = \hat{A} = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$.

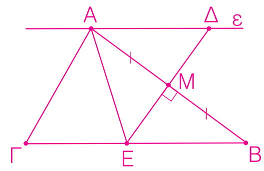
### 201 Θέμα 1630

**Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΓΒ. Φέρουμε από τη κορυφή Α ευθεία ε παράλληλη στη ΒΓ. Η μεσοκάθετος της πλευράς ΑΒ τέμνει την ε στο Δ και την ΒΓ στο Ε.**

**α. Να αποδείξετε ότι $\Delta A = \Delta B$ και $EA = EB$.**

**β. Αν Μ το μέσο του ΑΒ, να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΜΔ και ΕΜΒ.**

**γ. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΔΒΕ είναι ρόμβος.**




**Λύση**

**α.** Επειδή η $ΔΕ$ είναι η μεσοκάθετος του $ΑΒ$ έχουμε $ΔΑ = ΔΒ$ και $ΕΑ = ΕΒ$ .

**β.** Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΑΜΔ$ και $ΕΜΒ$ έχουν:

- $ΜΑ = ΜΒ$
- $Δ\hat{Α}Μ = Μ\hat{Β}Ε$ ως εντός εναλλάξ

Οπότε είναι ίσα.

**γ.** Από το **β.** ερώτημα προκύπτει $ΑΔ = ΕΒ$ , οπότε το $ΑΔΒΕ$ έχει όλες τις πλευρές του ίσες, άρα είναι ρόμβος.

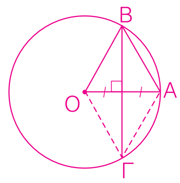
## 202 Θέμα 2 - 1584

**Σε κύκλο κέντρου $Ο$ , έστω $ΟΑ$ μία ακτίνα του. Φέρουμε τη μεσοκάθετη της $ΟΑ$ που τέμνει τον κύκλο στα σημεία $Β$ και $Γ$ . Να αποδείξετε ότι:**

**α. Το τρίγωνο $ΟΒΑ$ είναι ισόπλευρο.**

**β. Το τετράπλευρο $ΟΒΑΓ$ είναι ρόμβος.**

**Λύση**




**α.** Είναι:
- $ΟΑ = ΟΒ = ρ$
- $ΒΟ = ΒΑ$ , αφού η ΒΓ είναι μεσοκάθετος της ΟΑ

Άρα $ΟΑ = ΟΒ = ΒΑ$ , οπότε το τρίγωνο $ΟΑΒ$ είναι ισόπλευρο.

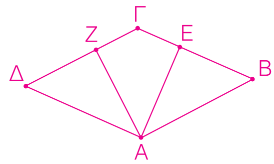
**β.** Το Γ ανήκει στη μεσοκάθετο του ΟΑ , οπότε $ΓΑ = ΓΟ = ρ$

Επομένως $ΟΒ = ΒΑ = ΑΓ = ΓΟ = ρ$ .

Άρα το $ΟΒΑΓ$ είναι ρόμβος.

## 203 Θέμα 2 - 1575

**Το τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ του σχήματος είναι παραλληλόγραμμο. Έστω ότι $ΑΕ \perp ΒΓ$ και $ΑΖ \perp ΔΓ$ . Να αποδείξετε ότι:**




**α. Αν το παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ είναι ρόμβος, τότε $ΑΖ = ΑΕ$ .**

**β. Αν για το παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ ισχύει $ΑΖ = ΑΕ$ , τότε αυτό είναι ρόμβος.**

**Λύση**

**α.** Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΑΖΔ$ και $ΑΕΒ$ έχουν:

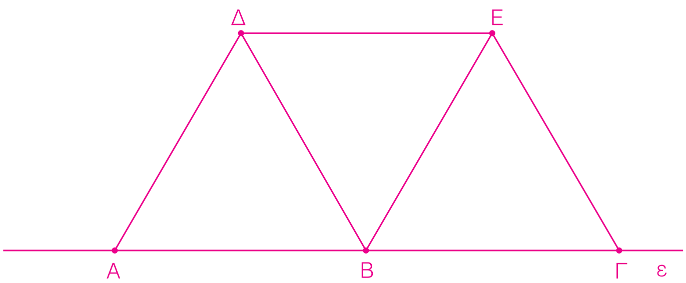
- $ΑΔ = ΑΒ$
- $\hat{Δ} = \hat{Β}$ , αφού το $ΑΒΓΔ$ είναι ρόμβος. Άρα είναι ίσα, οπότε $ΑΖ = ΑΕ$ .

**β.** Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΑΖΔ$ και $ΑΕΒ$ έχουν:

- $ΑΖ = ΑΕ$
- $\hat{Δ} = \hat{Β}$ , αφού το $ΑΒΓΔ$ είναι παραλληλόγραμμο. Οπότε είναι ίσα, άρα $ΑΔ = ΑΒ$ . Επομένως το παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες, άρα είναι ρόμβος.

## 204 Θέμα 2 - 13767

**Σε ευθεία ε θεωρούμε τα διαδοχικά σημεία Α, Β και Γ έτσι ώστε $ΑΒ = ΒΓ$ . Στη συνέχεια, σχεδιάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΕ προς το ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ε όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.**

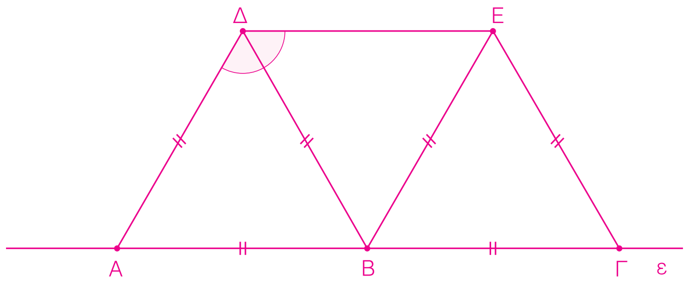



**α. Να υπολογίσετε τη γωνία $Δ\hat{Β}Ε$ .**

**β. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισόπλευρο.**

**γ. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΔΕΒ είναι ρόμβος.**

**Λύση**




**α.** Οι γωνίες των ισόπλευρων τριγώνων ΑΒΔ και ΒΓΕ είναι $60^o$ καθεμιά.

Είναι

$$\hat{ΑΒΔ}+\hat{ΔΒΕ}+\hat{ΕΒΓ}=180^o \Leftrightarrow 60^o+\hat{ΔΒΕ}+60^o=180^o$$

$$\Leftrightarrow \hat{ΔΒΕ}=60^o$$

**β.** Έχουμε

$ΑΒ=ΑΔ=ΒΔ$ , $ΒΓ=ΒΕ=ΓΕ$ και $ΑΒ=ΒΓ$

Οπότε $ΒΔ=ΒΕ$ , άρα το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές με βάση ΔΕ , οπότε $\hat{ΒΔΕ}=\hat{ΒΕΔ}$.

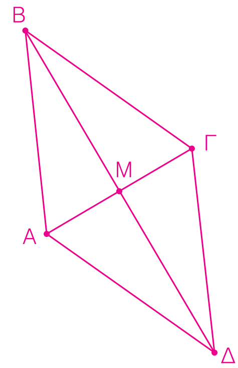
Στο τρίγωνο ΒΔΕ ισχύει:

$$\hat{ΒΔΕ}+\hat{ΒΕΔ}+\hat{ΔΒΕ}=180^o \Leftrightarrow \hat{ΒΔΕ}+\hat{ΒΔΕ}+60^o=180^o \Leftrightarrow 2\hat{ΒΔΕ}=120^o \Leftrightarrow \hat{ΒΔΕ}=60^o \text{ άρα και } \hat{ΒΕΔ}=60^o$$

Αφού οι γωνίες του τριγώνου ΒΔΕ είναι ίσες με $60^o$ το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισόπλευρο.

**γ.** Είναι $ΔΕ=ΒΕ=ΒΔ$ , οπότε το τετράπλευρο ΑΔΕΒ έχει όλες τις πλευρές του ίσες, αφού $ΑΔ=ΑΒ=ΔΕ$ άρα είναι ρόμβος.

## 205 Θέμα 2 - 1332




**Στο σχήμα το Μ είναι μέσο των τμημάτων ΑΓ και ΒΔ. Επίσης $\hat{ΑΜΒ}=\hat{ΓΜΒ}$.**

**α. Να αποδείξετε ότι:**

**i. Οι ΑΓ και ΒΔ είναι κάθετες.**

**ii. Το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος.**

**β. Το ΑΒΓΔ είναι η κάτοψη ενός κήπου. Για να περιφράξουμε τον κήπο χρειαζόμαστε 30 μέτρα φράχτη. Αν αφήσουμε την πλευρά ΑΒ του κήπου χωρίς φράχτη πόσα μέτρα φράχτη θα χρειαστούμε για τις υπόλοιπες πλευρές;**

**Λύση**

**α. i.** Είναι: • $\widehat{ΑΜΒ}=\widehat{ΓΜΒ}$

• $\widehat{ΑΜΒ}+\widehat{ΓΜΒ}=180^o \Leftrightarrow 2\widehat{ΑΜΒ}=180^o \Leftrightarrow \widehat{ΑΜΒ}=90^o$. Άρα $\widehat{ΑΜΒ}=\widehat{ΓΜΒ}=90^o$. Επομένως οι ΒΔ και ΑΓ είναι κάθετες.

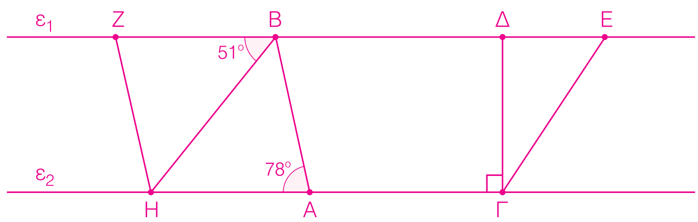
**ii.** Το Μ είναι μέσο των διαγωνίων του ΑΒΓΔ, άρα οι διαγώνιές του διχοτομούνται.

Επομένως το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

Επομένως το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος, γιατί είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιες του ΑΓ και ΒΔ είναι κάθετες.

**β.** Το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος, επομένως κάθε πλευρά έχει μήκος 30 : 4 = 7,5 μέτρα. Επομένως, αν αφήσουμε την πλευρά ΑΒ χωρίς φράχτη, θα χρειαστούμε 30 – 7,5 = 22,5 μέτρα φράχτη.

## 206 Θέμα 2 - 13842




**Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΖΗ είναι ρόμβος. Επίσης δίνονται οι γωνίες $\hat{ΒΑΗ}=78^o$ , $\hat{ΖΒΗ}=51^o$ και η $\hat{ΑΓΔ}$ είναι ορθή.**

**α. Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{ΑΒΗ}$.**

**β. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ είναι παράλληλες.**

**γ. Αν η γωνία $\hat{Ε}$ του τριγώνου ΓΔΕ είναι ίση με $56^o$, να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{Γ}$ του τριγώνου ΓΔΕ.**

**Λύση**

**α.** Το ΑΒΖΗ είναι ρόμβος, οπότε η διαγώνιος του ΒΗ διχοτομεί τη γωνία του $A\hat{B}Z$, άρα $A\hat{B}H = Z\hat{B}H = 51^o$.

**β.** Είναι $A\hat{B}Z = A\hat{B}H + Z\hat{B}H = 102^o$. Άρα οι εντός και επί τα αυτά γωνίες $A\hat{B}Z = 102^o$ και $B\hat{A}H = 78^o$, των $\varepsilon_1$ και $\varepsilon_2$ με τέμνουσα την ΑΒ είναι παραπληρωματικές. Επομένως οι ευθείες $\varepsilon_1$ και $\varepsilon_2$ είναι παράλληλες.

**γ.** Η ΓΔ τέμνει κάθετα την $\varepsilon_2$, άρα τέμνει κάθετα και την $\varepsilon_1$ που είναι παράλληλη της $\varepsilon_2$.

Επομένως το τρίγωνο ΓΔΕ είναι ορθογώνιο, άρα $\hat{\Gamma} = 90^o - \hat{E} = 90^o - 56^o = 34^o$.

## 207 Θέμα 4 - 1840

**Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και σημεία Κ, Λ της διαγωνίου του ΒΔ, τέτοια ώστε να ισχύει $B K = K\Lambda = \Lambda\Delta$.**

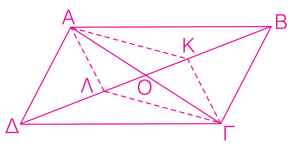
**α. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΚΓΛ είναι παραλληλόγραμμο.**

**β. Να αποδείξετε ότι, αν το αρχικό παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι ρόμβος, τότε και το ΑΚΓΛ είναι ρόμβος.**

**γ. Ποια πρέπει να είναι η σχέση των διαγωνίων του αρχικού παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, ώστε το ΑΚΓΛ να είναι ορθογώνιο.**

**Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.**

**Λύση**




**α.** Φέρουμε τη διαγώνιο ΑΓ του ΑΒΓΔ. Επειδή $OB = O\Delta$ και $BK = \Delta\Lambda$ είναι

$OB - BK = O\Delta - \Delta\Lambda \Leftrightarrow OK = O\Lambda$.

Αφού $OK = O\Lambda$ και $OA = O\Gamma$, το ΑΚΓΛ είναι παραλληλόγραμμο, αφού οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

**β.** Αν το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος, τότε $A\Gamma \perp B\Delta$, οπότε και στο παραλληλόγραμμο ΑΚΓΛ είναι $A\Gamma \perp K\Lambda$. Άρα το ΑΚΓΛ είναι ρόμβος.

**γ.** Το παραλληλόγραμμο ΑΚΓΛ είναι ορθογώνιο, όταν $A\Gamma = K\Lambda \Leftrightarrow A\Gamma = \frac{1}{3}B\Delta \Leftrightarrow B\Delta = 3A\Gamma$.

## 208 Θέμα 4 - 1740

**Δίνονται οι ακόλουθες προτάσεις Π1 και Π2:**

**Π1: Αν ένα παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος, τότε οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών του είναι ίσες.**

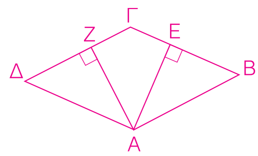
**Π2: Αν οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών ενός παραλληλογράμμου είναι ίσες, τότε το παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος.**

**α. Να εξετάσετε αν ισχύουν οι προτάσεις Π1 και Π2 αιτιολογώντας πλήρως την απάντησή σας.**

**β. Στην περίπτωση που και οι δύο προτάσεις ισχύουν, να τις διατυπώσετε ως μια ενιαία πρόταση.**

**Λύση**

**α.** Θεωρούμε το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και $AE \perp B\Gamma$, $AZ \perp \Delta\Gamma$




Απόδειξη πρότασης Π1:

- Έστω ότι το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος.

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΖΔ και ΑΕΒ έχουν:
- $A\Delta = AB$
- $\hat{\Delta} = \hat{B}$, αφού το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος

Άρα είναι ίσα, οπότε $AZ = AE$.

Απόδειξη πρότασης Π2:

- Έστω ότι $AE = AZ$.

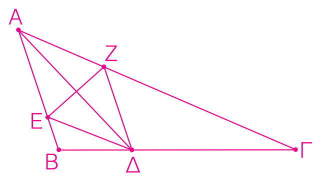
Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΖΔ και ΑΕΒ έχουν:
- $AZ = AE$
- $\hat{\Delta} = \hat{B}$ αφού το ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο.

Οπότε είναι ίσα, άρα $A\Delta = AB$.

Επομένως το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι ρόμβος.

**β.** Ένα παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος, αν και μόνο αν, οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών του είναι ίσες.

## 209 Θέμα 4 - 1844




**Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και $A\Delta$ η διχοτόμος της γωνίας $A$, για την οποία ισχύει $A\Delta = \Delta\Gamma$.**
**Η $\Delta E$ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\Delta B$ και η $\Delta Z$ παράλληλη στην $AB$. Να αποδείξετε ότι:**

α. **Τα τμήματα $E\Delta$ και $A\Gamma$ είναι παράλληλα.**

β. **Το τρίγωνο $EA\Delta$ είναι ισοσκελές.**

γ. **Τα τμήματα $A\Delta$ και $EZ$ διχοτομούνται.**

**Λύση**

α. Είναι:
- $\Delta A = \Delta\Gamma$, οπότε $\Delta \hat{A} \Gamma = \hat{\Gamma} = \hat{\varphi}$
- $A\hat{\Delta}B$ εξωτερική στο $\overset{\triangle}{A\Delta\Gamma}$, οπότε $A\hat{\Delta}B = \Delta\hat{A}\Gamma + \hat{\Gamma} = 2\hat{\varphi}$

Επειδή η $\Delta E$ είναι η διχοτόμος της $A\hat{\Delta}B$, έχουμε $E\hat{\Delta}A = \dfrac{A\hat{\Delta}B}{2} = \dfrac{2\hat{\varphi}}{2} = \hat{\varphi}$.

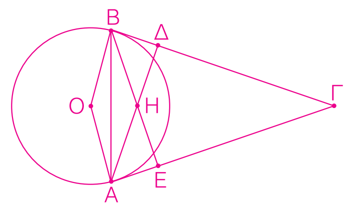
Επομένως $E\hat{\Delta}A = \Delta\hat{A}\Gamma$ οι οποίες είναι εντός εναλλάξ, άρα $E\Delta \parallel A\Gamma$.

β. Είναι $E\hat{A}\Delta = \Delta\hat{A}Z = \varphi$, αφού η $A\Delta$ διχοτόμος της $\hat{A}$.

Οπότε $E\hat{A}\Delta = E\hat{\Delta}A = \varphi$, άρα το τρίγωνο $EA\Delta$ είναι ισοσκελές.

γ. Επειδή $\Delta E \parallel AZ$ και $Z\Delta \parallel AE$, το $AZ\Delta E$ είναι παραλληλόγραμμο οπότε οι διαγώνιοι του $A\Delta$ και $EZ$ διχοτομούνται.

## 210 Θέμα 4 - 1823




**Δίνεται κύκλος κέντρου $O$ και δυο μη αντιδιαμετρικά σημεία του $A$ και $B$. Φέρουμε τις εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία $A$ και $B$ οι οποίες τέμνονται στο σημείο $\Gamma$. Φέρουμε επίσης και τα ύψη $A\Delta$ και $BE$ του τριγώνου $AB\Gamma$ τα οποία τέμνονται στο σημείο $H$. Να αποδείξετε ότι:**

α. **Το τρίγωνο $BHA$ είναι ισοσκελές.**

β. **Το τετράπλευρο $OBHA$ είναι ρόμβος.**

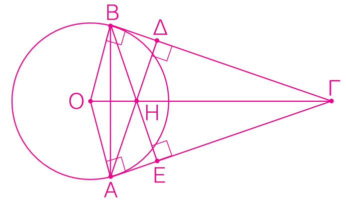
γ. **Τα σημεία $O$, $H$, $\Gamma$ είναι συνευθειακά.**

**Λύση**

α. Είναι $A\Gamma = B\Gamma$ ως εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου που άγονται από το σημείο Γ.
Άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΒ.
Τα ορθογώνια τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΒΔ έχουν:
- ΑΒ κοινή
- $A\hat{B}\Delta = B\hat{A}E$, ως γωνίες προσκείμενες στη βάση ΑΒ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε $A\hat{B}E = B\hat{A}\Delta$.

Επομένως το τρίγωνο ΒΗΑ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΒ.

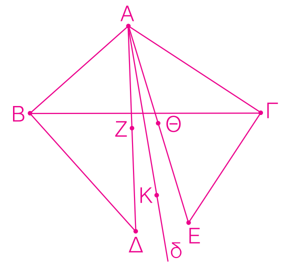



β. Είναι:
- $OA = OB = \rho$
- $OA \perp A\Gamma$ και $BE \perp A\Gamma$, οπότε $OA \parallel BE$
- $OB \perp B\Gamma$ και $A\Delta \perp B\Gamma$, οπότε $OB \parallel A\Delta$

Επειδή $OA \parallel BH$ και $OB \parallel AH$, το $OBHA$ είναι παραλληλόγραμμο και επειδή $OA = OB$ είναι ρόμβος.

γ. Αφού $OA = OB$, $HA = HB$ και $\Gamma A = \Gamma B$, τα O, H και Γ ανήκουν στη μεσοκάθετο του $BA$, οπότε είναι συνευθειακά.

## 211 Θέμα 4 - 1869




**Δίνεται τρίγωνο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ με $AB < A\Gamma$ . Φέρουμε τμήμα $B\Delta$ κάθετο στην $AB$ και με $B\Delta = A\Gamma$ και τμήμα $\Gamma E$ κάθετο στην $A\Gamma$ με $\Gamma E = AB$ .**
**Θεωρούμε τα μέσα $Z$ και $\Theta$ των $A\Delta$ και $AE$ καθώς και τη διχοτόμο $A\delta$ της γωνίας $\Delta\hat{A}E$ .**

**α. Να αποδείξετε ότι $A\Delta = AE$ .**

**β. Αν $K$ τυχαίο σημείο της διχοτόμου $A\delta$ , να αποδείξετε ότι το $K$ ισαπέχει από τα μέσα $Z$ και $\Theta$.**

**γ. Αν το $K$ είναι σημείο της διχοτόμου $A\delta$ τέτοιο ώστε $KZ = AZ$ , να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AZK\Theta$ είναι ρόμβος.**

**Λύση**

**α.** Τα ορθογώνια τρίγωνα $BA\Delta$ $(\hat{B} = 90^o)$ και $\Gamma AE$ $(\hat{\Gamma} = 90^o)$ έχουν:
- $AB = \Gamma E$
- $B\Delta = A\Gamma$

Οπότε είναι ίσα, άρα $A\Delta = AE$ .

**β.** Τα τρίγωνα $AKZ$ και $A\Theta K$ έχουν:
- $AZ = A\Theta$ ως μισά ίσων τμημάτων
- $AK$ κοινή
- $Z\hat{A}K = K\hat{A}\Theta$ , αφού η $A\delta$ διχοτόμος

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ), άρα $KZ = K\Theta$ .

**γ.**
- $K\Theta = KZ$ , από το **β.** ερώτημα
- $KZ = AZ$ , από υπόθεση
- $AZ = A\Theta$ , ως μισά ίσων τμημάτων.

Άρα $K\Theta = KZ = AZ = A\Theta$ , οπότε το $AZK\Theta$ είναι ρόμβος.

## 212 Θέμα 4 - 13745

**Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, το μέσο Μ της βάσης ΒΓ και τυχαίο εσωτερικό σημείο Δ στη βάση του.**

**α. Αν από το μέσο Μ φέρουμε παράλληλες προς τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου, που τις τέμνουν στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα να αποδείξετε ότι:**

**i. $ME = MZ$ .**

**ii. Το ΑΕΜΖ είναι ρόμβος με περίμετρο ίση με 2ΑΒ.**

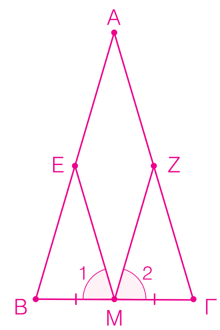
**β. Αν πάρουμε τυχαίο εσωτερικό σημείο Δ στο ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ, διαφορετικό από το μέσο Μ, και φέρουμε τις παράλληλες προς τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου, που τις τέμνουν στα σημεία Κ και Λ αντίστοιχα, τότε:**

**i. Ποιο είναι το είδος του τετράπλευρου ΑΚΔΛ;**

**ii. Να συγκρίνετε την περίμετρο του τετράπλευρου ΑΚΔΛ με την περίμετρο του ρόμβου ΑΕΜΖ του ερωτήματος α. ii. και να διατυπώστε λεκτικά το συμπέρασμα που προκύπτει.**

**Λύση**

**α. i.** Από το μέσο $M$ της $B\Gamma$ φέρουμε:



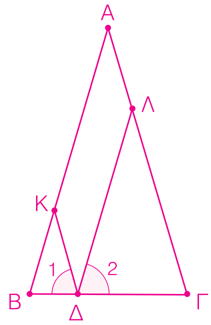

- $ME // A\Gamma$ , οπότε το $E$ θα είναι μέσο της $AB$ και $ME = \frac{A\Gamma}{2}$ (1)
- $MZ // AB$ , θα είναι $Z$ το μέσο της $A\Gamma$ και $MZ = \frac{AB}{2}$ (2)

Είναι $AB = A\Gamma$ , οπότε από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $ME = MZ$ .

**ii.** Είναι $ME//A\Gamma$ ή $ME//AZ$ και $MZ//AB$ ή $MZ//AE$, οπότε το τετράπλευρο $AEMZ$ έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες, άρα είναι παραλληλόγραμμο.

Επιπλέον οι διαδοχικές πλευρές του $ME$ και $MZ$ είναι ίσες, οπότε το $AEMZ$ είναι ρόμβος.

Η περίμετρος του ρόμβου είναι $AE+EM+MZ+AZ=4AE=4\frac{AB}{2}=2AB$.




**β. i.** Οι απέναντι πλευρες του τετράπλευρου $AK\Delta\Lambda$ είναι παράλληλες, άρα το $AK\Delta\Lambda$ είναι παραλληλόγραμμο.

Θα αποδείξουμε ότι το $AK\Delta\Lambda$, όταν το $\Delta$ δεν είναι το μέσο του $B\Gamma$ δε μπορεί να είναι ρόμβος.

- Είναι $\hat{\Gamma}=\hat{\Delta}_1$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά, άρα $\hat{\Delta}_1=\hat{B}$.

Οπότε το $BK\Delta$ είναι ισοσκελές τρίγωνο με $K\Delta=KB$, (1).

- Είναι $\hat{B}=\hat{\Delta}_2$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά, άρα $\hat{\Delta}_2=\hat{\Gamma}$.

Άρα το τρίγωνο $\Delta\Lambda\Gamma$ είναι ισοσκελές με $\Lambda\Delta=\Lambda\Gamma$ (2).

Επειδή $\hat{\Delta}_1=\hat{B}$, $\hat{\Delta}_2=\hat{\Gamma}$ και $\hat{B}=\hat{\Gamma}$, προκύπτει ότι $\hat{\Delta}_1=\hat{\Delta}_2=\hat{B}=\hat{\Gamma}$.

Δηλαδή τα ισοσκελή τρίγωνα $BK\Delta$ και $\Gamma\Lambda\Delta$ έχουν τις γωνίες της βάσης τους ίσες μία προς μία, οπότε και οι τρίτες γωνίες τους, $B\hat{K}\Delta$ και $\Gamma\hat{\Lambda}\Delta$, θα είναι μεταξύ τους ίσες.

Αν το Δ δεν ταυτίζεται με το μέσο $M$ της $B\Gamma$ τα τμήματα $B\Delta$ και $\Delta\Gamma$ δεν είναι ίσα, οπότε και τα τρίγωνα $BK\Delta$ και $\Gamma\Lambda\Delta$ δεν είναι ίσα. (Αν ήταν ίσα θα έπρεπε και οι πλευρές ΒΔ και ΔΓ που είναι απέναντι από τις ίσες γωνίες $B\hat{K}\Delta$ και $\Gamma\hat{\Lambda}\Delta$ αντίστοιχα, να είναι ίσες).

Οι πλευρές $\Delta K$ και $\Delta\Lambda$ δεν είναι ίσες, γιατί αν ήταν ίσες, τα τρίγωνα $BK\Delta$ και $\Gamma\Lambda\Delta$ θα ήταν ίσα από το κριτήριο ΓΠΓ. Άτοπο, αφού αποδείξαμε ότι τα τρίγωνα $BK\Delta$ και $\Gamma\Lambda\Delta$ δεν είναι ίσα.

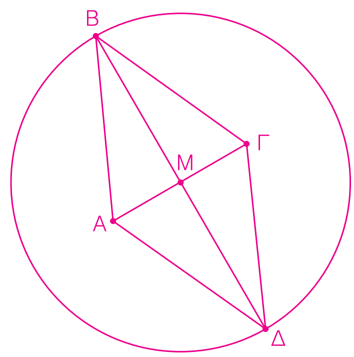
Οπότε οι διαδοχικές πλευρές του παραλληλογράμμου $AK\Delta\Lambda$ δεν είναι ίσες , επομένως αυτό δεν είναι πια ρόμβος.

**ii.** Η περίμετρος του παραλληλογράμμου $AK\Delta\Lambda$ είναι

$AK+K\Delta+\Delta\Lambda+\Lambda A=AK+KB+\Gamma\Lambda+\Lambda A=AB+A\Gamma=AB+AB=2AB$

Παρατηρούμε ότι η περίμετρος του παραλληλογράμμου που σχηματίζεται όταν το $\Delta$ είναι οποιοδήποτε εσωτερικό σημείο στη βάση $B\Gamma$ του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$ είναι σταθερή και ίση με $2AB$.

## 213 Θέμα 4 - 13857



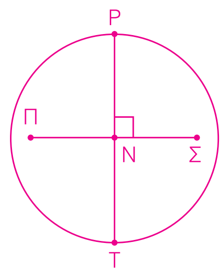

**α. Στο σχήμα η ΒΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΑΓ και διάμετρος του κύκλου με κέντρο Μ. Να αποδείξετε ότι το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος.**

**β. Χαρακτηρίστε κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις ως αληθή ή ψευδή.**

**Πρόταση 1: «Αν η διαγώνιος ενός τυχαίου τετραπλεύρου είναι μεσοκάθετος της άλλης διαγωνίου και διάμετρος κύκλου με κέντρο το σημείο τομής των διαγωνίων, τότε το τετράπλευρο είναι ρόμβος».**

**Πρόταση 2: «Αν η διαγώνιος ενός τυχαίου τετραπλεύρου είναι κάθετη στην άλλη διαγώνιο και διάμετρος κύκλου με κέντρο το σημείο τομής των διαγωνίων, τότε το τετράπλευρο είναι ρόμβος».**

**Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας σε κάθε περίπτωση.**




**γ. Στο διπλανό σχήμα τα ευθύγραμμα τμήματα ΡΤ και ΠΣ τέμνονται κάθετα στο Ν και $\Pi N=N\Sigma$. Επίσης η ΡΤ είναι διάμετρος του κύκλου με κέντρο το Ν.**

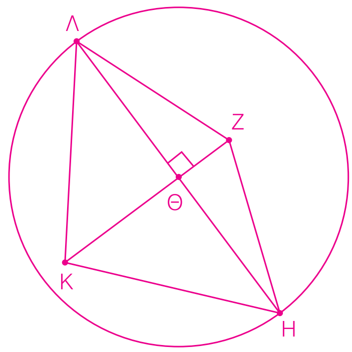
**Να αποδείξετε ότι $\Pi P=P\Sigma=\Sigma T=T\Pi$.**

**Λύση**

**α.** Η ΒΔ είναι μεσοκάθετος της ΑΓ, άρα ΑΜ = ΜΓ.

Επιπλέον ΒΜ = ΜΔ, οπότε οι διαγώνιοι του ΑΒΓΔ διχοτομούνται. Άρα το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

Είναι οι $B\Delta \perp A\Gamma$, οπότε οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ είναι κάθετες, άρα το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος.

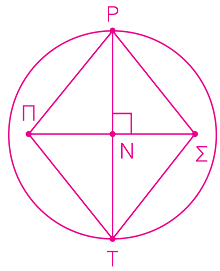



**β.** Η Πρόταση 1 έχει αποδειχθεί στο ερώτημα α., άρα είναι αληθής.

Η Πρόταση 2 είναι ψευδής.

Στο παρακάτω σχήμα η διαγώνιος ΛΗ του τετραπλεύρου ΚΛΖΗ είναι κάθετη στη διαγώνιό του ΖΚ και διάμετρος του κύκλου με κέντρο το Θ, σημείο τομής των διαγωνίων. Δηλαδή το ΚΛΖΗ πληροί την υπόθεση της Πρότασης 2.

Ωστόσο το τετράπλευρο ΚΛΖΗ δεν είναι ρόμβος. Πράγματι ισχύει ΚΘ > ΘΖ, άρα οι διαγώνιοι του ΚΛΖΗ δεν έχουν κοινό μέσο (το Θ είναι μέσο της ΛΗ, αλλά όχι της ΖΚ). Άρα το ΚΛΖΗ δεν είναι παραλληλόγραμμο, επομένως δεν είναι και ρόμβος.




**γ.** Σχεδιάζουμε το τετράπλευρο ΠΡΣΤ.

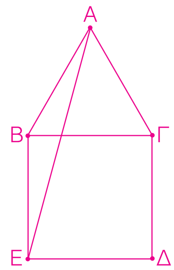
Η διαγώνιος του ΡΤ είναι μεσοκάθετος της ΠΣ, εφόσον είναι κάθετες και ΠΝ = ΝΣ, από την υπόθεση.

Επίσης η ΡΤ είναι διάμετρος του κύκλου που έχει ως κέντρο το Ν, σημείο τομής των διαγωνίων του τετραπλεύρου.

Άρα από την Πρόταση 1 (του ερωτήματος β.) που αποδείχθηκε στο α. το ΠΡΣΤ είναι ρόμβος. Συνεπώς έχει όλες τις πλευρές του ίσες. Δηλαδή ΠΡ = ΡΣ = ΣΤ = ΤΠ.

## 20. Τετράγωνο

### 214 Θέμα 2 - 1651




**Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και εκτός αυτού κατασκευάζουμε τετράγωνο ΒΓΔΕ .**

**α. Να υπολογίσετε τις γωνίες:**

**i.** $\mathbf{A\hat{B}E}$

**ii.** $\mathbf{B\hat{E}A}$

**β. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ισοσκελές.**

**Λύση**

**α. i.** Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο είναι $A\hat{B}\Gamma = 60^o$ .

Οπότε $A\hat{B}E = A\hat{B}\Gamma + E\hat{B}\Gamma = 60^o + 90^o = 150^o$

**ii.** Επειδή $AB = B\Gamma = BE$ , το τρίγωνο ΒΕΑ είναι ισοσκελές οπότε $B\hat{E}A = B\hat{A}E$

Στο τρίγωνο ΒΕΑ έχουμε $B\hat{E}A + B\hat{A}E + A\hat{B}E = 180^o \Leftrightarrow 2B\hat{E}A + 150^o = 180^o \Leftrightarrow 2B\hat{E}A = 30^o \Leftrightarrow B\hat{E}A = 15^o$ .

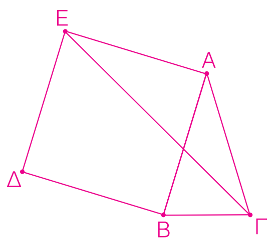
**β.** Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΓΔ έχουν:

- $AB = A\Gamma$ , ως πλευρές του ισόπλευρου τριγώνου ΑΒΓ
- $BE = \Gamma\Delta$ , ως πλευρές του τετραγώνου ΒΓΔΕ
- $A\hat{\Gamma}\Delta = A\hat{\Gamma}B + B\hat{\Gamma}\Delta = 60^o + 90^o = 150^o = A\hat{B}E$

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ) οπότε $AE = A\Delta$ .

Επομένως το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ισοσκελές.

### 215 Θέμα 2 - 1652




**Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathbf{AB = A\Gamma}$ .**

**Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου το τετράγωνο ΑΒΔΕ . Να αποδείξετε ότι:**

**α. Το τρίγωνο ΑΓΕ είναι ισοσκελές.**

**β.** $\mathbf{2 \cdot E\hat{\Gamma}A = 90^o - B\hat{A}\Gamma}$

**Λύση**

**α.** Είναι $AB = AE$ ως πλευρές τετραγώνου και $AB = A\Gamma$ από υπόθεση. Άρα $AE = A\Gamma$, οπότε το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ισοσκελές.

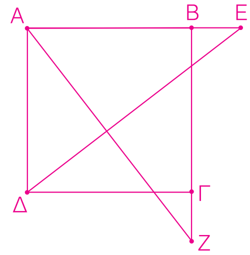
**β.** Επειδή το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ισοσκελές έχουμε $A\hat{E}\Gamma = E\hat{\Gamma}A$.

Στο τρίγωνο ΑΕΓ είναι $E\hat{A}\Gamma + A\hat{E}\Gamma + E\hat{\Gamma}A = 180^\circ \Leftrightarrow 2E\hat{\Gamma}A + E\hat{A}B + B\hat{A}\Gamma = 180^\circ$

$$\Leftrightarrow 2E\hat{\Gamma}A + 90^\circ + B\hat{A}\Gamma = 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow 2E\hat{\Gamma}A = 90^\circ - B\hat{A}\Gamma$$

## 216 Θέμα 2 - 1643




**Θεωρούμε τετράγωνο ΑΒΓΔ και σημεία Ε και Ζ στις προεκτάσεις των ΑΒ (προς το Β) και ΒΓ (προς το Γ) αντίστοιχα, ώστε $BE = \Gamma Z$. Να αποδείξετε ότι:**

**α. Τα τρίγωνα ΑΒΖ και ΑΕΔ είναι ίσα.**

**β. Οι γωνίες $E\hat{\Delta}\Gamma$ και $A\hat{Z}B$ είναι ίσες.**

**Λύση**

**α.** Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΖ και ΑΕΔ έχουν:

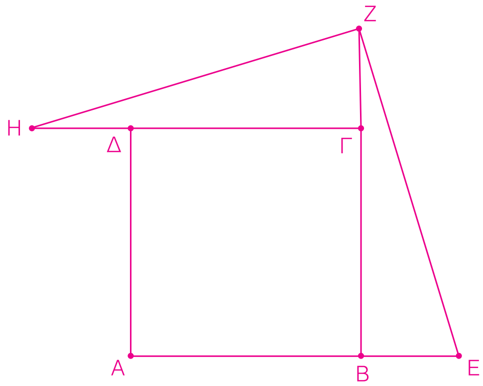
- $AB = A\Delta$
- $BZ = AE$, ως αθροίσματα ίσων τμημάτων.

Οπότε είναι ίσα.

**β.** Επειδή τα τρίγωνα ΑΒΖ και ΑΕΔ, είναι ίσα έχουμε $A\hat{E}\Delta = A\hat{Z}B$.

Είναι $A\hat{E}\Delta = E\hat{\Delta}\Gamma$, ως εντός εναλλάξ, οπότε $E\hat{\Delta}\Gamma = A\hat{Z}B$.

## 217 Θέμα 2 - 13536




**Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ προς το Β, ΒΓ προς το Γ και ΓΔ προς το Δ θεωρούμε σημεία Ε, Ζ και Η αντίστοιχα, ώστε $BE = \Gamma Z = \Delta H$.**

**α. Να αποδείξετε ότι $ZE = ZH$.**

**β. Να αποδείξετε ότι $E\hat{Z}H = 90^\circ$.**

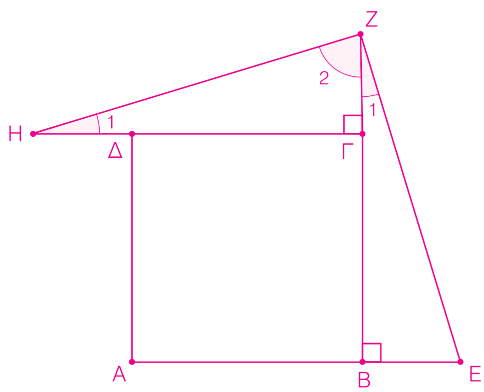
**Λύση**

**α.** Τα τρίγωνα ΒΕΖ και ΓΖΗ έχουν:

- $E\hat{B}Z = Z\hat{\Gamma}H = 90^\circ$
- $BE = \Gamma Z$
- $BE = \Gamma H$ ως άθροισμα των ίσων τμημάτων ΒΓ, ΓΔ και ΒΕ, ΓΖ.

Οπότε είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια και έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες μία προς μία.

Άρα $ZE = ZH$.




**β.** Από την ισότητα των τρίγωνων ΒΕΖ και ΓΖΗ έχουμε ότι $\hat{Z}_1 = \hat{H}_1$ (1),

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΓΖΗ έχουμε $\hat{H}_1 + \hat{Z}_2 = 90^\circ$ (2).

Από τις ισότητες (1) και (2) προκύπτει ότι

$\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2 = 90^\circ \Leftrightarrow E\hat{Z}H = 90^\circ$.

## 218 Θέμα 2 - 1662

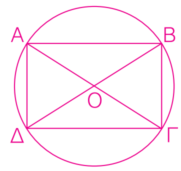
**Σε κύκλο κέντρου Ο φέρουμε τις διαμέτρους του ΑΓ και ΒΔ .**

**α. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο.**

**β. Ποια σχέση πρέπει να έχουν οι διάμετροι ΑΓ και ΒΔ ώστε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ να είναι τετράγωνο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.**

**Λύση**

**α.** Είναι $ΟΑ = ΟΓ = ΟΒ = ΟΓ = ρ$ .




Στο ΑΒΓΔ οι διαγώνιοι διχοτομούνται και είναι ίσες αφού $ΑΓ = ΒΔ = 2ρ$ .

Άρα το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο.

**β.** Για να είναι το ορθογώνιο ΑΒΓΔ τετράγωνο, πρέπει να είναι και ρόμβος , οπότε πρέπει οι διαγώνιοί του ΑΓ και ΒΔ να είναι και κάθετες.

## 219 Θέμα 4 - 13744

**Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ. Στις προεκτάσεις των πλευρών του ΑΒ και ΒΓ προς το Β και προς το Γ αντίστοιχα, παίρνουμε τα σημεία Ε και Ζ τέτοια ώστε $ΒΕ = ΓΖ$ . Αν Ρ είναι το σημείο τομής των ΑΖ και ΔΕ, τότε:**

**α. Να αποδείξετε ότι:**

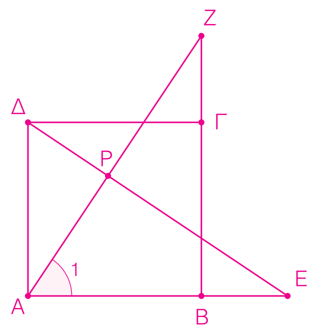
**i. Οι γωνίες $Α\hat{Ε}Δ$ και $Β\hat{Ζ}Α$ είναι ίσες.**

**ii. Τα τμήματα ΑΖ και ΔΕ είναι κάθετα.**

**β. Αν γνωρίζετε ότι το σημείο τομής Ρ των ΑΖ και ΔΕ είναι τέτοιο ώστε $ΡΒ = ΑΒ$ , να προσδιορίσετε τη θέση του σημείου Ε στην προέκταση του τμήματος ΑΒ.**

**Λύση**

**α. i.** Είναι $ΑΒ = ΒΓ$ και $ΒΕ = ΓΖ$ , οπότε $ΑΕ = ΒΖ$ (1) , ως αθροίσματα ίσων τμημάτων.




Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΖ έχουν:

- $Δ\hat{Α}Ε = Α\hat{Β}Ζ = 90^o$ ,
- $ΑΔ = ΑΒ$ ,
- $ΑΕ = ΒΖ$ ,

Άρα είναι ίσα, οπότε $Α\hat{Ε}Δ = Β\hat{Ζ}Α$ .

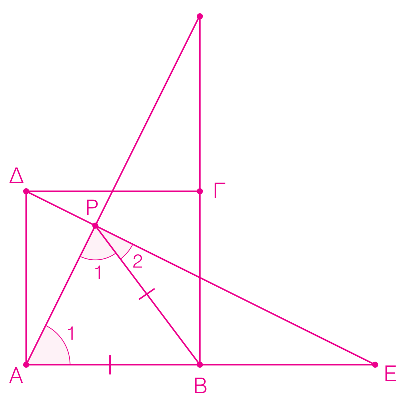
**ii.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΖ είναι $\hat{Α}_1 + Β\hat{Ζ}Α = 90^o$ , αλλά $Β\hat{Ζ}Α = Α\hat{Ε}Δ$ , οπότε

$\hat{Α}_1 + Α\hat{Ε}Δ = 90^o \Leftrightarrow \hat{Α}_1 + Α\hat{Ε}Ρ = 90^o$

Στο τρίγωνο ΑΕΡ το άθροισμα δύο γωνιών του είναι $90^o$ , οπότε η τρίτη γωνία του θα είναι $90^o$ .

Δηλαδή $Α\hat{Ρ}Ε = 90^o$ , άρα τα τμήματα ΑΖ και ΔΕ είναι κάθετα.

**β.** Είναι: • $ΡΒ = ΑΒ$ , άρα το τρίγωνο ΒΑΡ είναι ισοσκελές, οπότε $\hat{Α}_1 = \hat{Ρ}_1$ .




- $\hat{Α}_1 + Α\hat{Ε}Ρ = 90^o \Leftrightarrow \hat{Ρ}_1 + Α\hat{Ε}Ρ = 90^o$ (1)
- $\hat{Ρ}_1 + \hat{Ρ}_2 = 90^o$ (2)

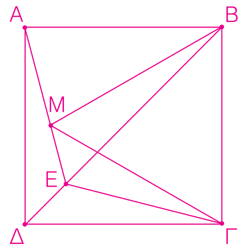
Από τις (1) και (2) έχουμε $Α\hat{Ε}Ρ = \hat{Ρ}_2 \Leftrightarrow Β\hat{Ε}Ρ = \hat{Ρ}_2$ , άρα το τρίγωνο ΒΕΡ είναι ισοσκελές με

$ΕΒ = ΡΒ \Leftrightarrow ΒΕ = ΑΒ$ .

Άρα η θέση του σημείου Ε προσδιορίζεται στην προέκταση του ΑΒ ώστε $ΒΕ = ΑΒ$ .

## 220 Θέμα 4 - 1814

**Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ και εντός αυτού ισόπλευρο τρίγωνο ΜΒΓ. Αν η προέκταση της ΑΜ τέμνει την ΒΔ στο σημείο Ε, να αποδείξετε ότι:**

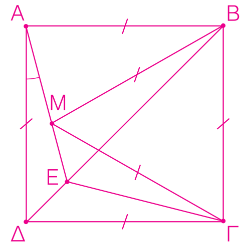



**α.** $\Delta\hat{A}E = 15^\circ$

**β. Τα τρίγωνα ΔΑΕ και ΔΕΓ είναι ίσα.**

**γ. Η ΓΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\Delta\hat{\Gamma}M$.**

**Λύση**




**α.** Το τρίγωνο ΒΜΓ είναι ισόπλευρο, οπότε $M\hat{B}\Gamma = 60^\circ$

Έχουμε $A\hat{B}M + M\hat{B}\Gamma = 90^\circ \Leftrightarrow A\hat{B}M + 60^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow A\hat{B}M = 30^\circ$.

Είναι:
- $BM = B\Gamma$, ως πλευρές του ισόπλευρου τριγώνου ΜΒΓ
- $BA = B\Gamma$, ως πλευρές του τετραγώνου ΑΒΓΔ.

Επομένως $BA = BM$, οπότε το τρίγωνο ΒΑΜ είναι ισοσκελές, άρα $B\hat{A}M = B\widehat{M}A$.

Στο τρίγωνο ΑΒΜ έχουμε $A\hat{B}M + B\hat{A}M + B\widehat{M}A = 180^\circ \Leftrightarrow 30^\circ + 2B\hat{A}M = 180^\circ \Leftrightarrow B\hat{A}M = 75^\circ$.

Οπότε $\Delta\hat{A}E = 90^\circ - B\hat{A}M = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ$.

**β.** Τα τρίγωνα ΔΑΕ και ΔΕΓ έχουν:
- ΔΕ κοινή
- $\Delta A = \Delta\Gamma$, ως πλευρές του τετραγώνου ΑΒΓΔ
- $A\hat{\Delta}E = E\hat{\Delta}\Gamma$ αφού η διαγώνιος του τετραγώνου διχοτομεί τις γωνίες του.

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ).

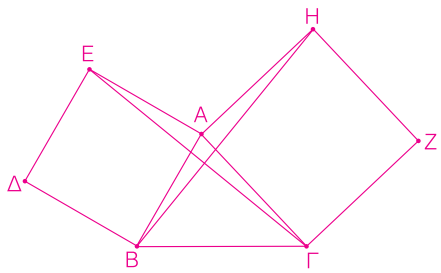
**γ.** Από την προηγούμενη ισότητα τριγώνων έχουμε $\Delta\hat{A}E = \Delta\hat{\Gamma}E \Leftrightarrow \Delta\hat{\Gamma}E = 15^\circ$ (1).

Επειδή το ΒΓΜ είναι ισόπλευρο είναι $B\hat{\Gamma}M = 60^\circ$.

Έχουμε $\Delta\hat{\Gamma}B = 90^\circ \Leftrightarrow \Delta\hat{\Gamma}E + E\hat{\Gamma}M + B\hat{\Gamma}M = 90^\circ \Leftrightarrow 15^\circ + E\hat{\Gamma}M + 60^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow E\hat{\Gamma}M = 15^\circ$, (2).

Από (1) και 2) έχουμε $\Delta\hat{\Gamma}E = E\hat{\Gamma}M$, άρα η ΓΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\Delta\hat{\Gamma}M$.

## 221 Θέμα 4 - 1788




**Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και στο εξωτερικό του σχηματίζονται τα τετράγωνα ΑΒΔΕ και ΑΓΖΗ. Να αποδείξετε ότι:**

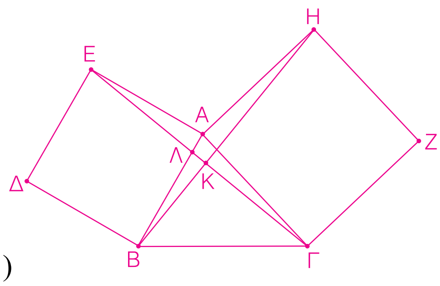
**α.** $E\hat{A}H = A\hat{B}\Gamma + A\hat{\Gamma}B$

**β.** $E\Gamma = BH$

**γ. Η ΕΓ είναι κάθετη στη ΒΗ.**

**Λύση**

**α.** Είναι $E\hat{A}H = 360^\circ - E\hat{A}B - H\hat{A}\Gamma - B\hat{A}\Gamma = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - (180^\circ - A\hat{B}\Gamma - A\hat{\Gamma}B) = A\hat{B}\Gamma + A\hat{\Gamma}B$




**β.** Τα τρίγωνα ΕΑΓ και ΒΑΗ έχουν:
- $EA = AB$
- $A\Gamma = AH$
- $E\hat{A}\Gamma = B\hat{A}H = 90^\circ + B\hat{A}\Gamma$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ), άρα $E\Gamma = BH$

**γ.** Έστω Κ το σημείο τομής των ΕΓ, ΒΗ και Λ το σημείο τομής των ΑΒ, ΕΓ αρκεί να δείξουμε ότι $B\hat{K}\Lambda = 90^\circ \Leftrightarrow A\hat{B}K + B\hat{\Lambda}K = 90^\circ$, (1)

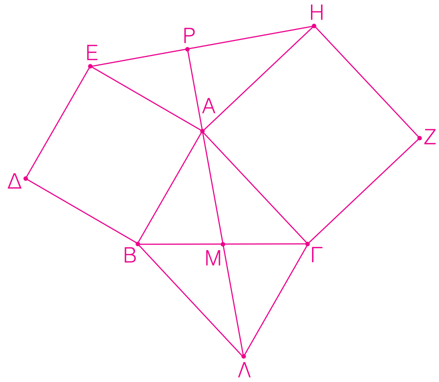
Επειδή τα τρίγωνα ΕΑΓ και ΒΑΗ είναι ίσα έχουμε $A\hat{B}K = A\hat{E}\Gamma$.

Είναι $B\hat{\Lambda}K = A\hat{\Lambda}E$, ως κατακορυφήν.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΕΛ είναι $A\hat{E}\Lambda + A\hat{\Lambda}E = 90^\circ \Leftrightarrow A\hat{B}K + B\hat{\Lambda}K = 90^\circ$.

Οπότε η (1) ισχύει.

## 222 Θέμα 4 - 1795




**Εκτός τριγώνου $ΑΒΓ$ κατασκευάζουμε τετράγωνα $ΑΒΔΕ$ και $ΑΓΖΗ$. Αν $Μ$ το μέσο του $ΒΓ$ και $Λ$ σημείο στην προέκταση του $ΑΜ$ τέτοιο ώστε $ΑΜ = ΜΛ$, να αποδείξετε ότι:**

**α. $ΓΛ = ΑΕ$**

**β. Οι γωνίες $ΑΓΛ$ και $ΕΑΗ$ είναι ίσες.**

**γ. Η προέκταση του $ΜΑ$ (προς το $Α$) τέμνει κάθετα την $ΕΗ$.**

**Λύση**

**α.** Επειδή $ΜΑ = ΜΛ$ και $ΜΒ = ΜΓ$, το $ΑΓΛΒ$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε $ΓΛ = ΑΒ$.
Είναι $ΑΒ = ΑΕ$, ως πλευρές τετραγώνου, οπότε $ΓΛ = ΑΕ$.

**β.** Είναι:
- $Α\hat{Γ}Λ = \hat{Γ} + Β\hat{Γ}Λ = \hat{Γ} + \hat{Β}$, αφού $Β\hat{Γ}Λ = \hat{Β}$, ως εντός εναλλάξ
- $Ε\hat{Α}Η = 360^\circ - Ε\hat{Α}Β - Η\hat{Α}Γ - \hat{Α} = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - \hat{Α} = 180^\circ - \hat{Α} = \hat{Β} + \hat{Γ}$

Οπότε $Α\hat{Γ}Λ = Ε\hat{Α}Η$.

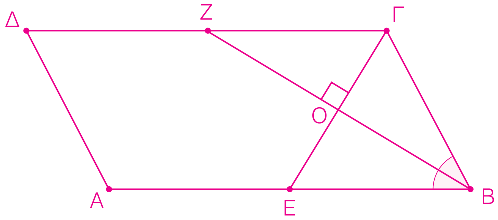
**γ.** Τα $\overset{\triangle}{ΑΓΛ}$ και $\overset{\triangle}{ΕΑΗ}$ έχουν:
- $ΑΓ = ΑΗ$
- $ΓΛ = ΑΕ$, από το **α.** ερώτημα
- $Α\hat{Γ}Λ = Ε\hat{Α}Η$, από το **β.** ερώτημα

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ), άρα $Λ\hat{Α}Γ = Α\hat{Η}Ε$, (1).

Αρκεί να δείξουμε ότι $Α\hat{Ρ}Η = 90^\circ \Leftrightarrow Ρ\hat{Α}Η + Ρ\hat{Η}Α = 90^\circ$.

Είναι $Λ\hat{Α}Γ + Γ\hat{Α}Η + Ρ\hat{Α}Η = 180^\circ \overset{(1)}{\Leftrightarrow} Α\hat{Η}Ε + 90^\circ + Ρ\hat{Α}Η = 180^\circ \Leftrightarrow Ρ\hat{Η}Α + Ρ\hat{Α}Η = 90^\circ$.

## 223 Θέμα 4 - 13850




**Δίνεται το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ του σχήματος και η ΒΖ διχοτόμος της γωνίας $\hat{Β}$. Φέρουμε ΓΟ κάθετη στη ΒΖ και την προεκτείνουμε έτσι ώστε να τέμνει την ΑΒ στο σημείο Ε.**

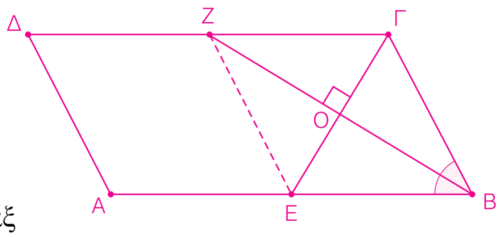
**α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΕΒΓ είναι ισοσκελές.**

**β. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΟΖΓ και ΟΒΕ είναι ίσα.**

**γ. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΒΓΖ είναι ρόμβος.**

**δ. Πόσο πρέπει να είναι το μέτρο της γωνίας $\hat{Β}$ ώστε το τετράπλευρο ΕΒΓΖ να είναι τετράγωνο;**

**Λύση**



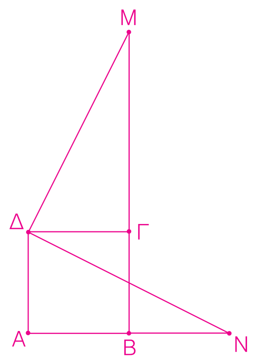

**α.** Η $ΒΖ$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{Β}$ και $ΒΟ \perp ΓΕ$.
Επομένως, η ΒΟ στο τρίγωνο ΕΒΓ είναι ύψος και διχοτόμος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές με βάση την πλευρά ΕΓ.

**β.** Τα τρίγωνα ΟΖΓ και ΟΒΕ έχουν:
- $Γ\hat{Ο}Ζ = Ε\hat{Ο}Β = 90^\circ$
- $ΟΓ = ΟΕ$
- $Ζ\hat{Γ}Ο = Β\hat{Ε}Ο$, ως εντός εναλλάξ

Άρα είναι ίσα γιατί είναι ορθογώνια, που έχουν μια κάθετη πλευρά και την προσκείμενη σε αυτή οξεία γωνία ίσες μία προς μία.

**γ.** Από τη σύγκριση στο ερώτημα **β.** έχουμε ΟΖ = ΟΒ και είναι ΟΓ = ΟΕ. Το τετράπλευρο ΕΒΓΖ είναι παραλληλόγραμμο αφού οι διαγώνιοι ΓΕ και ΒΖ διχοτομούνται στο σημείο Ο και επειδή είναι και κάθετες είναι ρόμβος.
**δ.** Για να είναι το τετράπλευρο ΕΒΓΖ τετράγωνο θα πρέπει να είναι εκτός από ρόμβος (ερώτημα γ.) και ορθογώνιο άρα θα πρέπει $\hat{Β} = 90^\circ$.

## 224 Θέμα 4 - 1750




**Στο τετράγωνο ΑΒΓΔ προεκτείνουμε την πλευρά ΑΒ κατά τμήμα ΒΝ και την πλευρά ΒΓ κατά τμήμα ΓΜ = ΑΝ . Να αποδείξετε ότι:**

**α.** **$ΔΝ = ΔΜ$**

**β.** **$ΔΝ \perp ΔΜ$**

**Λύση**

**α.** Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΝ και ΓΔΜ έχουν:
- $ΑΔ = ΔΓ$
- $ΑΝ = ΓΜ$

Οπότε είναι ίσα, άρα $ΔΝ = ΔΜ$ .

**β.** Επειδή τα τρίγωνα ΑΔΝ και ΓΔΜ είναι ίσα, έχουμε $Μ\hat{Δ}Γ = Α\hat{Δ}Ν$ .

Είναι $Γ\hat{Δ}Ν = Δ\hat{Ν}Α$ , ως εντός εναλλάξ.

Οπότε $Μ\hat{Δ}Γ + Γ\hat{Δ}Ν = Α\hat{Δ}Ν + Δ\hat{Ν}Α = 90^o$ , άρα $ΔΝ \perp ΔΜ$ .

## 225 Θέμα 4 - 13841

**Σε τρίγωνο ΑΒΓ, ΒΔ η διχοτόμος της γωνίας Β και Μ το μέσο της. Από το σημείο Δ φέρουμε παράλληλη προς τη ΒΓ, η οποία τέμνει την πλευρά ΑΒ το σημείο Ε. Αν η ΕΜ τέμνει τη ΒΓ στο σημείο Ζ τότε:**

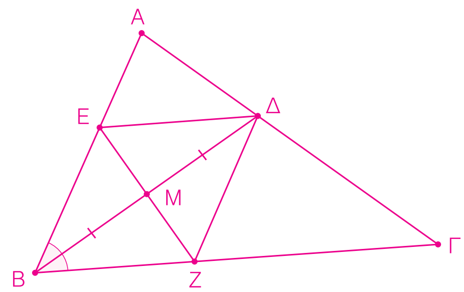
**α.** **Να αποδείξετε ότι $ΒΕ = ΕΔ$.**

**β.** **Να αποδείξετε ότι $ΒΕ // ΖΔ$.**

**γ.** **Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι ρόμβος.**

**δ.** **Ποιο θα έπρεπε να είναι το είδος του τριγώνου ΑΒΓ ώστε το τετράπλευρο ΔΕΒΖ να είναι τετράγωνο; Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας.**

**Λύση**




**α.** Είναι: • ΔΕ//ΒΓ άρα $Δ\hat{Β}Ζ = Ε\hat{Δ}Β$ ως εντός εναλλάξ

• ΒΔ διχοτόμος της $\hat{Β}$, άρα $Δ\hat{Β}Ζ = Δ\hat{Β}Ε$

Οπότε $Ε\hat{Δ}Β = Δ\hat{Β}Ε$ , άρα το τρίγωνο ΒΕΔ είναι ισοσκελές με ΒΕ = ΕΔ.

**β.** Τα τρίγωνα ΒΜΖ και ΔΜΕ έχουν:
- ΒΜ = ΜΔ
- $Δ\hat{Β}Ζ = Ε\hat{Δ}Β$, ως εντός εναλλάξ
- $Β\widehat{Μ}Ζ = Δ\widehat{Μ}Ε$, ως κατακορυφήν

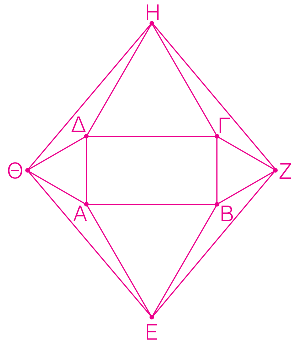
Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ), οπότε ΒΖ = ΔΕ.

Το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο αφού ΒΖ=//ΔΕ, άρα και ΒΕ//ΖΔ

**γ.** Έχουμε ΒΕ = ΕΔ, άρα το παραλληλόγραμμο ΔΕΒΖ είναι ρόμβος αφού έχει δυο διαδοχικές πλευρές του ίσες.

**δ.** Για να είναι το τετράπλευρο ΔΕΒΖ τετράγωνο, εφόσον είναι ρόμβος, πρέπει η γωνία $\hat{Β}$ να είναι ορθή. Όταν η γωνία $\hat{Β}$ είναι ορθή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Β.

## 226 Θέμα 4 - 1734




**Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ και έξω από αυτό, κατασκευάζουμε τέσσερα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΕ, ΒΓΖ , ΓΔΗ , ΔΑΘ .**

**α.** **Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΖΗΘ είναι ρόμβος.**

**β.** **Αν το αρχικό τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο, τότε το ΕΖΗΘ τι είδους παραλληλόγραμμο είναι; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.**

**Λύση**

**α.** Τα τρίγωνα ΗΔΘ, ΘΑΕ, ΕΒΖ και ΗΓΖ έχουν:

- $Η Δ = ΑΕ = ΒΕ = ΓΗ$ , ως ίσες πλευρές των ίσων ισόπλευρων τριγώνων ΗΔΓ και ΕΑΒ (τα τρίγωνα ΗΔΓ και ΕΑΒ είναι ίσα επειδή έχουν όλες τις πλευρές τους ίσες με τις πλευρές ΓΔ και ΑΒ του ορθογωνίου ΑΒΓΔ)
- $ΘΔ = ΘΑ = ΒΖ = ΓΖ$ ως ίσες πλευρές των ίσων ισόπλευρων τριγώνων ΘΔΑ και ΒΓΖ (όπως πριν, τα ΘΔΑ και ΒΓΖ είναι ίσα αφού έχουν όλες τις πλευρές τους ίσες με τις πλευρές ΑΔ και ΒΓ του ΑΒΓΔ)
- $Η\hat{Δ}Θ = Θ\hat{Α}Ε = Ε\hat{Β}Ζ = Ζ\hat{Γ}Η = 360^\circ - 90^\circ - 2 \cdot 60^\circ = 150^\circ$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ), άρα $ΘΗ = ΗΖ = ΖΕ = ΕΘ$ .

Επομένως το ΕΖΗΘ είναι ρόμβος.

**β.** Αν το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο, τότε $ΑΒ = ΑΔ$ .

Στα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΔΘ και ΑΕΒ είναι $ΑΘ = ΑΔ$ και $ΑΕ = ΑΒ$ , οπότε $ΑΘ = ΑΕ$ .

Δηλαδή, το τρίγωνο ΑΘΕ είναι ισοσκελές, οπότε $Α\hat{Θ}Ε = Α\hat{Ε}Θ$ και είναι

$Α\hat{Θ}Ε + Α\hat{Ε}Θ + Θ\hat{Α}Ε = 180^\circ \Leftrightarrow 2Α\hat{Θ}Ε + 150^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow Α\hat{Θ}Ε = 15^\circ$ .

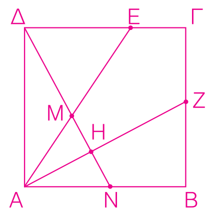
Όμοια, στο τρίγωνο ΔΘΗ, είναι $Η\hat{Θ}Δ = 15^\circ$ .

Τότε $Ε\hat{Θ}Η = Δ\hat{Θ}Η + Ε\hat{Θ}Α + Α\hat{Θ}Δ = 15^\circ + 60^\circ + 15^\circ = 90^\circ$ .

Επομένως ο ρόμβος έχει μια γωνία ορθή, άρα είναι τετράγωνο.

## 227 Θέμα 4 - 1825

**Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ και τυχαίο σημείο Ε στην πλευρά ΔΓ . Φέρουμε τη διχοτόμο ΑΖ της γωνίας ΕΑΒ και τη ΔΗ κάθετη από το Δ προς την ΑΖ , η οποία τέμνει την ΑΕ στο Μ και την ΑΒ στο Ν . Να αποδείξετε ότι:**

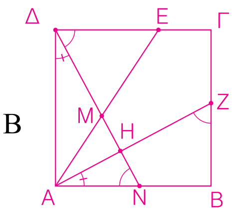



**α. Τα τρίγωνα ΑΔΝ και ΑΒΖ είναι ίσα.**

**β. $ΑΜ = ΑΝ$ και $ΔΕ = ΕΜ$**

**γ. $ΑΕ = ΔΕ + ΒΖ$**

**Λύση**




**α.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο:

- ΑΒΖ $(\hat{Β} = 90^\circ)$, είναι $Α\hat{Ζ}Β + Ζ\hat{Α}Β = 90^\circ \Leftrightarrow Α\hat{Ζ}Β = 90^\circ - Ζ\hat{Α}Β$
- ΑΗΝ $(Α\hat{Η}Ν = 90^\circ)$, είναι $Α\hat{Ν}Η + Η\hat{Α}Ν = 90^\circ \Leftrightarrow Α\hat{Ν}Η = 90^\circ - Η\hat{Α}Ν \Leftrightarrow Α\hat{Ν}Δ = 90^\circ - Ζ\hat{Α}Β$

Επομένως, $Α\hat{Ζ}Β = Α\hat{Ν}Δ$ .

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΝ και ΑΒΖ έχουν:

- $ΑΔ = ΑΒ$
- $Α\hat{Ζ}Β = Α\hat{Ν}Δ$

Οπότε είναι ίσα.

**β.** Στο τρίγωνο ΑΜΝ η ΑΗ είναι ύψος και διχοτόμος.

Οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές, άρα $ΑΜ = ΑΝ$ .

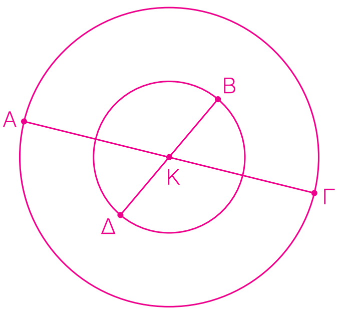
Είναι:
- $Ε\hat{Δ}Ν = Α\hat{Ν}Δ$ , ως εντός εναλλάξ
- $Α\hat{Ν}Δ = Α\hat{Μ}Ν$ , αφού το τρίγωνο ΑΜΝ είναι ισοσκελές
- $Α\hat{Μ}Ν = Δ\hat{Μ}Ε$ , ως κατακορυφήν

Άρα $Ε\hat{Δ}Ν = Δ\hat{Μ}Ε$ , οπότε $ΔΕ = ΕΜ$.

**γ.** Είναι:
- $ΑΕ = ΕΜ + ΑΜ = ΔΕ + ΑΝ$ .
- $ΑΝ = ΒΖ$ , αφού τα τρίγωνα ΑΔΝ και ΑΒΖ είναι ίσα.

Άρα $ΑΕ = ΔΕ + ΒΖ$.

## 228 Θέμα 4 - 13848




**Στο διπλανό σχήμα οι κύκλοι έχουν κέντρο Κ και οι ΑΓ και ΒΔ είναι διάμετροί τους.**

**α. Αν ισχύει $ΑΓ > ΒΔ$ :**

**i. να σχεδιάσετε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ και να αποδείξετε ότι είναι παραλληλόγραμμο.**

**ii. να διατυπώσετε μια επιπλέον υπόθεση για τις ΑΓ και ΒΔ, ώστε το ΑΒΓΔ να είναι ρόμβος.**

**Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.**

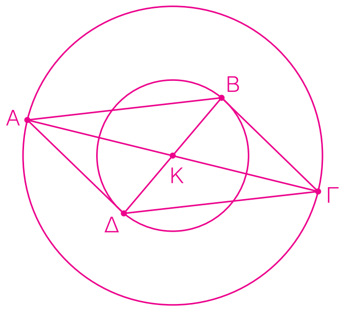
**β. Αν οι δύο κύκλοι ταυτίζονται, τότε να εξετάσετε αν ο ακόλουθος ισχυρισμός είναι αληθής:**

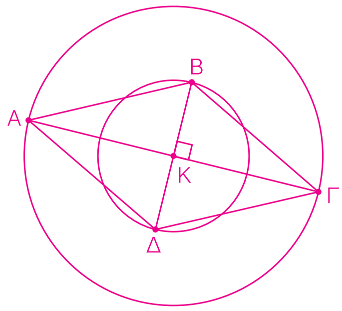
**«Το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο».**

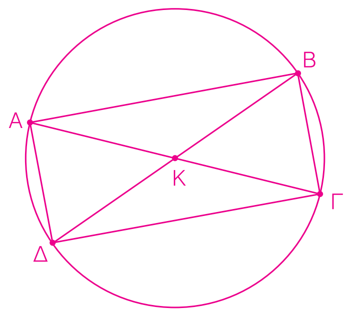
**Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.**

**Λύση**

**α. i.** Είναι $ΒΚ = ΚΔ$ ως ακτίνες του ίδιου κύκλου (Κ, ΚΒ) και $ΑΚ = ΚΓ$ στον κύκλο με κέντρο Κ και ακτίνα ΑΓ. Άρα οι διαγώνιοι του ΑΒΓΔ διχοτομούνται, επομένως είναι παραλληλόγραμμο.




**ii.** Αν οι ΑΓ και ΒΔ είναι κάθετες τότε το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ έχει κάθετες διαγωνίους.

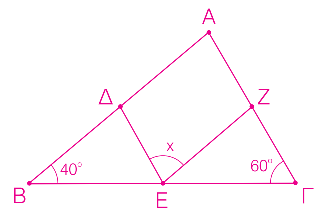
Συνεπώς είναι ρόμβος. Άρα η επιπλέον υπόθεση είναι ότι «οι ΑΓ και ΒΔ είναι κάθετες».

**β.** Αν οι κύκλοι ταυτίζονται, τότε $ΑΓ = ΒΔ$. Οπότε οι διαγώνιοι ΑΓ και ΒΔ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ είναι ίσες, επομένως το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο. Για να είναι τετράγωνο πρέπει επιπλέον οι ΑΓ και ΒΔ να είναι κάθετες, κάτι που δεν αναφέρεται στην υπόθεση του β..

Ο ισχυρισμός δεν είναι αληθής αφού το ΑΒΓΔ δεν είναι αναγκαία τετράγωνο.

## 21. Εφαρμογές των παραλληλογράμμων

## 229 Θέμα 2 - 1589




**Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} = 40^\circ$ και $\hat{Γ} = 60^\circ$ . Επιπλέον, τα σημεία Δ , Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών του ΑΒ , ΒΓ και ΓΑ αντίστοιχα.**

**α. Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{A}$ του τριγώνου ΑΒΓ .**

**β. Να αποδείξετε ότι $ΔΕ // ΑΓ$ και $ΖΕ // ΑΒ$ .**

**γ. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΒΔΕ .**

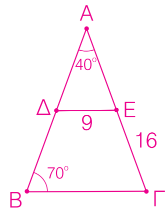
**Λύση**

**α.** Είναι $\hat{A} + \hat{B} + \hat{Γ} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A} + 40^\circ + 60^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A} = 80^\circ$ .

**β.** Στο τρίγωνο ΑΒΓ , έχουμε:
- Δ , Ε τα μέσα των ΑΒ , ΒΓ , οπότε $ΔΕ // ΑΓ$
- Ε, Ζ τα μέσα των ΒΓ, ΑΓ οπότε $ΕΖ // ΑΒ$

**γ.** Είναι $B\hat{Δ}E = \hat{A} = 80^\circ$ και $B\hat{E}Δ = \hat{Γ} = 60^\circ$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη.

## 230 Θέμα 2 - 1608




**Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}=40^o$ και $\hat{B}=70^o$ . Τα σημεία Δ και Ε είναι τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ με $ΔΕ=9$ και $ΕΓ=16$ .**

**α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές και να βρείτε ποιες είναι οι ίσες πλευρές του.**

**β. Να αποδείξετε ότι $ΒΓ=18$ .**

**γ. Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ .**

**Λύση**

**α.** Είναι $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^o \Leftrightarrow 40^o+70^o+\hat{\Gamma}=180^o \Leftrightarrow \hat{\Gamma}=70^o$ .

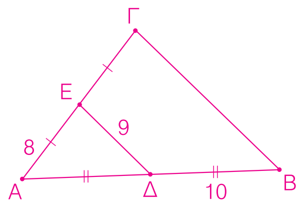
Οπότε $\hat{B}=\hat{\Gamma}$ , άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $ΑΒ=ΑΓ$ .

**β.** Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι Δ μέσο ΑΒ , Ε μέσο ΑΓ , οπότε $ΔΕ=\frac{ΒΓ}{2} \Leftrightarrow 9=\frac{ΒΓ}{2} \Leftrightarrow ΒΓ=18$

**γ.** Είναι:
- $ΑΓ=2ΕΓ=2\cdot 16=32$ και
- $ΑΒ=ΑΓ=32$

Η περίμετρος είναι $Π=32+32+18=82$ .

## 231 Θέμα 2 - 1613




**Στο τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος τα σημεία Δ και Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, $ΑΕ=8$ , $ΕΔ=9$ και $ΔΒ=10$ .**

**α. Να αποδείξετε ότι οι ΒΓ και ΔΕ είναι παράλληλες.**

**β. Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΒΓ .**

**γ. Να συγκρίνετε τις περιμέτρους του τριγώνου ΑΒΓ και του τετραπλεύρου ΔΕΓΒ .**

**Λύση**

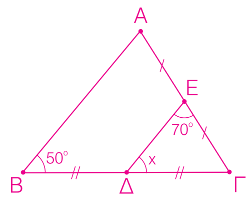
**α.** Στο τρίγωνο ΑΒΓ τα Δ , Ε είναι τα μέσα των ΑΒ , ΑΓ , οπότε $ΒΓ // ΔΕ$ .

**β.** Επειδή τα Δ , Ε είναι τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ έχουμε $ΔΕ=\frac{ΒΓ}{2} \Leftrightarrow 9=\frac{ΒΓ}{2} \Leftrightarrow ΒΓ=18$ .

**γ.** Είναι $ΑΔ=ΔΒ=10$ , $ΕΓ=ΑΕ=8$ , οπότε $ΑΒ=20$ και $ΑΓ=16$ άρα:
- $Π_{ΑΒΓ}=ΑΒ+ΒΓ+ΑΓ=20+18+16=54$
- $Π_{ΔΕΓΒ}=ΔΕ+ΕΓ+ΓΒ+ΒΔ=9+8+18+10=45$

Επομένως $Π_{ΑΒΓ}>Π_{ΔΕΓΒ}$ .

## 232 Θέμα 2 - 1611




**Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B}=50^o$ . Έστω ότι τα σημεία Δ και Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα, τέτοια ώστε $Δ\hat{Ε}Γ=70^o$ .**

**α. Να δικαιολογήσετε γιατί $ΔΕ // ΑΒ$ .**

**β. Να υπολογίσετε**

**i. τη γωνία $\hat{x}$** **ii. τις γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου ΑΒΓ .**

**Λύση**

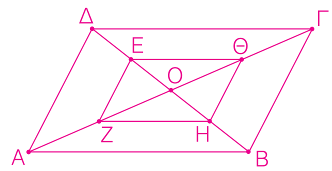
**α.** Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι Δ μέσο ΒΓ, Ε μέσο ΑΓ , οπότε $ΔΕ // ΑΒ$ .

**β.i.** Έχουμε $\hat{x}=\hat{B}=50^o$ , ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη.

**ii.** Επειδή $ΔΕ // ΑΒ$ , είναι $\hat{A}=Δ\hat{Ε}Γ=70^o$ .

Είναι $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^o \Leftrightarrow 70^o+50^o+\hat{\Gamma}=180^o \Leftrightarrow \hat{\Gamma}=180^o-120^o \Leftrightarrow \hat{\Gamma}=60^o$ .

## 233 Θέμα 2 - 1583




**Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Ο είναι το κέντρο του. Έστω Ε, Ζ, Η, Θ τα μέσα των ΟΔ , ΟΑ , ΟΒ και ΟΓ αντίστοιχα.**
**Να αποδείξετε ότι:**
**α. Το τετράπλευρο ΕΖΗΘ είναι παραλληλόγραμμο.**
**β. Αν η περίμετρος του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ είναι 40 , να βρείτε την περίμετρο του ΕΖΗΘ .**

**Λύση**

α. Έχουμε:

- Στο τρίγωνο ΟΑΒ είναι Ζ μέσο ΟΑ, Η μέσο ΟΒ , οπότε $ΖΗ=\dfrac{ΑΒ}{2}$
- Στο τρίγωνο ΟΓΔ είναι Ε μέσο ΟΔ, Θ μέσο ΟΓ , οπότε $ΕΘ=\dfrac{ΓΔ}{2}$
- Στο τρίγωνο ΟΒΓ είναι Η μέσο ΟΒ, Θ μέσο ΟΓ , οπότε $ΗΘ=\dfrac{ΒΓ}{2}$
- Στο τρίγωνο ΟΑΔ είναι Ε μέσο ΟΔ , Ζ μέσο ΟΑ , οπότε $ΕΖ=\dfrac{ΑΔ}{2}$ .

Επειδή το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο έχουμε ΑΒ= ΓΔ , άρα $ΖΗ=ΕΘ$ και $ΑΔ=ΒΓ$ , άρα $ΗΘ=ΕΖ$ . Επομένως το ΕΖΗΘ είναι παραλληλόγραμμο.

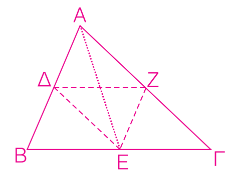
β. Έχουμε $ΑΒ+ΒΓ+ΓΔ+ΔΑ=40$ .

Είναι $ΕΖ+ΖΗ+ΗΘ+ΘΕ=\dfrac{ΑΔ}{2}+\dfrac{ΑΒ}{2}+\dfrac{ΒΓ}{2}+\dfrac{ΓΔ}{2}=\dfrac{ΑΔ+ΑΒ+ΒΓ+ΓΔ}{2}=\dfrac{40}{2}=20$ .

## 234 Θέμα 2 - 1566

**Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τα μέσα Δ , Ε και Ζ των πλευρών του ΑΒ , ΒΓ και ΓΑ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:**
**α. Το τετράπλευρο ΔΒΕΖ είναι παραλληλόγραμμο.**
**β. Η ευθεία ΔΖ διχοτομεί το τμήμα ΑΕ .**

**Λύση**

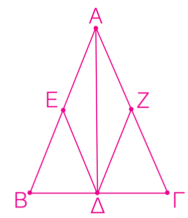



α. Στο τρίγωνο ΑΒΓ τα Ε , Ζ είναι τα μέσα των ΓΒ , ΓΑ , οπότε $ΕΖ//=\dfrac{ΑΒ}{2}$ (1) .

Επομένως $ΕΖ//=ΒΔ$ , άρα το ΔΒΕΖ είναι παραλληλόγραμμο.

β. Από την (1) έχουμε $ΕΖ//=ΑΔ$ , οπότε το ΖΕΔΑ είναι παραλληλόγραμμο, άρα οι διαγώνιοί του ΑΕ και ΔΖ διχοτομούνται.
Οπότε η ΔΖ διχοτομεί το ΑΕ .

## 235 Θέμα 2 - 1564




**Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(ΑΒ=ΑΓ)$ , το ύψος του ΑΔ και τα μέσα Ε και Ζ των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξτε ότι:**
**α. Τα τρίγωνα ΒΔΕ και ΓΔΖ είναι ίσα.**
**β. το τετράπλευρο ΑΖΔΕ είναι ρόμβος.**

**Λύση**

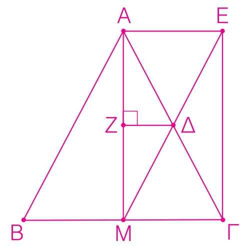
α. Τα τρίγωνα ΒΔΕ και ΓΔΖ έχουν:

- $ΒΕ=ΓΖ$ , ως μισά τμήματα των ίσων πλευρών ΑΒ και ΑΓ.
- $ΒΔ=ΓΔ$ , διότι το ΑΔ είναι ύψος του τριγώνου ΑΒΓ , οπότε είναι και διάμεσός του.
- $\hat{Β}=\hat{Γ}$ , ως γωνίες προσκείμενες στη βάση ΒΓ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ .

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ).

**β.** Στο τρίγωνο ΑΒΓ τα Δ, Ε είναι τα μέσα των ΒΓ, ΑΒ, οπότε $ΔΕ // = \frac{ΑΓ}{2} \Rightarrow ΔΕ // = ΑΖ$. Άρα το ΑΕΔΖ είναι παραλληλόγραμμο και επειδή $ΔΕ = ΑΖ = ΑΕ$ είναι ρόμβος, αφού έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες.

## 236 Θέμα 2 - 1560




**Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(ΑΒ = ΑΓ)$ και η διάμεσός του ΑΜ. Στην προέκταση της διαμέσου ΜΔ του τριγώνου ΑΜΓ θεωρούμε σημείο Ε ώστε $ΜΔ = ΔΕ$. Αν το σημείο Ζ είναι το ίχνος του Δ στην ΑΜ, να αποδείξετε ότι:**

**α. Το τετράπλευρο ΑΜΓΕ είναι ορθογώνιο.**

**β. $ΔΖ = \frac{ΒΓ}{4}$**

**Λύση**

**α.** Επειδή $ΔΑ = ΔΓ$ και $ΔΕ = ΔΜ$ το ΑΜΓΕ είναι παραλληλόγραμμο, αφού οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.
Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ η ΑΜ είναι διάμεσος, οπότε είναι και ύψος, επομένως $\hat{ΑΜΓ} = 90^o$.
Άρα το ΑΜΓΕ είναι ορθογώνιο.

**β.** Είναι $ΔΖ \perp ΑΜ$ και $ΓΜ \perp ΑΜ$ οπότε $ΔΖ // ΓΜ$.
Στο τρίγωνο ΑΜΓ το Δ είναι μέσο του ΑΓ και $ΔΖ // ΜΓ$, οπότε το Ζ είναι μέσο της ΑΜ και

$$ΔΖ = \frac{ΜΓ}{2} \Leftrightarrow ΔΖ = \frac{\frac{ΒΓ}{2}}{2} \Leftrightarrow ΔΖ = \frac{ΒΓ}{4}.$$

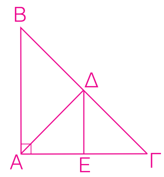
## 237 Θέμα 2 - 1542

**Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(\hat{Α} = 90^o)$ και ΑΔ η διάμεσός του. Από το σημείο Δ φέρουμε παράλληλη προς την ΑΒ που τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:**

**α. Το τρίγωνο ΔΕΓ είναι ορθογώνιο.**

**β. $ΔΕ = \frac{ΑΓ}{2}$**

**Λύση**




**α.** Επειδή $ΔΕ // ΑΒ$ και $ΑΒ \perp ΑΓ$, είναι $ΔΕ \perp ΑΓ$, οπότε το τρίγωνο ΔΕΓ είναι ορθογώνιο.

**β.** Στο τρίγωνο ΑΒΓ, το Δ είναι το μέσο της ΒΓ και $ΔΕ // ΑΒ$, οπότε το Ε είναι μέσο της ΑΓ και $ΔΕ = \frac{ΑΒ}{2} = \frac{ΑΓ}{2}$.

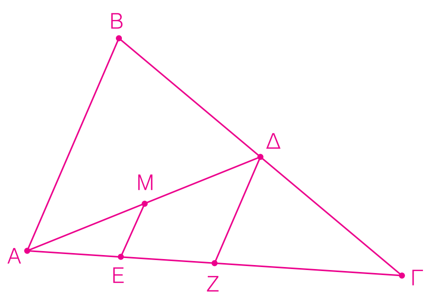
## 238 Θέμα 2 - 12639

**Από το μέσο Μ της διαμέσου ΑΔ τριγώνου ΑΒΓ, φέρουμε παράλληλη στην ΑΒ που τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ε. Αν η παράλληλη από το Δ στην ΑΒ τέμνει την ΑΓ στο Ζ, να αποδείξετε ότι:**

**α. το Ζ είναι μέσο της ΑΓ.**

**β. το ΑΕ ισούται με το $\frac{1}{4}$ του ΑΓ.**

**Λύση**



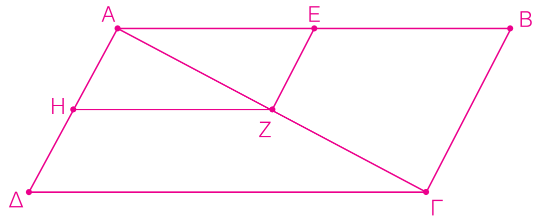

**α.** Στο τρίγωνο ΑΒΓ, είναι το Δ μέσο ΒΓ και $ΔΖ // ΑΒ$.
Επομένως το Ζ είναι το μέσον της πλευράς ΑΓ.

**β.** • Το Ζ είναι το μέσο της πλευράς ΑΓ, οπότε $ΑΖ = \frac{ΑΓ}{2}$ (1).

• Στο τρίγωνο ΑΔΖ, το Μ είναι μέσο της πλευράς του ΑΔ και η $ΜΕ // ΔΖ$.
Επομένως το Ε είναι μέσο της ΑΖ, άρα

$$ΑΕ = \frac{ΑΓ}{2} \Leftrightarrow ΑΕ = \frac{\frac{ΑΓ}{2}}{2} \Leftrightarrow ΑΕ = \frac{ΑΓ}{4}.$$

## 239 Θέμα 2 - 13532




**Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τα μέσα Ε, Ζ και Η των ΑΒ, ΑΓ και ΑΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:**

**α.** $\mathbf{ZH = \frac{AB}{2}}$.

**β. Το τετράπλευρο ΑΕΖΗ είναι παραλληλόγραμμο.**

**Λύση**

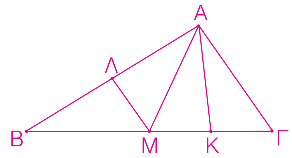
**α.** Στο τρίγωνο ΑΓΔ το τμήμα ΖΗ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΓ και ΑΔ, άρα $ZH // \Gamma\Delta$ (1) και $ZH = \frac{\Gamma\Delta}{2} \Leftrightarrow ZH = \frac{AB}{2}$.

**β.** Το Ε είναι το μέσο της ΑΒ, οπότε $AE = \frac{AB}{2}$ και αφού $ZH = \frac{AB}{2}$, έχουμε $AE = ZH$.

Είναι $AE // \Gamma\Delta$ (2), γιατί το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο. Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε ότι $AE // ZH$.

Το τετράπλευρο ΑΕΖΗ είναι παραλληλόγραμμο, γιατί οι απέναντι πλευρές του ΑΕ, ΖΗ είναι ίσες και παράλληλες.

## 240 Θέμα 4 - 1803




**Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathbf{B\Gamma = 2A\Gamma}$. Έστω ΑΜ διάμεσος του ΑΒΓ και Κ, Λ τα μέσα των ΜΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:**

**α.** $\mathbf{M\hat{A}\Gamma = A\hat{M}\Gamma}$

**β.** $\mathbf{M\Lambda = MK}$

**γ. Η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathbf{\Lambda\hat{M}K}$.**

**Λύση**

**α.** Είναι $A\Gamma = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow A\Gamma = M\Gamma$, οπότε το τρίγωνο ΓΑΜ είναι ισοσκελές, άρα $M\hat{A}\Gamma = A\hat{M}\Gamma$.

**β.** Στο τρίγωνο ΑΒΓ τα Λ, Μ είναι τα μέσα των ΑΒ, ΒΓ, οπότε $M\Lambda = \frac{A\Gamma}{2} = \frac{\Gamma M}{2} = MK$.

**γ.** Στο τρίγωνο ΑΒΓ τα Λ, Μ είναι τα μέσα των ΑΒ, ΒΓ, οπότε $\Lambda M // A\Gamma$, άρα $\Lambda\hat{M}A = M\hat{A}\Gamma$, ως εντός εναλλάξ.

Έχουμε $M\hat{A}\Gamma = A\hat{M}\Gamma$, οπότε $\Lambda\hat{M}A = A\hat{M}\Gamma$

Άρα η ΑΜ είναι η διχοτόμος της $\Lambda\hat{M}K$.

## 241 Θέμα 4 - 13743

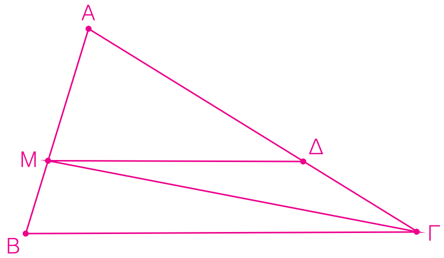
**Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Μ στην πλευρά ΑΒ. Από το Μ φέρουμε παράλληλη στη ΒΓ που τέμνει την ΑΓ στο σημείο Δ.**

**α. Να αποδείξετε ότι $\mathbf{\Delta\hat{M}\Gamma = B\hat{\Gamma}M}$.**

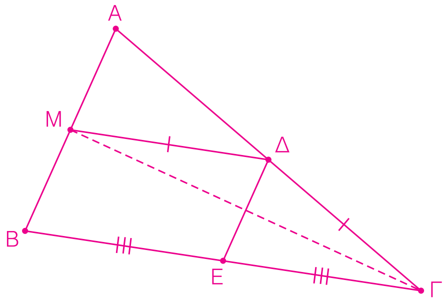
**β. Αν το τρίγωνο ΓΑΒ είναι ισοσκελές με βάση ΑΒ, να προσδιορίσετε τη θέση του σημείου Μ στην ΑΒ ώστε το τρίγωνο ΔΜΓ να είναι ισοσκελές με $\mathbf{\Delta M = \Delta\Gamma}$ και να δικαιολογήσετε τους ισχυρισμούς σας.**

**γ. Αν Μ είναι το μέσο του τμήματος ΑΒ και Ε το μέσο του τμήματος ΒΓ να δικαιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο ΜΔΕΒ είναι παραλληλόγραμμο.**

**Λύση**




**α.** Είναι $\Delta\hat{M}\Gamma = B\hat{\Gamma}M$, ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $M\Delta$ και $B\Gamma$ που τέμνονται από τη $M\Gamma$.




**β.** Αν το $\Delta M\Gamma$ είναι ισοσκελές με $\Delta M = \Delta\Gamma$, τότε $\Delta\hat{M}\Gamma = \Delta\hat{\Gamma}M$.

Στο ερώτημα **α.** αποδείξαμε ότι $\Delta\hat{M}\Gamma = B\hat{\Gamma}M$, οπότε $\Delta\hat{\Gamma}M = B\hat{\Gamma}M$, άρα η ΓΜ θα είναι διχοτόμος της γωνίας Γ. Ομως από την υπόθεση το τρίγωνο ΓΑΒ είναι ισοσκελές με βάση ΑΒ, οπότε η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής Γ θα είναι και διάμεσος προς τη βάση του. Δηλαδή το ζητούμενο σημείο Μ είναι το μέσο της ΑΒ.

**γ.** Το Μ είναι το μέσο της ΑΒ και $M\Delta // B\Gamma$, άρα το σημείο Δ είναι το μέσο της ΑΓ.

Το σημείο Ε είναι μέσο της ΒΓ άρα το τμήμα ΔΕ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, οπότε $\Delta E // MB$.

Το τετράπλευρο ΜΔΕΒ έχει τις απέναντι πλευρές του ανά δύο παράλληλες, άρα είναι παραλληλόγραμμο.

## 242 Θέμα 4 - 1726

**α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές τα μέσα πλευρών ισοσκελούς τριγώνου είναι ισοσκελές.**

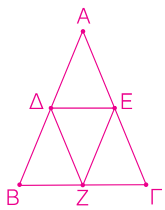
**β. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε ανάλογη πρόταση για**

**i. ισόπλευρο τρίγωνο**

**ii. ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο.**

**Λύση**

**α.** Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$ και Δ, Ε, Ζ τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ αντίστοιχα.




Είναι $\Delta Z = \dfrac{A\Gamma}{2}$ (1) και $ZE = \dfrac{AB}{2}$ (2).

Άρα $\Delta Z = ZE$, οπότε το ΔΖΕ είναι ισοσκελές.

**β.i.** • Διατύπωση

Το τρίγωνο με κορυφές τα μέσα πλευρών ισόπλευρου τριγώνου είναι ισόπλευρο.

• Απόδειξη

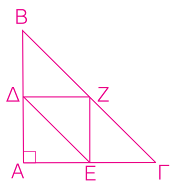
Στο τρίγωνο ΑΒΓ τα Δ, Ε είναι μέσα των ΑΒ, ΑΓ, οπότε $\Delta E = \dfrac{B\Gamma}{2}$ (3).

Επειδή $AB = B\Gamma = A\Gamma$ από τις (1), (2) και (3) έχουμε $Z\Delta = ZE = \Delta E$.

Άρα το τρίγωνο ΔΕΖ είναι ισόπλευρο.

**ii.** • Διατύπωση

Το τρίγωνο με κορυφές τα μέσα πλευρών ορθογωνίου και ισοσκελούς τριγώνου είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.




• Απόδειξη

Έστω ότι $\hat{A} = 90^{\circ}$.

Από το **α.** ερώτημα είναι $Z\Delta = ZE$, άρα το τρίγωνο ΔΖΕ είναι ισοσκελές.

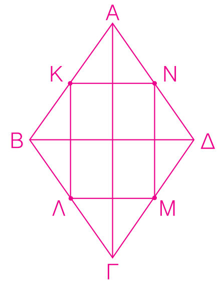
Επειδή $Z\Delta // A\Gamma$, $ZE // AB$ και $AB \perp A\Gamma$, προκύπτει ότι $\Delta Z \perp EZ$. Άρα $\Delta\hat{Z}E = 90^{\circ}$, επομένως το $\overset{\Delta}{\Delta ZE}$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

## 243 Θέμα 4 - 1798

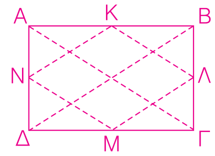
**α. Σε ρόμβο $ΑΒΓΔ$ θεωρούμε $Κ$, $Λ$, $Μ$, $Ν$ τα μέσα των πλευρών του $ΑΒ$, $ΒΓ$, $ΓΔ$, $ΔΑ$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ΚΛΜΝ$ είναι ορθογώνιο.**

**β. Να αποδείξετε ότι τα μέσα των πλευρών ενός ορθογωνίου είναι κορυφές ρόμβου.**

**Λύση**




α. Στο τρίγωνο $ΑΒΓ$ τα $Κ, Λ$ είναι μέσα των $ΑΒ, ΒΓ$, οπότε $ΚΛ // ΑΓ$.
Στο τρίγωνο $ΑΒΔ$ τα $Κ, Ν$ είναι μέσα των $ΑΒ, ΑΔ$, οπότε $ΚΝ // ΒΔ$.
Στο τρίγωνο $ΒΓΔ$ τα $Λ, Μ$ είναι μέσα των $ΒΓ, ΓΔ$, οπότε $ΛΜ // ΒΔ$.
Στο τρίγωνο $ΑΓΔ$ τα $Μ, Ν$ είναι μέσα των $ΓΔ, ΑΔ$, οπότε $ΜΝ // ΑΓ$.
Άρα $ΚΛ // ΜΝ$ και $ΚΝ // ΛΜ$ και συνεπώς το $ΚΛΜΝ$ είναι παραλληλόγραμμο.
Είναι $ΚΝ // ΒΔ$, $ΚΛ // ΑΓ$ και $ΑΓ \perp ΒΔ$, αφού είναι διαγώνιοι του ρόμβου $ΑΒΓΔ$.
Οπότε $ΚΝ \perp ΚΛ$. Άρα το $ΚΛΜΝ$ είναι ορθογώνιο.




β. Το $ΚΛΜΝ$ είναι παραλληλόγραμμο.
Στα τρίγωνα $ΑΒΔ$, $ΑΒΓ$ τα $Ν$, $Κ$ και $Λ$ είναι τα μέσα των πλευρών $ΑΔ$, $ΑΒ$ και $ΒΓ$, άρα $ΚΝ = \frac{ΒΔ}{2}$, $ΚΛ = \frac{ΑΓ}{2}$ το $ΑΒΓΔ$ είναι ορθογώνιο, άρα $ΑΓ = ΒΔ$, οπότε $ΚΝ = ΚΛ$.
Άρα το $ΚΛΜΝ$ είναι ρόμβος.

## 244 Θέμα 4 - 1728

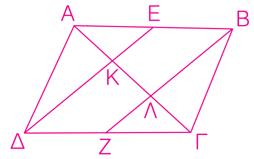
**Έστω παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$. Αν τα σημεία $Ε$ και $Ζ$ είναι τα μέσα των πλευρών του $ΑΒ$ και $ΓΔ$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:**

**α. Το τετράπλευρο $ΔΕΒΖ$ είναι παραλληλόγραμμο.**

**β. $Α\hat{Ε}Δ = Β\hat{Ζ}Γ$**

**γ. Οι $ΔΕ$ και $ΒΖ$ τριχοτομούν τη διαγώνιο $ΑΓ$ του παραλληλογράμμου $ΑΒΓΔ$.**

**Λύση**




α. Επειδή το $ΑΒΓΔ$ είναι παραλληλόγραμμο έχουμε

$$ΑΒ // = ΓΔ \Rightarrow \frac{ΑΒ}{2} // = \frac{ΓΔ}{2} \Rightarrow ΒΕ // = ΔΖ .$$

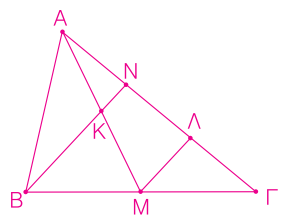
Άρα το $ΔΕΒΖ$ είναι παραλληλόγραμμο.

β. Είναι:
- $ΔΕ // ΒΖ$, οπότε $Α\hat{Ε}Δ = Ε\hat{Β}Ζ$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά
- $ΑΒ // ΓΔ$ οπότε $Ε\hat{Β}Ζ = Β\hat{Ζ}Γ$ ως εντός εναλλάξ

Άρα $Α\hat{Ε}Δ = Β\hat{Ζ}Γ$.

γ. • Στο τρίγωνο $ΑΒΛ$ το $Ε$ είναι το μέσο του $ΑΒ$ και $ΕΚ // ΒΛ$, οπότε το $Κ$ είναι μέσο του $ΑΛ$, άρα $ΚΑ = ΚΛ$.
• Στο τρίγωνο $ΔΚΓ$ το $Ζ$ είναι το μέσο του $ΓΔ$ και $ΖΛ // ΔΚ$, οπότε το $Λ$ είναι μέσο του $ΚΓ$, άρα $ΚΛ = ΛΓ$.
Επομένως $ΑΚ = ΚΛ = ΛΓ$ δηλαδή οι $ΔΕ$ και $ΒΖ$ τριχοτομούν την $ΑΓ$.

## 245 Θέμα 4 - 1802




**Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$, $ΑΜ$ διάμεσός του και $Κ$ το μέσο του $ΑΜ$. Αν η προέκταση της $ΒΚ$ τέμνει την $ΑΓ$ στο σημείο $Ν$ και $Λ$ είναι το μέσο του $ΓΝ$, να αποδείξετε ότι:**

**α. Το σημείο $Ν$ είναι μέσο του $ΑΛ$.**

**β. $Κ\hat{Μ}Γ = Μ\hat{Β}Κ + Α\hat{Κ}Ν$**

**γ. $ΒΚ = 3ΚΝ$**

**Λύση**

**α.** • Στο τρίγωνο $\Gamma BN$ έχουμε τα $M$, $\Lambda$ τα μέσα των $\Gamma B$, $\Gamma N$, οπότε $M\Lambda // BN$.
• Στο τρίγωνο $AM\Lambda$, το $K$ είναι το μέσο του $AM$ και $KN // M\Lambda$, οπότε το $N$ είναι το μέσο του $A\Lambda$.

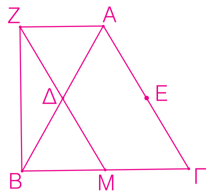
**β.** Είναι $K\hat{M}\Gamma = \Gamma\hat{M}\Lambda + \Lambda\hat{M}A = M\hat{B}K + A\hat{K}N$, αφού:

- $M\Lambda // BK$, άρα $\Gamma\widehat{M}\Lambda = M\widehat{B}K$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη
- $M\Lambda // KN$, άρα $\Lambda\widehat{M}A = A\widehat{K}N$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη

**γ.** Από το **α.** έχουμε $KN = \dfrac{M\Lambda}{2} = \dfrac{\frac{BN}{2}}{2} = \dfrac{BN}{4}$.

Οπότε $BN = 4KN \Leftrightarrow BK + KN = 4KN \Leftrightarrow BK = 3KN$.

## 246 Θέμα 4 - 1868




**Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ και τα μέσα $\Delta$, $E$ και $M$ των $AB$, $A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Στην προέκταση του $M\Delta$ (προς το $\Delta$) θεωρούμε τμήμα $\Delta Z = \Delta M$. Να αποδείξετε ότι:**

**α. Τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{AZ\Delta}$ και $\overset{\Delta}{BM\Delta}$ είναι ίσα.**

**β. Το τετράπλευρο $ZA\Gamma M$ είναι παραλληλόγραμμο.**

**γ. Τα τμήματα $ZE$ και $A\Delta$ τέμνονται κάθετα και διχοτομούνται.**

**δ. Η $BZ$ είναι κάθετη στη $ZA$.**

**Λύση**

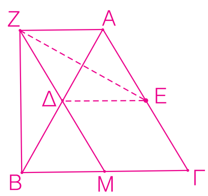
**α.** Τα τρίγωνα $AZ\Delta$ και $BM\Delta$ έχουν:
- $\Delta A = \Delta B$
- $\Delta Z = \Delta M$
- $A\hat{\Delta}Z = B\hat{\Delta}M$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ).

**β.** Επειδή $\Delta A = \Delta B$ και $\Delta Z = \Delta M$, το $ZAMB$ είναι παραλληλόγραμμο αφού οι διαγώνιοί του διχοτομούνται. Οπότε $ZA // = BM \Rightarrow ZA // = M\Gamma$, άρα το $ZA\Gamma M$ είναι παραλληλόγραμμο.

**γ.** Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ τα $\Delta$, $E$ είναι τα μέσα των $AB$, $A\Gamma$, οπότε $\Delta E // = \dfrac{B\Gamma}{2} \Rightarrow \Delta E // = M\Gamma \Rightarrow \Delta E // = ZA$.

Άρα το $ZAE\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε τα $ZE$ και $A\Delta$ διχοτομούνται.



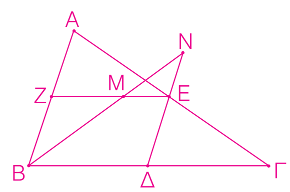

Είναι:
- $\Delta E = ZA$ και $ZA = M\Gamma$, άρα $\Delta E = M\Gamma$
- $M\Gamma = \dfrac{B\Gamma}{2} = \dfrac{A\Gamma}{2} = AE$

Οπότε $\Delta E = AE$, άρα το $ZAE\Delta$ είναι ρόμβος, επομένως $ZE \perp A\Delta$.

**δ.** Στο τρίγωνο $ZAB$ η $Z\Delta$ είναι διάμεσος $Z\Delta = \Delta M = \dfrac{A\Gamma}{2} = \dfrac{AB}{2}$.

Οπότε $B\hat{Z}A = 90^{o}$, άρα $BZ \perp ZA$.

## 247 Θέμα 4 - 1801




**Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και $\Delta$, $E$, $Z$ τα μέσα των πλευρών του $B\Gamma$, $A\Gamma$, $AB$ αντίστοιχα. Αν η διχοτόμος της γωνίας $B$ τέμνει την $ZE$ στο σημείο $M$ και την προέκταση της $\Delta E$ στο σημείο $N$, να αποδείξετε ότι:**

**α. Το τετράπλευρο $ZE\Delta B$ είναι παραλληλόγραμμο.**

**β. Τα τρίγωνα $BZM$ και $MEN$ είναι ισοσκελή.**

**γ. $BZ + NE = \Delta\Gamma$**

**Λύση**

**α.** Στο τρίγωνο ΑΒΓ τα Δ, Ε, Ζ είναι τα μέσα των ΒΓ, ΑΓ, ΑΒ, οπότε ΔΕ // ΒΖ και ΖΕ // ΒΔ. Άρα το ΖΕΔΒ είναι παραλληλόγραμμο.

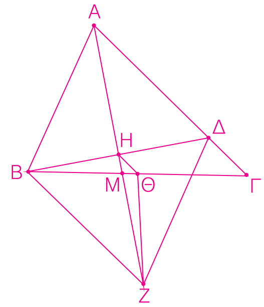
**β.** Είναι: • $Z\hat{B}M = M\hat{B}\Delta$ και $M\hat{B}\Delta = Z\hat{M}B$, ως εντός εναλλάξ, άρα $Z\hat{B}M = Z\hat{M}B$, οπότε το τρίγωνο ΒΖΜ είναι ισοσκελές.

• $E\hat{N}M = Z\hat{B}M$, ως εντός εναλλάξ και $Z\hat{B}M = Z\hat{M}B = N\hat{M}E$, άρα $E\hat{N}M = N\hat{M}E$.

Οπότε το $\overset{\Delta}{MEN}$ είναι ισοσκελές

**γ.** Είναι $BZ + NE = ZM + ME = ZE = B\Delta = \Delta\Gamma$.

## 248 Θέμα 4 - 1889




**Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ. Από το Β φέρουμε κάθετη στην διχοτόμο ΑΜ της γωνίας Α, η οποία τέμνει την ΑΜ στο Η και την ΑΓ στο Δ. Στην προέκταση της ΑΗ θεωρούμε σημείο Ζ τέτοιο ώστε ΑΗ = ΗΖ και έστω Θ το μέσο της πλευράς ΒΓ. Να αποδείξετε ότι:**

**α. το τετράπλευρο ΑΒΖΔ είναι ρόμβος.**

**β. ΗΘ // ΒΖ**

**γ.** $\mathbf{H\Theta = \dfrac{A\Gamma - AB}{2}}$.

**Λύση**

**α.** Στο τρίγωνο ΑΒΔ το ΑΗ είναι ύψος και διχοτόμος, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΔ και το ΑΗ είναι διάμεσος.

Επειδή ΗΒ = ΗΔ και ΗΑ = ΗΖ, το ΑΒΖΔ είναι παραλληλόγραμμο αφού οι διαγώνιοί του διχοτομούνται
Επειδή επιπλέον είναι ΑΒ = ΑΔ, το ΑΒΖΔ είναι ρόμβος.

**β.** Στο τρίγωνο ΒΓΔ είναι Η, Θ τα μέσα των ΒΔ, ΒΓ, οπότε ΗΘ // ΓΔ.

Είναι ΑΔ // ΒΖ οπότε ΓΔ // ΒΖ.

Επομένως ΗΘ // ΒΖ.

**γ.** Στο τρίγωνο ΒΓΔ τα Η, Θ είναι μέσα των ΒΔ, ΒΓ οπότε

$$H\Theta = \frac{\Gamma\Delta}{2} = \frac{A\Gamma - A\Delta}{2} = \frac{A\Gamma - AB}{2}$$, αφού ΑΔ = ΑΒ.

## 249 Θέμα 4 - 1898

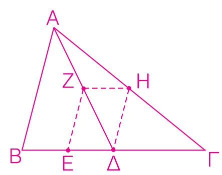
**Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσος του ΑΔ. Έστω Ε, Ζ και Η είναι τα μέσα των ΒΔ, ΑΔ και ΑΓ αντίστοιχα.**

**α. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΕΖΗ είναι παραλληλόγραμμο.**

**β. Να βρείτε τη σχέση των πλευρών ΑΒ και ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ, ώστε το παραλληλόγραμμο ΔΕΖΗ να είναι ρόμβος.**

**γ. Στην περίπτωση που το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο (η γωνία Β ορθή), να βρείτε το είδος του παραλληλογράμμου ΔΕΖΗ.**

**Λύση**




**α.** Στο τρίγωνο ΑΔΓ, τα Ζ, Η είναι τα μέσα των ΑΔ, ΑΓ, οπότε

$$ZH // = \frac{\Delta\Gamma}{2} \Rightarrow ZH // = \frac{B\Delta}{2} \Rightarrow ZH // = \Delta E$$, άρα το ΔΕΖΗ είναι παραλληλόγραμμο.

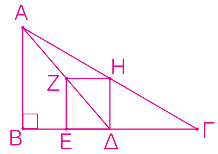
**β.** Για να είναι το παραλληλόγραμμο ΔΕΖΗ ρόμβος, αρκεί να είναι ΖΗ = ΖΕ (1).

Στο $\overset{\Delta}{A\Delta B}$ τα Ε, Ζ είναι τα μέσα των ΒΔ, ΑΔ, οπότε $ZE = \dfrac{AB}{2}$.

Η $(1) \Leftrightarrow \dfrac{\Delta\Gamma}{2} = \dfrac{AB}{2} \Leftrightarrow \Delta\Gamma = AB \Leftrightarrow \dfrac{B\Gamma}{2} = AB \Leftrightarrow B\Gamma = 2AB$ .

Οπότε το $\Delta EZH$ είναι ρόμβος, όταν $B\Gamma = 2AB$ .

**γ.** Αν $\hat{B} = 90^o$ , τότε $AB \perp B\Gamma$ .




Επειδή $ZE // AB$ , έχουμε $ZE \perp B\Gamma$ , δηλαδή $Z\hat{E}\Gamma = 90^o$ .

Άρα το παραλληλόγραμμο $\Delta EZH$ είναι ορθογώνιο.

## 250 Θέμα 4 - 1741

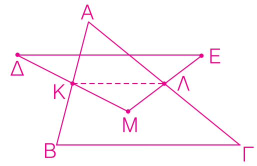
**Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και έστω $K$, $\Lambda$ τα μέσα των πλευρών του $AB$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα.**

**α. Θεωρούμε τυχαίο σημείο $M$ στο εσωτερικό του τριγώνου και $\Delta$, $E$ τα συμμετρικά του $M$ ως προς $K$ και $\Lambda$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $\Delta E // B\Gamma$ .**

**β. Στην περίπτωση που το σημείο $M$ είναι το μέσο της πλευράς $B\Gamma$, και $\Delta$, $E$ τα συμμετρικά του $M$ ως προς $K$ και $\Lambda$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι τα σημεία $\Delta$, $A$ και $E$ είναι συνευθειακά.**

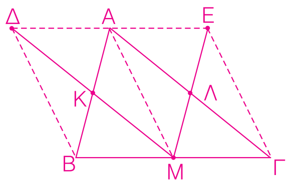
**Λύση**

**α.** Τα $K$, $\Lambda$ είναι τα μέσα των πλευρών:




- ΑΒ, ΑΓ στο τρίγωνο $AB\Gamma$ οπότε $K\Lambda // B\Gamma$
- ΜΔ, ΜΕ στο τρίγωνο $M\Delta E$, οπότε $K\Lambda // \Delta E$

Άρα $\Delta E // B\Gamma$ .




**β.** • Επειδή $KA = KB$ και $KM = K\Delta$ το $\Delta AMB$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε $A\Delta // B\Gamma$ .

- Επειδή $M\Lambda = \Lambda E$ και $\Lambda\Gamma = \Lambda A$ το ΑΕΓΜ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε $AE // B\Gamma$ .

Από ο Α διέρχεται μοναδική ευθεία παράλληλη στη ΒΓ, άρα τα $\Delta$, $A$, $E$ είναι συνευθειακά.

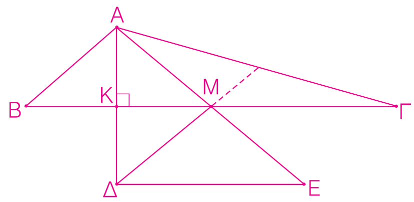
## 251 Θέμα 4 - 1873

**Έστω τρίγωνο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ με διάμεσο $AM$ τέτοια ώστε $AM = AB$ .**

**Φέρουμε το ύψος του $AK$ και το προεκτείνουμε (προς το $K$) κατά τμήμα $K\Delta = AK$ .**

**Προεκτείνουμε τη διάμεσο $AM$ (προς το $M$) κατά τμήμα $ME = AM$ .**

**Να αποδείξετε ότι:**



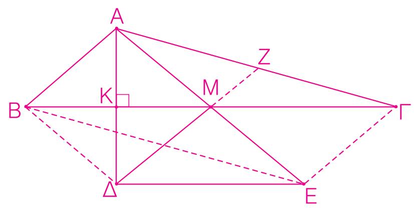

**α. $\Delta E \perp A\Delta$ και $\Delta E = 2KM$**

**β. Το τετράπλευρο $ABE\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο.**

**γ. Το τετράπλευρο $AB\Delta M$ είναι ρόμβος.**

**δ. Η προέκταση της $\Delta M$ τέμνει το $A\Gamma$ στο μέσον του $Z$ .**

**Λύση**




**α.** Στο τρίγωνο ΑΔΕ, τα $K$, $M$ είναι τα μέσα των $A\Delta$, $AE$, οπότε $KM // \Delta E$ και $KM = \dfrac{\Delta E}{2} \Leftrightarrow \Delta E = 2KM$.

Είναι $KM // \Delta E$ και $KM \perp A\Delta$ , άρα $\Delta E \perp A\Delta$ .

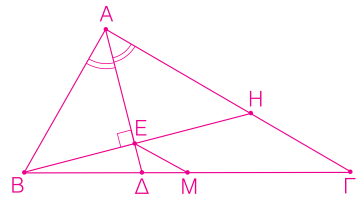
**β.** Επειδή $MA = ME$ και $MB = M\Gamma$ , το $ABE\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο.

**γ.** Είναι $AB = AM$ , οπότε το $\overset{\Delta}{ABM}$ είναι ισοσκελές και επειδή το $AK$ είναι ύψος θα είναι και διάμεσος.

Επειδή $KB = KM$ και $KA = K\Delta$ , το $AM\Delta B$ είναι παραλληλόγραμμο και αφού επιπλέον είναι $A\Delta \perp BM$ είναι ρόμβος.

**δ.** Στο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ το $M$ είναι το μέσο της $B\Gamma$ και η $\Delta M // AB$ , οπότε τέμνει την $A\Gamma$ στο μέσο της $Z$ .

## 252 Θέμα 4 - 1723




**Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ $(ΑΒ<ΒΓ)$ και η διχοτόμος του $ΑΔ$. Φέρουμε από το $Β$ κάθετη στην $ΑΔ$ που τέμνει την $ΑΔ$ στο $Ε$ και την πλευρά $ΑΓ$ στο $Η$. Αν $Μ$ είναι το μέσο της πλευράς $ΒΓ$, να αποδείξετε ότι:**

**α. Το τρίγωνο $ΑΒΗ$ είναι ισοσκελές.**

**β. $ΕΜ//ΗΓ$** **γ. $ΕΜ=\dfrac{ΑΓ-ΑΒ}{2}$**

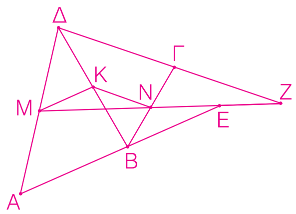
**Λύση**

**α.** Το $\overset{\Delta}{ΑΒΗ}$ είναι ισοσκελές, αφού η $ΑΕ$ είναι διχοτόμος και ύψος.

**β.** Επειδή το $\overset{\Delta}{ΑΒΗ}$ είναι ισοσκελές και η $ΑΕ$ είναι διχοτόμος, θα είναι και διάμεσος, οπότε το $Ε$ είναι μέσο του $ΒΗ$. Στο $\overset{\Delta}{ΒΗΓ}$ τα $Ε$, $Μ$ είναι τα μέσα των $ΒΗ$, $ΒΓ$, επομένως $ΕΜ//ΗΓ$.

**γ.** Στο $\overset{\Delta}{ΒΗΓ}$ τα $Ε$, $Μ$ είναι τα μέσα των $ΒΗ$, $ΒΓ$, οπότε $ΕΜ=\dfrac{ΗΓ}{2}=\dfrac{ΑΓ-ΑΗ}{2}=\dfrac{ΑΓ-ΑΒ}{2}$.

## 253 Θέμα 4 - 1804




**Δίνεται τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ με $ΑΒ=ΓΔ$ και $Μ$, $Ν$, $Κ$ τα μέσα των $ΑΔ$, $ΒΓ$, $ΒΔ$ αντίστοιχα. Αν οι προεκτάσεις των $ΑΒ$ και $ΔΓ$ τέμνουν την προέκταση της $ΜΝ$ στα σημεία $Ε$ και $Ζ$ αντίστοιχα να αποδείξετε ότι:**

**α. $ΜΚ=ΚΝ$** **β. $Μ\hat{Ε}Α=Μ\hat{Ζ}Δ$**

**Λύση**

**α.** • Στο τρίγωνο $ΔΑΒ$ τα $Μ, Κ$ είναι τα μέσα των $ΑΔ, ΔΒ$, οπότε $ΜΚ=\dfrac{ΑΒ}{2}$.

• Στο τρίγωνο $ΒΔΓ$ τα $Κ, Ν$ είναι τα μέσα των $ΔΒ, ΒΓ$, οπότε και $ΚΝ=\dfrac{ΓΔ}{2}$.

Άρα $ΜΚ=ΚΝ$, αφού $ΑΒ=ΓΔ$.

**β.** Από το **α.** ερώτημα είναι $ΜΚ//ΑΒ$ και $ΚΝ//ΔΖ$.

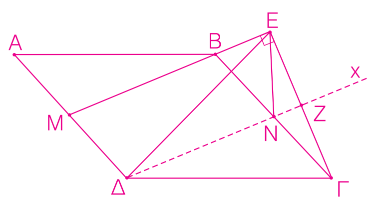
Επειδή $ΚΜ=ΚΝ$ έχουμε $Κ\hat{Μ}Ν=Κ\hat{Ν}Μ$.

Είναι: • $Μ\hat{Ε}Α=Κ\hat{Μ}Ν$ ως εντός εναλλάξ

• $Μ\hat{Ζ}Δ=Κ\hat{Ν}Μ$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη

Άρα $Μ\hat{Ε}Α=Μ\hat{Ζ}Δ$.

## 254 Θέμα 4 - 1775




**Δίνεται παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$. Θεωρούμε το μέσο $Μ$ της πλευράς $ΑΔ$ και $ΓΕ$ κάθετος από τη κορυφή $Γ$ στην ευθεία $ΜΒ$ $(ΓΕ\perp ΜΒ)$.**
**Η παράλληλη από την κορυφή $Δ$ στην ευθεία $ΜΒ$ $(Δx//ΜΒ)$ τέμνει τις $ΒΓ$ και $ΓΕ$ στα σημεία $Ν$, $Ζ$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:**

**α. Το τετράπλευρο $ΜΒΝΔ$ είναι παραλληλόγραμμο.**

**β. Το σημείο $Ζ$ είναι μέσον του ευθυγράμμου τμήματος $ΓΕ$.**

**γ. $ΔΕ=ΔΓ$**

**Λύση**

**α.** Είναι $ΔΝ//ΜΒ$ και $ΜΔ//ΒΝ$, οπότε το $ΜΒΝΔ$ είναι παραλληλόγραμμο.

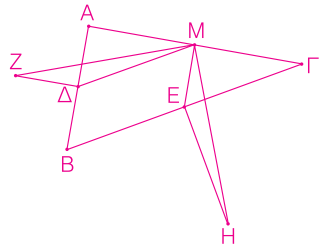
**β.** Είναι $ΒΝ=ΜΔ=\dfrac{ΑΔ}{2}=\dfrac{ΒΓ}{2}$, οπότε το $Ν$ είναι το μέσο του $ΒΓ$.

Στο τρίγωνο $ΒΕΓ$ το Ν είναι μέσο της $ΒΓ$ και $ΝΖ//ΒΕ$, οπότε το $Ζ$ είναι το μέσο του $ΓΕ$.

**γ.** Είναι $ΔΖ//ΜΕ$ και $ΜΕ \perp ΕΓ$, άρα $ΔΖ \perp ΕΓ$.

Στο τρίγωνο $ΔΕΓ$ το $ΔΖ$ είναι ύψος και διάμεσος, οπότε το τρίγωνο $ΔΕΓ$ είναι ισοσκελές με $ΔΕ = ΔΓ$.

## 255 Θέμα 4 - 1832




**Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ με γωνίες $Β$ και $Γ$ οξείες και $Δ$, $Μ$ και $Ε$ τα μέσα των πλευρών του $ΑΒ$, $ΑΓ$ και $ΒΓ$ αντίστοιχα. Στις μεσοκάθετες των $ΑΒ$ και $ΒΓ$ και εκτός του τριγώνου $ΑΒΓ$ θεωρούμε σημεία $Ζ$ και $Η$ αντίστοιχα, τέτοια ώστε $ΔΖ = \frac{ΑΒ}{2}$ και $ΕΗ = \frac{ΒΓ}{2}$.**

**α. Να αποδείξετε ότι:**

**i. Το τετράπλευρο $ΒΔΜΕ$ είναι παραλληλόγραμμο.**

**ii. Τα τρίγωνα $ΖΔΜ$ και $ΕΜΗ$ είναι ίσα.**

**β. Αν τα σημεία $Ζ$, $Δ$, $Ε$ είναι συνευθειακά, να αποδείξετε ότι η γωνία $\hat{Α} = 90^{o}$.**

**Λύση**

**α. i.** Στο $\overset{\Delta}{ΑΒΓ}$ τα $Δ$, $Μ$ είναι τα μέσα των $ΑΒ$, $ΑΓ$, οπότε $ΔΜ // = \frac{ΒΓ}{2} \Rightarrow ΔΜ // = ΒΕ$.

Άρα το $ΒΔΜΕ$ είναι παραλληλόγραμμο.

**ii.** Επειδή το $ΒΔΜΕ$ είναι παραλληλόγραμμο, προκύπτει $ΔΒ = ΜΕ$, $ΔΜ = ΒΕ$.

Είναι $Α\hat{Δ}Μ = \hat{Β} = Γ\hat{Ε}Μ$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά.

Έχουμε:
- $ΖΔ = \frac{ΑΒ}{2} = ΔΒ = ΜΕ$
- $ΕΗ = \frac{ΒΓ}{2} = ΒΕ = ΔΜ$.

Τα τρίγωνα $ΖΔΜ$ και $ΕΜΗ$ έχουν:
- $ΖΔ = ΜΕ$
- $ΔΜ = ΕΗ$
- $Ζ\hat{Δ}Μ = Μ\hat{Ε}Η = 90^{o} + \hat{Β}$.

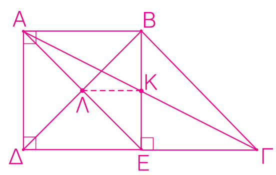
Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ).

**β.** Αν τα σημεία $Ζ$, $Δ$, $Ε$ είναι συνευθειακά, τότε $ΔΕ \perp ΑΒ$.

Στο $\overset{\Delta}{ΑΒΓ}$ τα $Δ$, $Ε$ είναι τα μέσα των $ΑΒ$, $ΒΓ$, οπότε $ΔΕ // ΑΓ$.

Άρα $ΓΑ \perp ΑΒ$, οπότε $\hat{Α} = 90^{o}$.

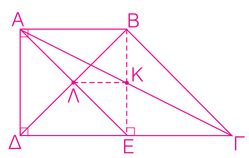
## 256 Θέμα 4 - 1727




**Δίνεται τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ με $\hat{Α} = \hat{Δ} = 90^{o}$, $ΔΓ = 2ΑΒ$ και $\hat{Β} = 3\hat{Γ}$. Από το $Β$ φέρνουμε κάθετη στη $ΓΔ$ που τέμνει την $ΑΓ$ στο σημείο $Κ$ και την $ΓΔ$ στο $Ε$. Επίσης φέρνουμε την $ΑΕ$ που τέμνει τη $ΒΔ$ στο σημείο $Λ$. Να αποδείξετε ότι:**

**α.** $\hat{Γ} = 45^{o}$ **β.** $ΒΔ = ΑΕ$ **γ.** $ΚΛ = \frac{1}{4}ΔΓ$

**Λύση**




**α.** Οι γωνίες $\hat{Β}$, $\hat{Γ}$ είναι εντός και επί τα αυτά, οπότε

$\hat{Β} + \hat{Γ} = 180^{o} \Leftrightarrow 3\hat{Γ} + \hat{Γ} = 180^{o} \Leftrightarrow 4\hat{Γ} = 180^{o} \Leftrightarrow \hat{Γ} = 45^{o}$.

**β.** Το $ΑΒΕΔ$ έχει τρεις γωνίες ορθές $\hat{Α} = \hat{Δ} = \hat{Ε} = 90^{o}$, οπότε είναι ορθογώνιο.

Άρα $ΒΔ = ΑΕ$.

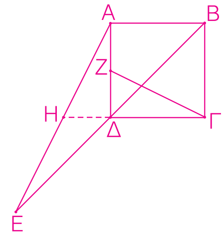
**γ.** Το $ΑΒΕΔ$ είναι ορθογώνιο, άρα $ΔΕ = ΑΒ$.

Έχουμε $ΔΓ = 2ΑΒ \Leftrightarrow ΔΓ = 2ΔΕ$, άρα το $Ε$ είναι το μέσο του $ΓΔ$, οπότε $ΑΒ = ΔΕ = ΕΓ$.

Αφού $AB//=E\Gamma$, το $AB\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε το $K$ είναι το μέσο της διαγωνίου του $A\Gamma$.
Επειδή το $ABE\Delta$ είναι ορθογώνιο, το $\Lambda$ είναι το μέσο της διαγωνίου του $AE$.
Στο $\overset{\Delta}{AE\Gamma}$ τα $K, \Lambda$ είναι μέσα των $A\Gamma$, $AE$ οπότε $K\Lambda = \frac{1}{2}E\Gamma = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\Delta = \frac{1}{4}\Gamma\Delta$.

## 257 Θέμα 4 - 1766

**Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$. Έστω $E$ το συμμετρικό σημείο του $B$ ως προς το $\Delta$ και $Z$ είναι το μέσο της $A\Delta$. Η προέκταση της $\Gamma\Delta$ τέμνει την $AE$ στο $H$. Να αποδείξετε ότι:**




**α.** $\Delta H = \frac{AB}{2}$

**β. Τα τρίγωνα $A\Delta H$ και $Z\Delta\Gamma$ είναι ίσα.**

**γ. Η $\Gamma Z$ είναι κάθετη στην $AE$.**

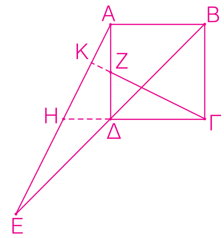
**Λύση**

**α.** Στο τρίγωνο $EAB$ το $\Delta$ είναι το μέσο του $BE$ και $\Delta H // AB$, οπότε το Η είναι μέσο του ΑΕ, άρα $\Delta H = \frac{AB}{2}$.

**β.** Τα ορθογώνια τρίγωνα $A\Delta H$ και $Z\Delta\Gamma$ έχουν:
- $A\Delta = \Gamma\Delta$
- $H\Delta = Z\Delta$, ως μισά ίσων τμημάτων

Οπότε είναι ίσα.

**γ.** Αν η $\Gamma Z$ τέμνει την $AE$ στο $K$, αρκεί να δείξουμε ότι




$A\hat{K}Z = 90^\circ \Leftrightarrow A\hat{Z}K + Z\hat{A}K = 90^\circ$.

Επειδή τα τρίγωνα $A\Delta H$, $Z\Delta\Gamma$ είναι ίσα έχουμε $Z\hat{A}K = Z\hat{\Gamma}\Delta$.

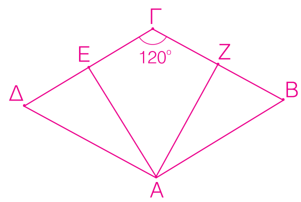
Είναι $A\hat{Z}K = \Delta\hat{Z}\Gamma$, ως κατακορυφήν.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta Z\Gamma$ είναι $\Delta\hat{Z}\Gamma + Z\hat{\Gamma}\Delta = 90^\circ \Leftrightarrow A\hat{Z}K + Z\hat{A}K = 90^\circ$.

## 258 Θέμα 4 - 1743

**Δίνεται ρόμβος $AB\Gamma\Delta$ με $\hat{\Gamma} = 120^\circ$.**

**Έστω ότι $AE$ και $AZ$ είναι οι αποστάσεις του σημείου $A$ στις πλευρές $\Gamma\Delta$ και $\Gamma B$ αντίστοιχα.**




**α. Να αποδείξετε ότι:**

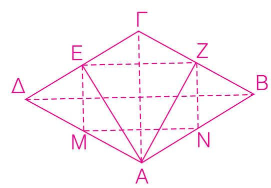
**i. Τα σημεία $E$ και $Z$ είναι τα μέσα των πλευρών $\Gamma\Delta$ και $\Gamma B$ αντίστοιχα.**

**ii. $A\Gamma \perp EZ$**

**β Αν $M$ και $N$ τα μέσα των πλευρών $A\Delta$ και $AB$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $EMNZ$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.**

**Λύση**

**α. i.** Επειδή οι διαγώνιοι του ρόμβου διχοτομούν τις γωνίες του, είναι $E\hat{\Gamma}A = A\hat{\Gamma}Z = 60^\circ$.




Τα τρίγωνα $A\Gamma\Delta$ και $AB\Gamma$ είναι ισοσκελή και έχουν μία γωνία $60^\circ$, άρα είναι ισόπλευρα.
Τα ύψη $AE$, $AZ$ στα ισόπλευρα τρίγωνα είναι και διάμεσοί του, οπότε τα σημεία $E$ και $Z$ είναι τα μέσα των πλευρών $\Gamma\Delta$ και $\Gamma B$ αντίστοιχα.

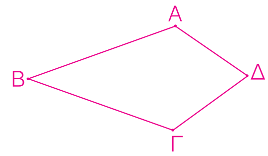
**ii.** Στο τρίγωνο $\Gamma B\Delta$ τα $E$, $Z$ είναι τα μέσα των $\Gamma\Delta$, $\Gamma B$, οπότε $EZ // B\Delta$.
Είναι $B\Delta \perp A\Gamma$, άρα $A\Gamma \perp EZ$.

**β.** Επειδή τα $E$, $Z$, $M$, $N$ είναι τα μέσα των πλευρών του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$, το $EMNZ$ είναι παραλληλόγραμμο. Στο τρίγωνο $\Delta\Gamma A$ τα $E$, $M$ είναι τα μέσα των $\Delta\Gamma$, $\Delta A$ οπότε $EM // \Gamma A$.

Αφού $\Gamma A \perp EZ$ έχουμε $EM \perp EZ$, επομένως $M\hat{E}Z = 90^\circ$, οπότε το $EMNZ$ είναι ορθογώνιο.

## 259 Θέμα 4 - 1745

**Δίνεται κυρτό τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ με $ΒΑ = ΒΓ$ και $\hat{Α} = \hat{Γ}$ . Να αποδείξτε ότι:**

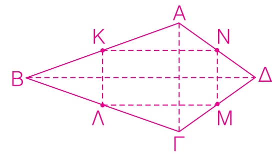



**α. Το τρίγωνο $ΑΔΓ$ είναι ισοσκελές.**

**β. Οι διαγώνιοι του τετράπλευρου $ΑΒΓΔ$ τέμνονται κάθετα.**

**γ. Το τετράπλευρο που έχει για κορυφές τα μέσα των πλευρών του $ΑΒΓΔ$ είναι ορθογώνιο.**

**Λύση**




**α.** Επειδή $ΒΑ = ΒΓ$ έχουμε $Β\hat{Α}Γ = Β\hat{Γ}Α$ .

Είναι $\hat{Α} = \hat{Γ}$ οπότε $Δ\hat{Α}Γ = Δ\hat{Γ}Α$ ως διαφορές ίσων γωνιών.

Άρα το $\overset{\triangle}{ΔΑΓ}$ είναι ισοσκελές.

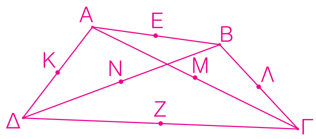
**β.** Είναι $ΒΑ = ΒΓ$ και $ΔΑ = ΔΓ$ , αφού το τρίγωνο $ΔΑΓ$ είναι ισοσκελές.
Οπότε η $ΒΔ$ είναι η μεσοκάθετος του $ΑΓ$ , άρα $ΑΓ \perp ΒΔ$ .

**γ.** Αν $Κ$ , $Λ$ , $Μ$ , $Ν$ τα μέσα των $ΑΒ$ , $ΒΓ$ , $ΓΔ$ , $ΔΑ$ , τότε
το $ΚΛΜΝ$ είναι παραλληλόγραμμο.

Επειδή $ΚΛ // ΑΓ$ , οπότε $ΚΝ // ΒΔ$ και $ΑΓ \perp ΒΔ$ είναι $ΚΛ \perp ΚΝ$ , οπότε $Λ\hat{Κ}Ν = 90^o$ .
Άρα το $ΚΛΜΝ$ είναι ορθογώνιο.

## 260 Θέμα 4 - 1773

**Δίνεται τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ με $ΑΔ = ΒΓ$ . Αν $Ε , Λ , Ζ , Κ , Ν , Μ$ είναι τα μέσα των $ΑΒ$ , $ΒΓ$ , $ΓΔ$ , $ΔΑ$ , $ΔΒ$ και $ΑΓ$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:**




**α. Το τετράπλευρο $ΕΜΖΝ$ ρόμβος.**

**β. Η $ΕΖ$ είναι μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος $ΜΝ$ .**

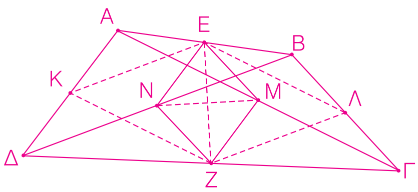
**γ. $ΚΕ = ΖΛ$**

**δ. Τα ευθύγραμμα τμήματα $ΚΛ$ , $ΜΝ$ , $ΕΖ$ διέρχονται από ίδιο σημείο.**

**Λύση**

**α.** Στα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΒΓΔ$ , τα $Ε$ , $Μ$ και $Ν$, $Ζ$ είναι τα μέσα πλευρών τους αντίστοιχα.

Οπότε $ΕΜ // = \frac{ΒΓ}{2}$ και $ΝΖ // = \frac{ΒΓ}{2}$ , άρα $ΕΜ // = ΝΖ$ .




Επομένως το $ΕΜΖΝ$ είναι παραλληλόγραμμο.

Στο $\overset{\triangle}{ΒΑΔ}$ τα Ε, Ν είναι μέσα των ΑΒ, ΒΔ άρα $ΕΝ = \frac{ΑΔ}{2} = \frac{ΒΓ}{2} = ΝΖ$ .

Επομένως το $ΕΜΖΝ$ είναι ρόμβος.

**β.** Επειδή το $ΕΜΖΝ$ είναι ρόμβος, οι διαγώνιοί του διχοτομούνται και τέμνονται κάθετα, οπότε η $ΕΖ$ είναι η μεσοκάθετος του $ΜΝ$ .

**γ.** Επειδή τα $Κ$ , $Ε$ , $Λ$ , $Ζ$ είναι τα μέσα των πλευρών του $ΑΒΓΔ$ , το $ΚΕΛΖ$ είναι παραλληλόγραμμο. Οπότε έχουμε $ΚΕ = ΛΖ$ .

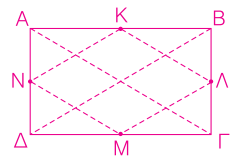
**δ.** Έστω $Ο$ το σημείο τομής των διαγωνίων $ΚΛ$ , $ΕΖ$ του παραλληλογράμμου $ΚΕΛΖ$ .
Επειδή το $ΕΜΖΝ$ είναι ρόμβος η διαγώνιος $ΜΝ$ θα διέρχεται από το μέσο $Ο$ του $ΕΖ$, που διέρχεται και η $ΚΛ$.
Άρα τα $ΚΛ$ , $ΜΝ$ , $ΕΖ$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

## 261 Θέμα 4 - 1794

**α. Σε ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ θεωρούμε $K$, $\Lambda$, $M$, $N$ τα μέσα των πλευρών του $AB$, $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, $\Delta A$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $K\Lambda MN$ είναι ρόμβος.**

**β. Σε ένα τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ τα μέσα $K$, $\Lambda$, $M$, $N$ των πλευρών του $AB$, $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, $\Delta A$ αντίστοιχα είναι κορυφές ρόμβου. Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$, πρέπει να είναι απαραίτητα ορθογώνιο; Να αιτιολογήσετε πλήρως τη θετική ή αρνητική απάντηση σας.**

**Λύση**




**α.** Αφού $K$, $\Lambda$, $M$, $N$ είναι τα μέσα των πλευρών $AB$, $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, $\Delta A$ έχουμε:
$K\Lambda \,//\!= \dfrac{A\Gamma}{2}$, $\Lambda M \,//\!= \dfrac{B\Delta}{2}$ και $MN \,//\!= \dfrac{A\Gamma}{2}$.

Οπότε $K\Lambda \,//\!= MN$, άρα το $K\Lambda MN$ είναι παραλληλόγραμμο.

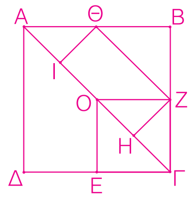
Είναι $A\Gamma = B\Delta \Leftrightarrow \dfrac{A\Gamma}{2} = \dfrac{B\Delta}{2} \Leftrightarrow K\Lambda = \Lambda M$.

Άρα το παραλληλόγραμμο $K\Lambda MN$ είναι ρόμβος.

**β.** Για να είναι το $K\Lambda MN$ ρόμβος, αρκεί $K\Lambda = \Lambda M \Leftrightarrow \dfrac{A\Gamma}{2} = \dfrac{B\Delta}{2} \Leftrightarrow A\Gamma = B\Delta$.

Άρα αρκεί το τετράπλευρο να έχει ίσες διαγώνιες

## 262 Θέμα 4 - 1781




**Δίνεται το τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$. Στη διαγώνιο $A\Gamma$ θεωρούμε σημεία I, O, H ώστε $AI = IO = OH = H\Gamma$. Αν $E$, $\Theta$ και $Z$ τα μέσα των πλευρών $\Delta\Gamma$, $AB$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα να αποδείξετε ότι:**

**α. Το τετράπλευρο $OZ\Gamma E$ είναι τετράγωνο.**

**β. $ZH = \dfrac{A\Gamma}{4}$**

**γ. Το τετράπλευρο $I\Theta ZH$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, με $\Theta Z = 2\Theta I$.**

**Λύση**

**α.** Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ τα $O$, $Z$ είναι τα μέσα των $A\Gamma$, $B\Gamma$, οπότε $OZ // AB$, άρα $OZ \perp B\Gamma$.
Στο τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ τα O, E είναι τα μέσα των $A\Gamma$, $\Gamma\Delta$, οπότε $OE // A\Delta$, άρα $OE \perp \Gamma\Delta$.
Επειδή το $OZ\Gamma E$ έχει τρεις γωνίες ορθές είναι ορθογώνιο. Επιπλέον είναι $\Gamma Z = \Gamma E$, ως μισά ίσων τμημάτων, οπότε το $OZ\Gamma E$ είναι τετράγωνο.

**β.** Στο τετράγωνο $OZ\Gamma E$ το $H$ είναι το κέντρο του, οπότε

$$ZH = \frac{1}{2}EZ = \frac{1}{2}O\Gamma = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}A\Gamma = \frac{A\Gamma}{4}.$$

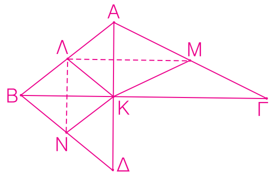
**γ.** Στο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ τα Θ, Z είναι τα μέσα των $AB$, $B\Gamma$, οπότε $\Theta Z \,//\!= \dfrac{A\Gamma}{2} \Rightarrow \Theta Z \,//\!= IH$.

Άρα το $I\Theta ZH$ είναι παραλληλόγραμμο
Στο ισοσκελές τρίγωνο $ZO\Gamma$, η $ZH$ είναι διάμεσος οπότε είναι και ύψος, άρα $Z\widehat{H}O = 90^\circ$.
Επομένως το $I\Theta ZH$ είναι ορθογώνιο.

Στο τετράγωνο $OZ\Gamma E$ έχουμε $ZH = \dfrac{O\Gamma}{2} \Rightarrow \Theta I = \dfrac{IH}{2} \Rightarrow \Theta I = \dfrac{\Theta Z}{2} \Rightarrow \Theta Z = 2\Theta I$.

Έχουμε $ZH = \dfrac{O\Gamma}{2} = \dfrac{A\Gamma}{4}$.

## 263 Θέμα 4 - 1858




**Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ . Στην προέκταση του ύψους του ΑΚ θεωρούμε σημείο Δ ώστε ΑΚ = ΚΔ . Έστω Λ , Μ , Ν τα μέσα των πλευρών ΑΒ , ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:**

α. **Το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές.**

β. **Το τετράπλευρο ΒΛΚΝ είναι ρόμβος.**

γ. **$ΛΜ \perp ΛΝ$**

**Λύση**

α. Στο τρίγωνο ΑΒΔ το ΒΚ είναι ύψος και διάμεσος. Άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές με $ΒΑ = ΒΔ$ .

β. Στο τρίγωνο ΑΒΔ , τα Λ , Κ , Ν είναι τα μέσα των ΑΒ , ΑΔ, ΒΔ .

Οπότε $ΛΚ = \frac{ΒΔ}{2} = ΒΝ$ και $ΚΝ = \frac{ΑΒ}{2} = ΛΒ$ .

Είναι $ΒΑ = ΒΔ \Leftrightarrow \frac{ΒΑ}{2} = \frac{ΒΔ}{2} \Leftrightarrow ΒΛ = ΒΝ$ .

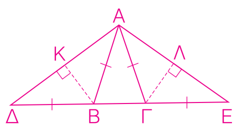
Άρα $ΒΝ = ΒΛ = ΛΚ = ΚΝ$ , οπότε το ΒΛΚΝ είναι ρόμβος.

γ. • Στο $\overset{\Delta}{ΑΒΔ}$ , τα Λ , Ν είναι τα μέσα των ΑΒ , ΒΔ , οπότε $ΛΝ // ΑΔ$ .

• Στο $\overset{\Delta}{ΑΒΓ}$ , τα Λ , Μ είναι τα μέσα των ΑΒ , ΑΓ , οπότε $ΛΜ // ΒΓ$ .

Επειδή $ΑΔ \perp ΒΓ$ , είναι $ΛΜ \perp ΛΝ$ .

## 264 Θέμα 4 - 1616




**Θεωρούμε ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΔ με $ΑΒ = ΒΔ = 5$ και ΑΓΕ με $ΑΓ = ΓΕ = 5$ έτσι ώστε τα σημεία Δ , Β , Γ και Ε να είναι συνευθειακά. Θεωρούμε τα ύψη τους ΒΚ και ΓΛ αντίστοιχα.**

α. **Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα.**

β. **Να αποδείξετε ότι τα σημεία Κ και Λ είναι τα μέσα των τμημάτων ΑΔ και ΑΕ αντίστοιχα.**

γ. **Αν η περίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ είναι 12, να υπολογίσετε το τμήμα ΚΛ .**

**Λύση**

α. Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ έχουν:

- $ΑΒ = ΑΓ = 5$
- $ΒΔ = ΓΕ = 5$
- $Α\hat{Β}Δ = Α\hat{Γ}Ε$ , ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $\hat{Β}$ και $\hat{Γ}$ .

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ).

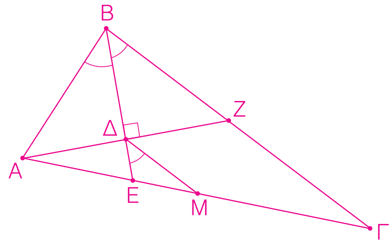
β. Επειδή τα τρίγωνα ΒΑΔ , ΑΓΕ είναι ισοσκελή και τα ΒΚ , ΓΛ είναι ύψη τους αντίστοιχα θα είναι και διάμεσοι, οπότε τα Κ , Λ είναι μέσα των ΑΔ , ΑΕ .

γ. Στο τρίγωνο ΑΔΕ τα Κ , Λ είναι μέσα των ΑΔ , ΑΕ , άρα έχουμε

$$ΚΛ = \frac{ΔΕ}{2} = \frac{ΔΒ + ΒΓ + ΓΕ}{2} = \frac{ΑΒ + ΒΓ + ΑΓ}{2} = \frac{Π_{ΑΒΓ}}{2} = \frac{12}{2} = 6 .$$

## 265 Θέμα 4 - 1837

**Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $ΑΒ < ΑΓ$ και η διχοτόμος $ΒΕ$ της γωνίας $\hat{Β}$. Αν $ΑΖ \perp ΒΕ$, όπου $Ζ$ σημείο της $ΒΓ$ και $Μ$ το μέσο της $ΑΓ$, να αποδείξετε ότι:**




**α. Το τρίγωνο $ΑΒΖ$ είναι ισοσκελές.**

**β. $ΔΜ // ΒΓ$ και $ΔΜ = \dfrac{ΒΓ - ΑΒ}{2}$**

**γ. $Ε\hat{Δ}Μ = \dfrac{\hat{Β}}{2}$, όπου $\hat{Β}$ η γωνία του τριγώνου $ΑΒΓ$.**

**Λύση**

**α.** Στο τρίγωνο $ΑΒΖ$ το $ΒΔ$ είναι διχοτόμος και ύψος, οπότε το $\overset{\triangle}{ΑΒΖ}$ είναι ισοσκελές με $ΒΑ = ΒΖ$.

**β.** • Στο ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΖ$ η διχοτόμος του $ΒΔ$ είναι και διάμεσος, οπότε το $Δ$ είναι μέσο του $ΑΖ$.
- Στο τρίγωνο $ΑΖΓ$ τα $Δ$, $Μ$ είναι τα μέσα των $ΑΖ$, $ΑΓ$, οπότε:
- $ΔΜ // ΒΓ$
- $ΔΜ = \dfrac{ΓΖ}{2} = \dfrac{ΒΓ - ΒΖ}{2} = \dfrac{ΒΓ - ΑΒ}{2}$

**γ.** Επειδή $ΔΜ // ΒΓ$, έχουμε $Ε\hat{Δ}Μ = Ε\hat{Β}Γ = \dfrac{\hat{Β}}{2}$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά.

## 266 Θέμα 4 - 13856

**Σε τρίγωνο ΔΕΖ, φέρουμε τη διάμεσο ΔΜ και στην προέκτασή της προς το μέρος του Μ παίρνουμε σημείο Θ έτσι ώστε $ΑΜ = ΜΘ$. Προεκτείνουμε την πλευρά ΕΖ προς το Ε κατά τμήμα $ΕΑ = ΕΖ$ και προς το Ζ κατά τμήμα $ΖΓ = ΕΖ$.**

**α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΔΑΜ και ΘΓΜ είναι ίσα.**

**β. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΘΑΔΓ είναι παραλληλόγραμμο.**

**γ. Στο σχήμα της άσκησης που κατασκεύασε στο τετράδιό του ο Γιάννης είναι $ΑΔ = 12$. Πόσο θα είναι το μήκος της διαμέσου ΕΗ του τριγώνου ΔΕΖ στο σχήμα του Γιάννη;**

**Λύση**

**α.** Είναι ΜΕ = ΜΖ, και ΕΑ = ΕΖ = ΖΓ άρα:
$ΜΕ + ΕΑ = ΜΖ + ΖΓ \Leftrightarrow ΜΑ = ΜΓ$.

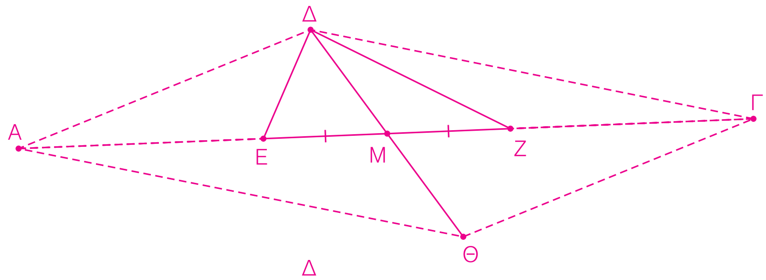
Τα τρίγωνα ΔΑΜ και ΘΓΜ έχουν:

**i.** $ΔΜ = ΜΘ$

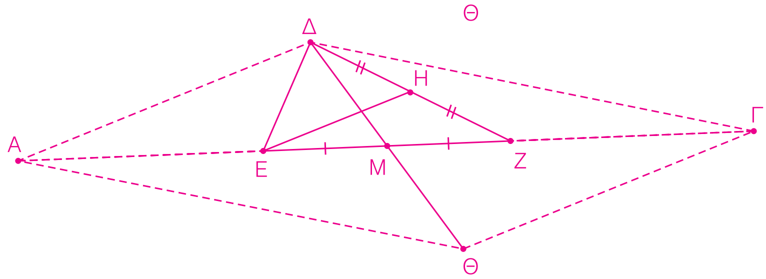
**ii.** ΜΑ = ΜΓ, ως άθροισμα ίσων τμημάτων ΜΕ + ΕΑ και ΜΖ + ΖΓ

**iii.** $Δ\widehat{Μ}Α = Θ\widehat{Μ}Γ$, ως κατακορυφήν

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ).




**β.** Το Μ είναι το μέσο του ΔΘ και του τμήματος ΑΓ οπότε στο τετράπλευρο ΘΑΔΓ οι διαγώνιοι ΔΘ και ΑΓ διχοτομούνται στο σημείο Μ.

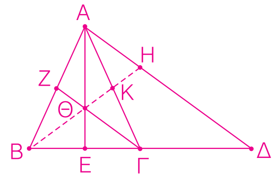



Άρα το τετράπλευρο ΘΑΔΓ είναι παραλληλόγραμμο.

**γ.** Το Η είναι το μέσο της ΔΖ, αφού η ΕΗ είναι διάμεσος. Έχουμε ΕΑ = ΕΖ, άρα το σημείο Ε είναι το μέσο της πλευράς ΑΖ. Στο τρίγωνο ΑΔΖ τα σημεία Ε και Η είναι μέσα πλευρών άρα $ΕΗ = \dfrac{ΑΔ}{2} \Leftrightarrow ΕΗ = \dfrac{12}{2} \Leftrightarrow ΕΗ = 6$. Στο σχήμα του Γιάννη η διάμεσος ΕΗ του τριγώνου ΔΕΖ θα έχει μήκος 6.

## 22. Βαρύκεντρο – Ορθόκεντρο τριγώνου

### 267 Θέμα 4 - 1878




**Έστω ισοσκελές τρίγωνο $\overset{\Delta}{ΑΒΓ}$ με $ΑΒ=ΑΓ$. Προεκτείνουμε το $ΒΓ$ (προς το $Γ$) κατά τμήμα $ΓΔ=ΒΓ$. Φέρουμε τις διαμέσους $ΑΕ$ και $ΓΖ$ του τριγώνου $\overset{\Delta}{ΑΒΓ}$ που τέμνονται στο $Θ$.**
**Το $ΒΘ$ προεκτεινόμενο, τέμνει το $ΑΓ$ στο $Κ$ και το $ΑΔ$ στο $Η$.**
**Να αποδείξετε ότι:**

**α. Το $ΖΚΓΕ$ είναι παραλληλόγραμμο.**

**β. $ΑΗ=ΘΓ$** **γ. $ΑΗ=2ΖΘ$**

**Λύση**

**α.** Επειδή το $Θ$ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου $ΑΒΓ$, η $ΒΚ$ είναι διάμεσός του.

Στο τρίγωνο $ΑΒΓ$ τα $Ζ$, $Κ$ είναι τα μέσα των $ΑΒ$, $ΑΓ$, οπότε $ΖΚ//=\frac{ΒΓ}{2} \Leftrightarrow ΖΚ//=ΕΓ$.

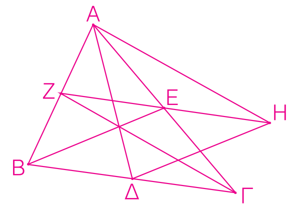
Άρα το $ΖΚΓΕ$ είναι παραλληλόγραμμο.

**β.** Στο τρίγωνο $ΑΒΔ$ τα $Γ$, $Ζ$ είναι τα μέσα των $ΒΔ$, $ΑΒ$, οπότε $ΓΖ//ΑΔ \Rightarrow ΓΘ//ΑΗ$.
Στο τρίγωνο $ΑΒΗ$ το $Ζ$ είναι το μέσο του $ΑΒ$ και $ΖΘ//ΑΗ$, οπότε $Θ$ το μέσο του $ΒΗ$.
Στο τρίγωνο $ΒΗΓ$ τα $Θ$, $Ε$ είναι μέσα των $ΒΗ$, $ΒΓ$ οπότε $ΘΕ//ΗΓ \Rightarrow ΑΘ//ΗΓ$

Επομένως το $ΑΘΓΗ$ είναι παραλληλόγραμμο, άρα $ΑΗ=ΘΓ$.

**γ.** Στο τρίγωνο $ΑΒΗ$ τα $Ζ$, $Θ$ είναι μέσα των $ΑΒ$, $ΒΗ$ οπότε $ΖΘ=\frac{ΑΗ}{2} \Leftrightarrow ΑΗ=2ΖΘ$.

### 268 Θέμα 4 - 1820




**Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ και οι διάμεσοί του $ΑΔ$, $ΒΕ$ και $ΓΖ$. Προεκτείνουμε το τμήμα $ΖΕ$ (προς το $Ε$) κατά τμήμα $ΕΗ=ΖΕ$.**
**Να αποδείξετε ότι:**

**α. Το τετράπλευρο $ΕΗΔΒ$ είναι παραλληλόγραμμο.**

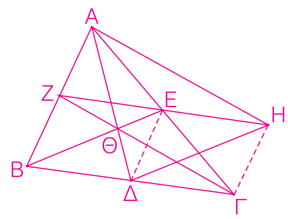
**β. Η περίμετρος του τριγώνου $ΑΔΗ$ είναι ίση με το άθροισμα των διαμέσων του τριγώνου $ΑΒΓ$.**

**γ. Οι ευθείες $ΒΕ$ και $ΔΗ$ τριχοτομούν το τμήμα $ΖΓ$.**

**Λύση**

**α.** Στο τρίγωνο $ΑΒΓ$ τα $Ζ$, $Ε$ είναι τα μέσα των $ΑΒ$, $ΑΓ$, οπότε $ΖΕ//=\frac{ΒΓ}{2} \Rightarrow ΕΗ//=ΒΔ$.

Άρα το $ΕΗΔΒ$ είναι παραλληλόγραμμο.



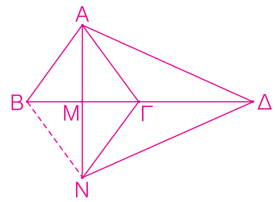

**β.** Επειδή το $ΕΗΔΒ$ είναι παραλληλόγραμμο, έχουμε $ΔΗ=ΒΕ$.

Είναι $ΕΗ=ΖΕ$ και $ΑΕ=ΕΓ$, άρα οι διαγώνιες $ΑΓ$ και $ΖΗ$ του $ΑΗΓΖ$ διχοτομούνται.
Επομένως το $ΑΗΓΖ$ είναι παραλληλόγραμμο, άρα $ΓΖ=ΑΗ$.
Είναι $Π_{ΑΔΗ}=ΑΔ+ΔΗ+ΑΗ=ΑΔ+ΒΕ+ΓΖ$.

**γ.** Αν $Θ$ το κοινό σημείο των διαμέσων στο $\overset{\Delta}{ΑΒΓ}$, και $Κ$ το σημείο τομής των $ΔΗ$, $ΓΖ$, τότε στο τρίγωνο:
- $ΖΚΗ$, το $Ε$ είναι το μέσο του $ΖΗ$ και $ΕΘ//ΚΗ$, οπότε $ΖΘ=ΘΚ$
- $ΒΘΓ$, το $Δ$ είναι το μέσο του $ΒΓ$ και $ΔΚ//ΒΘ$, οπότε $ΘΚ=ΚΓ$

Άρα $ΖΘ=ΘΚ=ΚΓ$.

## 269 Θέμα 4 - 1760




**Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και ΑΜ το ύψος του στην πλευρά ΒΓ. Στην προέκταση του ΑΜ θεωρούμε τμήμα ΜΝ = ΑΜ. Στην προέκταση του ΒΓ προς το μέρος του Γ θεωρούμε τμήμα ΓΔ = ΒΓ. Να αποδείξετε ότι:**

**α. Το τετράπλευρο ΑΒΝΓ ρόμβος.**

**β. Το τρίγωνο ΑΔΝ είναι ισοσκελές.**

**γ. Το σημείο Γ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΔΝ.**

**Λύση**

**α.** Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ το ύψος ΑΜ είναι και διάμεσος.
Επειδή ΜΑ = ΜΝ και ΜΒ = ΜΓ, το ΑΒΝΓ είναι παραλληλόγραμμο.
Αφού επιπλέον ΑΒ = ΑΓ, το ΑΒΝΓ είναι ρόμβος.

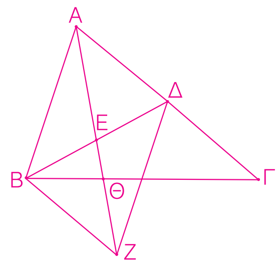
**β.** Επειδή το ΑΒΝΓ είναι ρόμβος, η ΓΜ είναι η μεσοκάθετος του ΑΝ, οπότε ΔΑ = ΔΝ.
Άρα το τρίγωνο ΑΔΝ είναι ισοσκελές.

**γ.** Στο τρίγωνο ΑΔΝ η ΔΜ είναι διάμεσος και ΓΔ = ΒΓ = 2ΓΜ.

Είναι:
- $\Gamma M = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{\Gamma\Delta}{2}$
- $\Gamma\Delta + \Gamma M = \Delta M \Leftrightarrow 2\Gamma M + \Gamma M = \Delta M \Leftrightarrow 3\Gamma M = \Delta M \Leftrightarrow \Gamma M = \frac{1}{3}\Delta M$

Οπότε $\Gamma\Delta = \frac{2}{3}\Delta M$, άρα το Γ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΔΝ.

## 270 Θέμα 4 - 1827



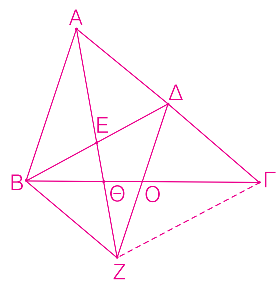

**Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Ε το μέσο της διαμέσου ΒΔ. Στην προέκταση της ΑΕ θεωρούμε σημείο Ζ τέτοιο ώστε ΕΖ = ΑΕ. Να αποδείξετε ότι:**

**α. Το τετράπλευρο ΑΒΖΔ είναι παραλληλόγραμμο.**

**β. Το τετράπλευρο ΒΔΓΖ είναι παραλληλόγραμμο.**

**γ. Το σημείο Θ είναι βαρύκεντρο του τριγώνου ΒΔΖ.**

**Λύση**




**α.** Είναι ΑΕ = ΕΖ και ΕΒ = ΕΔ, οπότε το ΑΒΖΔ είναι παραλληλόγραμμο.

**β.** Είναι ΒΖ // = ΑΔ, οπότε ΒΖ // = ΓΔ.
Άρα το ΒΔΓΖ είναι παραλληλόγραμμο.

**γ.** Αν Ο το σημείο τομής των διαγωνίων ΒΓ και ΔΖ του παραλληλογράμμου ΒΔΓΖ, τότε το Ο είναι μέσο της ΔΖ.
Οι ΒΟ, ΖΕ είναι διάμεσοι του τριγώνου ΒΔΖ, οπότε το Θ είναι το βαρύκεντρό του.

## 271 Θέμα 4 - 1706

**Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και $\mu_\beta, \mu_\gamma$ οι διάμεσοι του τριγώνου που αντιστοιχούν στις πλευρές β και γ αντίστοιχα. Δίνεται η ακόλουθη πρόταση:**

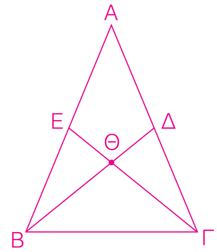
**Π: Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με β = γ, τότε οι διάμεσοι $\mu_\beta, \mu_\gamma$ είναι ίσες.**

**α. Να εξετάσετε αν ισχύει η πρόταση Π, αιτιολογώντας την απάντησή σας.**

**β. Να διατυπώσετε την αντίστροφη πρόταση της Π και να εξετάσετε αν ισχύει αιτιολογώντας την απάντησή σας.**

**γ. Στην περίπτωση που οι δυο προτάσεις, η Π και η αντίστροφή της ισχύουν, να τις διατυπώσετε ως ενιαία πρόταση.**

**Λύση**




Έστω $ΒΔ$, $ΓΕ$ οι διάμεσοι του τριγώνου $ΑΒΓ$.

**α.** Τα τρίγωνα $ΑΒΔ$ και $ΑΓΕ$ έχουν:
- $ΑΒ = ΑΓ$
- $ΑΔ = ΑΕ$
- $\widehat{Α}$ κοινή

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ), άρα $ΒΔ = ΓΕ$, δηλαδή $μ_β = μ_γ$.

Άρα η Π ισχύει.

**β.** Διατύπωση

Αν σε ένα τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι $μ_β = μ_γ$, τότε $β = γ$.

Απόδειξη

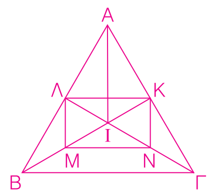
Έχουμε $μ_β = μ_γ \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}μ_β = \frac{2}{3}μ_γ \\ \frac{1}{3}μ_β = \frac{1}{3}μ_γ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ΒΘ = ΓΘ \\ ΘΔ = ΘΕ \end{cases}$

Τα τρίγωνα $ΘΒΕ$ και $ΘΓΔ$ έχουν:
- $ΒΘ = ΓΘ$
- $ΘΕ = ΘΔ$
- $Β\widehat{Θ}Ε = Γ\widehat{Θ}Δ$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ), άρα $ΒΕ = ΓΔ \Rightarrow 2ΒΕ = 2ΓΔ \Rightarrow ΑΒ = ΑΓ$, δηλαδή $β = γ$.

**γ.** Το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελές με $β = γ$ αν και μόνο αν $μ_β = μ_γ$.

## 272 Θέμα 4 - 1719




**Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $ΑΒΓ$ και τα ύψη του $ΒΚ$ και $ΓΛ$, τα οποία τέμνονται στο $Ι$. Αν τα σημεία $Μ$ και $Ν$ είναι τα μέσα των $ΙΒ$ και $ΙΓ$ αντίστοιχα, να αποδείξετε:**

**α. Το $ΑΙ$ προεκτεινόμενο διέρχεται από το μέσο της πλευράς $ΒΓ$.**

**β. Το τετράπλευρο $ΜΛΚΝ$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.**

**Λύση**

**α.** Επειδή το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισόπλευρο τα ύψη του $ΒΚ$ και $ΓΛ$ είναι διάμεσοί του, οπότε το $Ι$ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου $ΑΒΓ$.

Άρα η $ΑΙ$ θα διέρχεται από το μέσο της $ΒΓ$.

**β.** Στο τρίγωνο ΑΒΓ τα Λ, Κ είναι μέσα των ΑΒ, ΑΓ, οπότε $ΛΚ // = \frac{ΒΓ}{2}$.

Στο τρίγωνο ΙΒΓ τα Μ, Ν είναι μέσα των ΙΒ, ΙΓ οπότε $ΜΝ // = \frac{ΒΓ}{2}$.

Οπότε $ΛΚ = // ΜΝ$, άρα το ΜΛΚΝ είναι παραλληλόγραμμο.

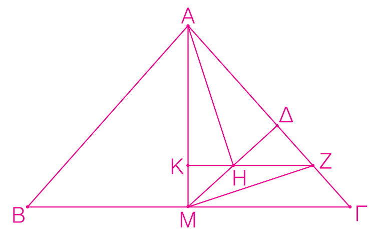
Στο τρίγωνο ΑΒΙ το ΛΜ ενώνει τα μέσα των ΑΒ και ΒΙ οπότε $ΛΜ // ΑΙ$.

Τα ΑΙ βρίσκεται στο φορέα του ύψους, άρα $ΑΙ \perp ΒΓ$ και επειδή $ΒΓ // ΛΚ$, θα είναι $ΑΙ \perp ΛΚ$.

Επομένως $ΛΜ \perp ΛΚ$, οπότε $Μ\widehat{Λ}Κ = 90^\circ$.

Άρα το $ΜΛΚΝ$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

## 273 Θέμα 4 - 1843



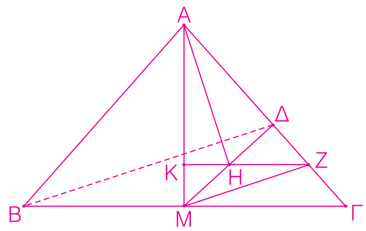

**Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $ΑΒ = ΑΓ$ και το ύψος του $ΑΜ$. Φέρουμε $ΜΔ$ κάθετη στην $ΑΓ$ και θεωρούμε $Η$ το μέσο του τμήματος $ΜΔ$. Από το $Η$ φέρουμε παράλληλη στη $ΒΓ$ η οποία τέμνει τις $ΑΜ$ και $ΑΓ$ στα σημεία $Κ$ και $Ζ$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:**

α. **$ΗΖ = \dfrac{ΒΓ}{4}$**

β. **$ΜΖ // ΒΔ$**

γ. **Η ευθεία $ΑΗ$ είναι κάθετη στη $ΒΔ$.**

**Λύση**



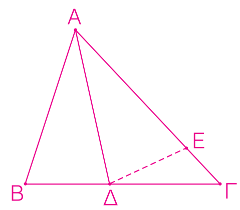

α. Στο τρίγωνο $ΜΔΓ$, το $Η$ είναι το μέσο του $ΔΜ$ και $ΗΖ // ΜΓ$, οπότε το $Ζ$ είναι μέσο του ΓΔ, άρα $ΗΖ = \dfrac{ΜΓ}{2} = \dfrac{\frac{ΒΓ}{2}}{2} = \dfrac{ΒΓ}{4}$.

β. Στο τρίγωνο $ΒΔΓ$, τα $Μ$, $Ζ$ είναι τα μέσα των $ΒΓ$, $ΔΓ$, οπότε $ΜΖ // ΒΔ$.

γ. Επειδή $ΖΚ // ΒΓ$ και $ΒΓ \perp ΑΜ$, είναι $ΖΚ \perp ΑΜ$.

Στο $\overset{\Delta}{ΑΜΖ}$ το $Η$ είναι το ορθόκεντρό του, οπότε $ΑΗ \perp ΜΖ$. Επειδή $ΑΗ \perp ΜΖ$ και $ΜΖ // ΒΔ$, έχουμε $ΑΗ \perp ΒΔ$.

## 274 Θέμα 4 - 1887



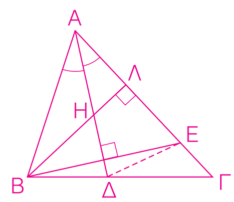

**Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $ΑΒ < ΑΓ$ και η διχοτόμος του $ΑΔ$. Στην πλευρά $ΑΓ$ θεωρούμε σημείο $Ε$ τέτοιο ώστε $ΑΕ = ΑΒ$. Να αποδείξετε ότι:**

α. **τα τρίγωνα $ΑΒΔ$ και $ΑΔΕ$ είναι ίσα.**

β. **η ευθεία $ΑΔ$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος $ΒΕ$.**

γ. **αν το ύψος από την κορυφή $Β$ του τριγώνου $ΑΒΓ$ τέμνει την $ΑΔ$ στο $Η$ τότε η ευθεία $ΕΗ$ είναι κάθετη στην $ΑΒ$.**

**Λύση**




α. Τα τρίγωνα $ΑΒΔ$ και $ΑΔΕ$ έχουν:

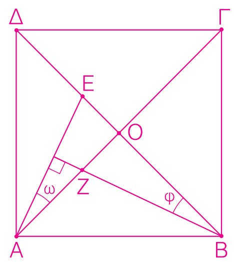
- $ΑΒ = ΑΕ$
- $ΑΔ$ κοινή
- $Β\hat{Α}Δ = Δ\hat{Α}Ε$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ).

β. Επειδή $ΑΒ = ΑΕ$ και $ΔΒ = ΔΕ$, η $ΑΔ$ είναι η μεσοκάθετος του $ΒΕ$.

γ. Στο τρίγωνο $ΑΒΕ$, το $Η$ είναι το ορθόκεντρό του, οπότε $ΕΗ \perp ΑΒ$.

## 275 Θέμα 4 - 1748




**Στο τετράγωνο $ΑΒΓΔ$ ονομάζουμε $Ο$ το κέντρο του και θεωρούμε τυχαίο σημείο $Ε$ του τμήματος $ΟΔ$. Φέρνουμε την κάθετη από το $Β$ στην $ΑΕ$, που τέμνει το τμήμα $ΑΟ$ στο $Ζ$. Να αποδείξετε ότι:**

α. **Οι γωνίες $ω$ και $φ$ του παραπάνω σχήματος είναι ίσες.**

β. **$ΒΖ = ΑΕ$ και $ΓΖ = ΒΕ$**

γ. **Το τμήμα $ΕΖ$ είναι κάθετο στο $ΑΒ$.**

**Λύση**

**α.** Οι διαγώνιοι του τετραγώνου είναι κάθετες, οπότε:

- στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΕ είναι $\hat{\omega} = 90^o - O\hat{E}A$ .
- στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΚΕ είναι $\hat{\varphi} = 90^o - O\hat{E}A$ .

Άρα $\hat{\omega} = \hat{\varphi}$ .

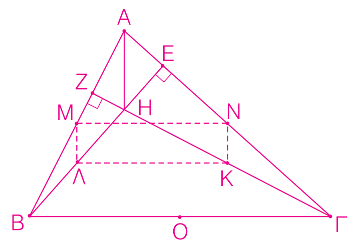
**β.** Τα ορθογώνια τρίγωνα ΟΑΕ και ΟΒΖ έχουν:

- $OA = OB$
- $\omega = \varphi$

Οπότε είναι ίσα, άρα $BZ = AE$ και $OZ = OE$ .
Επειδή $O\Gamma = OB$ και $OZ = OE$ έχουμε $OZ + O\Gamma = OE + OB \Rightarrow \Gamma Z = BE$ .

**γ.** Στο τρίγωνο ΕΑΒ τα ΒΖ και ΑΟ είναι τα ύψη του, άρα το Ζ είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΕΑΒ . Οπότε το ΕΖ είναι στο φορέα του τρίτου ύψους του τριγώνου, άρα $EZ \perp AB$ .

## 276 Θέμα 4 - 1777




**Δίνονται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, ΒΕ, ΓΖ, τα ύψη από τις κορυφές Β , Γ αντίστοιχα και Η το ορθόκεντρο του τριγώνου.**
**Επίσης δίνονται τα Μ , Ν , Κ , Λ μέσα των ευθυγράμμων τμημάτων ΑΒ , ΑΓ , ΓΗ , ΒΗ αντίστοιχα.**

**α. Να αποδείξετε ότι:**

**i.** $\mathbf{MN = \Lambda K}$

**ii.** $\mathbf{NK = M\Lambda = \dfrac{AH}{2}}$

**iii. Το τετράπλευρο ΜΝΚΛ είναι ορθογώνιο.**

**β. Αν το Ο είναι το μέσο της ΒΓ , να αποδείξετε ότι το** $\mathbf{M\hat{O}K = 90^o}$ **.**

**Λύση**

**α. i.** • Στο τρίγωνο ΑΒΓ τα Μ , Ν είναι τα μέσα των ΑΒ , ΑΓ , οπότε $MN = \dfrac{B\Gamma}{2}$ .

• Στο τρίγωνο ΗΒΓ τα Λ , Κ είναι τα μέσα των ΗΒ , ΗΓ οπότε $\Lambda K = \dfrac{B\Gamma}{2}$ . Άρα $MN = \Lambda K$ .

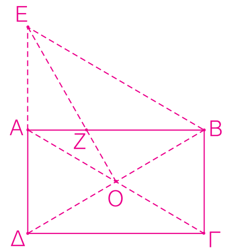
**ii.** Στα τρίγωνα ΒΑΗ και ΓΑΗ τα Μ, Λ και Ν , Κ είναι τα μέσα των πλευρών τους.
Οπότε $M\Lambda // \dfrac{AH}{2}$ και $NK // = \dfrac{AH}{2}$ . Άρα $M\Lambda = NK = \dfrac{AH}{2}$ .

**iii.** Επειδή $M\Lambda // = \dfrac{AH}{2}$ και $NK // = \dfrac{AH}{2}$ , έχουμε $M\Lambda // = NK$ , οπότε το ΜΝΚΛ είναι παραλληλόγραμμο.
Επειδή το Η είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ , έχουμε $AH \perp B\Gamma$ .
Επειδή $M\Lambda // AH$ και $AH \perp B\Gamma$ είναι $M\Lambda \perp B\Gamma$ .
Αφού $\Lambda K // B\Gamma$ , έχουμε $M\Lambda \perp MN$ , άρα $N\hat{M}\Lambda = 90^o$ . Επομένως το ΜΝΚΛ είναι ορθογώνιο.

**β.** • Στο τρίγωνο ΑΒΓ τα Μ , Ο είναι τα μέσα πλευρών του, οπότε $MO // A\Gamma$ .
• Στο τρίγωνο ΗΒΓ τα Ο , Κ είναι τα μέσα πλευρών του, οπότε $OK // BH$ .

Επειδή $BH \perp A\Gamma$ , είναι και $OK \perp MO$ , οπότε $M\hat{O}K = 90^o$ .

## 277 Θέμα 4 - 1764




**Δίνεται ορθογώνιο $ΑΒΓΔ$ με κέντρο $Ο$ και $ΑΒ > ΒΓ$ , $ΑΓ = 2ΒΓ$ .**
**Στην προέκταση της πλευράς $ΔΑ$ (προς το $Α$ ) παίρνουμε σημείο $Ε$ ώστε $ΔΑ = ΑΕ$ .**

**Να αποδείξετε ότι:**

**α. Το τετράπλευρο $ΑΕΒΓ$ είναι παραλληλόγραμμο.**

**β. Το τρίγωνο $ΕΒΔ$ είναι ισόπλευρο.**

**γ. Αν η $ΕΟ$ τέμνει την πλευρά $ΑΒ$ στο σημείο $Ζ$ , να αποδείξετε ότι $ΔΖ \perp ΕΒ$ .**

**Λύση**

**α.** Είναι $ΑΔ // = ΒΓ$ και $ΔΑ = ΑΕ$ , οπότε $ΑΕ // = ΒΓ$ , άρα το $ΑΕΒΓ$ είναι παραλληλόγραμμο.

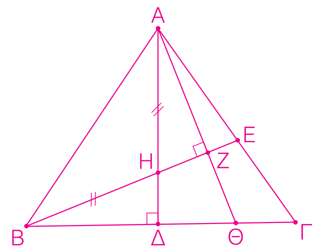
**β.** Επειδή $ΒΑ \perp ΔΕ$ και $ΔΑ = ΑΕ$ η $ΒΑ$ είναι η μεσοκάθετος του $ΕΔ$ , οπότε $ΒΔ = ΒΕ$ .

Είναι $ΑΓ = 2ΒΓ \Leftrightarrow ΒΔ = 2ΑΔ \Leftrightarrow ΒΔ = ΔΕ$ .

Οπότε $ΒΔ = ΔΕ = ΕΒ$ , άρα το τρίγωνο $ΒΕΔ$ είναι ισόπλευρο.

**γ.** Στο $\overset{\Delta}{ΕΒΔ}$ , τα $ΕΟ$ και $ΒΑ$ είναι ύψη, οπότε το $Ζ$ είναι το ορθόκεντρό του. Άρα $ΔΖ \perp ΕΒ$ .

## 278 Θέμα 4 - 1754




**Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ και το ύψος του $ΑΔ$ . Στο $ΑΔ$ θεωρούμε σημείο $Η$ τέτοιο ώστε $ΗΑ = ΗΒ$ . Έστω ότι $Ε$ είναι το σημείο τομής της $ΒΗ$ με την $ΑΓ$ . Φέρνουμε την $ΑΖ$ κάθετη στην $ΒΕ$ , η οποία τέμνει την πλευρά $ΒΓ$ στο $Θ$ .**

**α. Να αποδείξετε ότι:**

**i. Τα τρίγωνα $ΗΔΒ$ και $ΗΖΑ$ είναι ίσα.**

**ii. $ΔΘ = ΘΖ$**

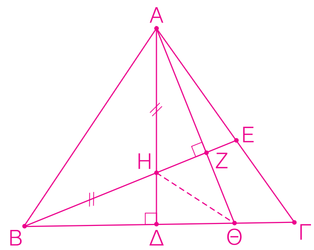
**iii. Η ευθεία $ΘΗ$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος $ΑΒ$ .**

**β. Ποιο από τα σημεία του σχήματος είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου $ΑΗΒ$ ; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.**

**Λύση**

**α. i.** Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΗΔΒ$ και $ΗΖΑ$ έχουν:
- $ΗΒ = ΗΑ$
- $Β\hat{Η}Δ = Α\hat{Η}Ζ$ .

Άρα είναι ίσα.



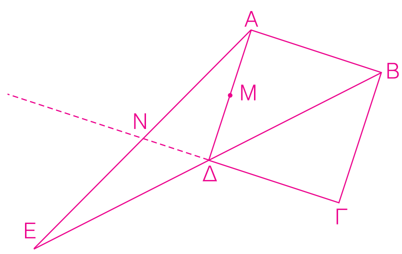

**ii.** Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΗΔΘ$ και $ΗΖΘ$ έχουν:
- $ΗΘ$ κοινή
- $ΗΔ = ΗΖ$ από το **i.** ερώτημα.

Άρα είναι ίσα, οπότε $ΔΘ = ΘΖ$ .

**iii.** Στο τρίγωνο $ΑΒΘ$ το $Η$ είναι το ορθόκεντρό του, οπότε $ΘΗ \perp ΑΒ$ και επειδή $ΗΑ = ΗΒ$ η $ΘΗ$ είναι η μεσοκάθετος του $ΑΒ$ .

**β.** Τα $ΑΖ$ και $ΒΔ$ είναι ύψη του τριγώνου $ΑΗΒ$ που τέμνονται στο $Θ$ .
Άρα το $Θ$ είναι το ορθόκεντρο του τρίγωνου $ΑΗΒ$ .

## 279 Θέμα 4 - 1780



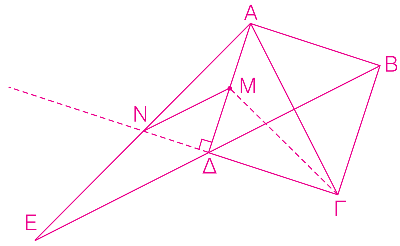

**Σε τετράγωνο $ΑΒΓΔ$ προεκτείνουμε τη διαγώνιο $ΒΔ$ (προς το $Δ$ ) κατά τμήμα $ΔΕ = ΔΒ$ . Έστω $Μ$ το μέσο της $ΑΔ$ και $Ν$ το σημείο τομής των ευθειών $ΑΕ$ και $ΓΔ$ .**

**α. Να αποδείξετε ότι $ΔΝ = ΔΜ$ .**

**β. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $ΝΜΔ$ .**

**γ. Να αποδείξετε ότι:** **i. $ΜΝ \perp ΑΓ$** **ii. $ΓΜ \perp ΑΝ$**

**Λύση**




**α.** Στο τρίγωνο $ΕΑΒ$ το $Δ$ είναι μέσο του $ΒΕ$ και $ΔΝ // ΑΒ$ .

Επομένως το $Ν$ είναι μέσο του $ΑΕ$ , οπότε $ΔΝ = \frac{ΑΒ}{2} = \frac{ΑΔ}{2} = ΔΜ$ .

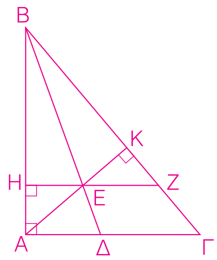
**β.** Το τρίγωνο $ΔΝΜ$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, οπότε $\hat{Δ} = 90^o$ και $Δ\widehat{Ν}Μ = Ν\widehat{Μ}Δ = 45^o$ .

**γ. i.** Στο τρίγωνο $ΑΔΕ$ τα $Ν$ , $Μ$ είναι μέσα των $ΑΕ$, $ΑΔ$ , οπότε $ΜΝ // ΔΕ \Rightarrow ΜΝ // ΒΔ$ .

Επειδή $ΑΓ \perp ΒΔ$ , έχουμε $ΜΝ \perp ΑΓ$ .

**ii.** Στο τρίγωνο $ΑΝΓ$ τα $ΑΔ$ και $ΝΜ$ είναι ύψη του, άρα το $Μ$ είναι το ορθόκεντρό του. Οπότε $ΓΜ \perp ΑΝ$ .

## 280 Θέμα 4 - 1865




**Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ ($\hat{Α} = 90^o$) με $ΒΔ$ διχοτόμο και $ΑΚ$ ύψος, που τέμνονται στο $Ε$ . Η κάθετη από το $Ε$ στην $ΑΒ$ τέμνει τις $ΑΒ$ και $ΒΓ$ στα $Η$ και $Ζ$ αντίστοιχα.**

**α. Να αποδείξετε ότι:**

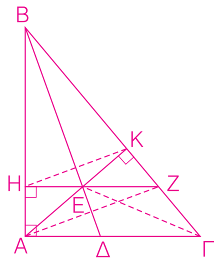
**i. Τα τρίγωνα $ΕΗΑ$ και $ΕΚΖ$ είναι ίσα.**

**ii. Το τρίγωνο $ΒΚΗ$ είναι ισοσκελές.**

**iii. Η $ΒΔ$ είναι κάθετη στην $ΑΖ$ .**

**β. Αν επιπλέον το ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι και ισοσκελές, να αποδείξετε ότι η $ΓΕ$ είναι διχοτόμος της γωνίας $Γ$ .**

**Λύση**




**α. i.** Επειδή η $ΒΕ$ είναι διχοτόμος της $\hat{Β}$ έχουμε $ΕΗ = ΕΚ$ .

Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΕΗΑ$ και $ΕΚΖ$ έχουν:
- $ΕΗ = ΕΚ$
- $Η\hat{Ε}Α = Κ\hat{Ε}Ζ$

Οπότε είναι ίσα.

**ii.** Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΗΒΕ$ και $ΚΒΕ$ έχουν:
- $ΒΕ$ κοινή
- $Η\hat{Β}Ε = Κ\hat{Β}Ε$

Επομένως είναι ίσα, οπότε $ΒΗ = ΒΚ$ .

Άρα το τρίγωνο $ΒΚΗ$ είναι ισοσκελές.

**iii.** Στο τρίγωνο $ΑΒΖ$ τα $ΑΚ$ και $ΖΗ$ είναι ύψη του, άρα το $Ε$ είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου.

Οπότε $ΒΔ \perp ΑΖ$ .

**β.** Αν το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελές, το ύψος του $ΑΚ$ είναι και διχοτόμος του.

Επομένως το $Ε$ είναι το έγγεντρο του τριγώνου. Άρα η $ΓΕ$ είναι διχοτόμος της $\hat{Γ}$ .

# 23. Διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου

## 281 Θέμα 2 - 1647

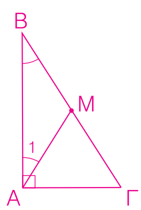
**Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $\hat{Α} = 90^o$ , $\hat{Β} = 35^o$ και $Μ$ το μέσο της $ΒΓ$ .**

**α. Να υπολογίσετε τη γωνία $Γ$ .**

**β. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $ΑΜΒ$ .**

**Λύση**

**α.** Είναι $\hat{Β} + \hat{Γ} = 90^o \Leftrightarrow 35^o + \hat{Γ} = 90^o \Leftrightarrow \hat{Γ} = 55^o$ .




**β.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ η $ΑΜ$ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, οπότε $ΑΜ = \frac{ΒΓ}{2} \Rightarrow ΑΜ = ΜΒ$ . Είναι $ΑΜ = ΜΒ$ οπότε $\hat{Α}_1 = \hat{Β} = 35^o$ και

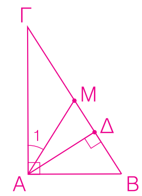
$\hat{Α}_1 + \hat{Β} + Α\widehat{Μ}Β = 180^o \Leftrightarrow 35^o + 35^o + Α\widehat{Μ}Β = 180^o \Leftrightarrow Α\widehat{Μ}Β = 110^o$ .

## 282 Θέμα 2 - 1690

**Σε ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $\hat{A}=90^o$ και $\hat{B}>\hat{Γ}$ φέρουμε το ύψος του $ΑΔ$ και την διάμεσο $ΑΜ$ στην πλευρά $ΒΓ$. Να αποδείξετε ότι:**

**α. οι γωνίες $\hat{B}$ και $Γ\hat{A}Δ$ είναι ίσες** **β. $Α\hat{Μ}Δ=2\cdot\hat{Γ}$ .**

**Λύση**




**α.** Για τις οξείες γωνίες του ορθογωνίου τριγώνου $ΑΒΓ$ ($\hat{A}=90^o$) ισχύει ότι:

$\hat{B}+\hat{Γ}=90^o \Leftrightarrow \hat{B}=90^o-\hat{Γ}$

Για τις οξείες γωνίες του ορθογωνίου τριγώνου $ΑΔΓ$ ισχύει ότι:

$Γ\hat{A}Δ+\hat{Γ}=90^o \Leftrightarrow Γ\hat{A}Δ=90^o-\hat{Γ}$ .

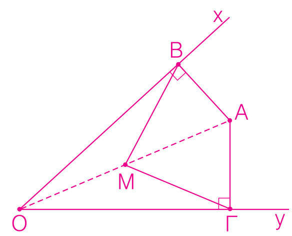
Οπότε $\hat{B}=Γ\hat{A}Δ$

**β.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ ($\hat{A}=90^o$) η $ΑΜ$ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα.

Οπότε $AM=\dfrac{ΒΓ}{2}=ΜΓ$ , άρα $\hat{Γ}=\hat{A}_1$ .

Η γωνία $Α\hat{Μ}Δ$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $ΑΜΓ$, οπότε $Α\hat{Μ}Δ=\hat{Γ}+\hat{A}_1=2\hat{Γ}$ .

## 283 Θέμα 2 - 1586




**Δίνεται γωνία $x\hat{O}y$ και σημείο $Α$ στο εσωτερικό της. Από το $Α$ φέρνουμε τις κάθετες $ΑΒ$, $ΑΓ$ προς τις πλευρές $Ox$, $Oy$ της γωνίας αντίστοιχα, και ονομάζουμε $Μ$ το μέσο του $ΟΑ$. Να αποδείξετε ότι:**

**α. Το τρίγωνο $ΒΜΑ$ είναι ισοσκελές.**

**β. $Β\hat{Μ}Α=2\cdot x\hat{O}A$**

**Λύση**

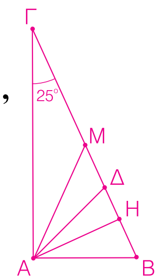
**α.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΒΟΑ$ η $ΒΜ$ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα.

Άρα $ΒΜ=\dfrac{ΟΑ}{2}=ΜΑ$ . Άρα το τρίγωνο $ΒΜΑ$ είναι ισοσκελές.

**β.** Επειδή $ΒΜ=ΜΟ$ έχουμε $Ο\hat{Β}Μ=Β\hat{Ο}Μ$ .

Η γωνία $Β\hat{Μ}Α$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $ΟΒΜ$, οπότε $Β\hat{Μ}Α=Ο\hat{Β}Μ+Β\hat{Ο}Μ=x\hat{O}A+x\hat{O}A=2\cdot x\hat{O}A$ .

## 284 Θέμα 2 - 1633




**Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $\hat{A}=90^o$ και $\hat{Γ}=25^o$ . Δίνονται επίσης η διάμεσος $ΑΜ$, το ύψος $ΑΗ$ από την κορυφή $Α$ και η διχοτόμος $ΑΔ$ της γωνίας $\hat{A}$ .**

**α. Να υπολογίσετε τις γωνίες $Α\hat{Μ}Β$ , $Η\hat{Α}Β$ , $Α\hat{Δ}Β$ .**

**β. Να αποδείξετε ότι $Μ\hat{Α}Δ=Δ\hat{Α}Η=20^o$ .**

**Λύση**

**α.** • Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ ($\hat{A}=90^o$) η $ΑΜ$ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε

$AM=\dfrac{ΒΓ}{2}=ΜΓ$ , άρα $Μ\hat{Α}Γ=\hat{Γ}=25^o$ .

Η γωνία $Α\hat{Μ}Β$ είναι εξωτερική στο $\overset{\triangle}{ΑΜΓ}$ , οπότε $Α\hat{Μ}Β=\hat{Γ}+Μ\hat{Α}Γ=2\hat{Γ}=50^o$ .

• Είναι $\hat{B}+\hat{Γ}=90^o \Leftrightarrow \hat{B}+25^o=90^o \Leftrightarrow \hat{B}=65^o$ .

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΗΑΒ$ είναι $Η\hat{Α}Β+\hat{B}=90^o \Leftrightarrow Η\hat{Α}Β+65^o=90^o \Leftrightarrow Η\hat{Α}Β=25^o$ .

- Η γωνία $A\hat{\Delta}B$ είναι εξωτερική του $\overset{\Delta}{A\Delta\Gamma}$ , οπότε $A\hat{\Delta}B = \hat{\Gamma} + \Delta\hat{A}\Gamma = \hat{\Gamma} + \frac{\widehat{A}}{2} = 25^{o} + 45^{o} = 70^{o}$ .

**β.** Είναι:
- $M\hat{A}\Delta = \Delta\hat{A}\Gamma - M\hat{A}\Gamma = \frac{\widehat{A}}{2} - M\hat{A}\Gamma = 45^{o} - 25^{o} = 20^{o}$
- $\Delta\hat{A}H = \Delta\hat{A}B - H\hat{A}B = \frac{\widehat{A}}{2} - H\hat{A}B = 45^{o} - 25^{o} = 20^{o}$

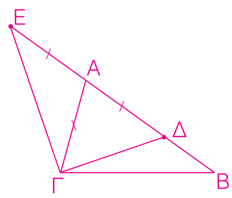
## 285 Θέμα 2 - 1702

**Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ τέτοιο, ώστε $A\Gamma < AB$ . Στην πλευρά $AB$ θεωρούμε σημείο $\Delta$ τέτοιο ώστε $A\Delta = A\Gamma$ και στην προέκταση της $BA$ (προς το $A$ ) θεωρούμε σημείο $E$ τέτοιο ώστε $AE = A\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι:**

**α. $\Delta\Gamma \perp E\Gamma$**

**β. η γωνία $EA\Gamma$ είναι διπλάσια της γωνίας $A\Delta\Gamma$ .**

**Λύση**




**α.** Στο τρίγωνο $\Delta\Gamma E$ είναι $A\Gamma = \frac{\Delta E}{2}$ , οπότε η διάμεσος $A\Gamma$ είναι ίση με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί.
Οπότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο στο $\Gamma$ , άρα $\Delta\Gamma \perp E\Gamma$ .

**β.** Επειδή $A\Gamma = A\Delta$ το τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές, οπότε $A\hat{\Delta}\Gamma = A\hat{\Gamma}\Delta$ .
Η $E\hat{A}\Gamma$ είναι εξωτερική του τριγώνου $A\Delta\Gamma$ , οπότε $E\hat{A}\Gamma = A\hat{\Delta}\Gamma + A\hat{\Gamma}\Delta = 2A\hat{\Delta}\Gamma$ .

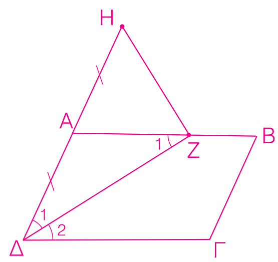
## 286 Θέμα 2 - 1537

**Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ , προεκτείνουμε την πλευρά $\Delta A$ (προς το $A$ ) κατά τμήμα $AH = \Delta A$ . Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας $\hat{\Delta}$ , η οποία τέμνει την $AB$ στο σημείο $Z$ . Να αποδείξετε ότι:**

**α. Το τρίγωνο $A\Delta Z$ είναι ισοσκελές.**

**β. Το τρίγωνο $\Delta ZH$ είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία $\hat{Z}$ .**

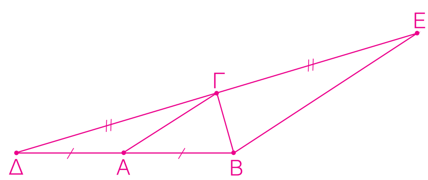
**Λύση**




**α.** Είναι:
- $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$ , αφού $\Delta Z$ διχοτόμος
- $\hat{\Delta}_2 = \hat{Z}_1$ ως εντός εναλλάξ . Άρα $\hat{\Delta}_1 = \hat{Z}_1$ , οπότε το τρίγωνο $A\Delta Z$ είναι ισοσκελές.

**β.** Στο $\overset{\Delta}{\Delta ZH}$ είναι $ZA = \frac{\Delta H}{2}$ , οπότε η $ZA$ είναι διάμεσος και ίση με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί.
Άρα το $\overset{\Delta}{\Delta ZH}$ είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία $\hat{Z}$ .

## 287 Θέμα 2 - 1551




**Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ $(AB = A\Gamma)$. Στην προέκταση της $BA$ (προς το μέρος της κορυφής $A$ ) παίρνουμε σημείο $\Delta$ ώστε $AB = A\Delta$ και στην προέκταση της $\Delta\Gamma$ (προς το μέρος της κορυφής $\Gamma$ ) παίρνουμε σημείο $E$ ώστε $\Delta\Gamma = \Gamma E$ .**

**α. Να δείξετε ότι το τρίγωνο $\Delta\Gamma B$ είναι ορθογώνιο.**

**β. Να δείξετε ότι $BE // A\Gamma$ και $A\Gamma = \frac{BE}{2}$ .**

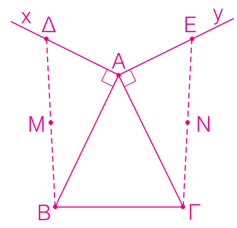
**Λύση**

**α.** Στο $\overset{\triangle}{\Delta\Gamma B}$ είναι $\Gamma A=\dfrac{B\Delta}{2}$ , οπότε η $\Gamma A$ είναι διάμεσος και ίση με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί. Οπότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με $\hat{\Gamma}=90^{\circ}$ .

**β.** Στο $\overset{\triangle}{B\Delta E}$ τα $A$ , $\Gamma$ είναι τα μέσα των $B\Delta$ , $\Delta E$ , οπότε $A\Gamma\,//\,BE$ και $A\Gamma=\dfrac{BE}{2}$ .

## 288 Θέμα 2 - 1555

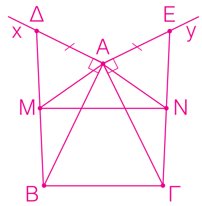
**Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ $(AB=A\Gamma)$ . Φέρουμε, εκτός του τριγώνου, τις ημιευθείες $Ax$ και $Ay$ τέτοιες ώστε $Ax\perp AB$ και $Ay\perp A\Gamma$ , όπως στο διπλανό σχήμα. Στις $Ax$ και $Ay$ θεωρούμε τα σημεία $\Delta$ και $E$ αντίστοιχα, ώστε $A\Delta=AE$ .**




**α. Να αποδείξετε ότι $B\Delta=\Gamma E$ .**

**β. Αν $M$ και $N$ είναι τα μέσα των τμημάτων $B\Delta$ και $\Gamma E$ αντίστοιχα , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AMN$ είναι ισοσκελές.**

**Λύση**




**α.** Τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ έχουν:
- $A\Delta=AE$
- $AB=A\Gamma$

Άρα είναι ίσα, οπότε $B\Delta=\Gamma E$ .

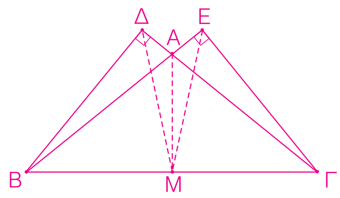
**β.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο:

- $\overset{\triangle}{AB\Delta}$ $(\hat{A}=90^{\circ})$ η $AM$ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, άρα $AM=\dfrac{B\Delta}{2}$ (1) .
- $\overset{\triangle}{A\Gamma E}$ $(\hat{A}=90^{\circ})$ η $AN$ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, άρα $AN=\dfrac{\Gamma E}{2}$ (2) .

Επειδή $B\Delta=\Gamma E$ από τις (1) και (2) προκύπτει $AM=AN$ , οπότε το $\overset{\triangle}{AMN}$ είναι ισοσκελές.

## 289 Θέμα 2 - 1680

**Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ $(AB=A\Gamma)$. Στις προεκτάσεις των πλευρών $AB$ και $A\Gamma$ προς το $A$ φέρουμε τμήματα $B\Delta$ και $\Gamma E$ κάθετα στις $A\Gamma$ και $AB$ αντίστοιχα.**




**α. Να αποδείξετε ότι $B\Delta=\Gamma E$ .**

**β. Αν $M$ το μέσο της $B\Gamma$ τότε:**

**i. Να αποδείξετε ότι $M\Delta=ME$ .**

**ii. Να αποδείξετε ότι η $AM$ διχοτομεί τη γωνία $\Delta\hat{M}E$ .**

**Λύση**

**α.** Τα ορθογώνια τρίγωνα $\Delta AB$ και $EA\Gamma$ έχουν:
- $AB=A\Gamma$
- $\Delta\hat{A}B=E\hat{A}\Gamma$

Άρα είναι ίσα, οπότε $B\Delta=\Gamma E$ .

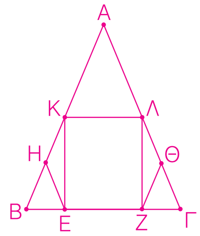
**β.i.** Στα ορθογώνια τρίγωνα $\Delta B\Gamma$ και $EB\Gamma$ οι $M\Delta$ και $ME$ είναι διάμεσοι προς την υποτείνουσα, οπότε $M\Delta=\dfrac{B\Gamma}{2}$ και $ME=\dfrac{B\Gamma}{2}$ . Άρα $M\Delta=ME$ .

**ii.** Τα $\overset{\triangle}{MA\Delta}$ και $\overset{\triangle}{MAE}$ έχουν:
- $A\Delta=AE$
- $M\Delta=ME$
- $MA$ κοινή

Άρα είναι ίσα (ΠΠΠ), οπότε $\Delta\hat{M}A=E\hat{M}A$ .

Επομένως η $AM$ διχοτομεί τη γωνία $\Delta\hat{M}E$ .

## 290 Θέμα 2 - 1675




**Έστω ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $ΑΒ = ΑΓ$ . Από τα μέσα $Κ$ και $Λ$ των πλευρών $ΑΒ$ και $ΑΓ$ αντίστοιχα, φέρουμε τα κάθετα τμήματα $ΚΕ$ και $ΛΖ$ στην πλευρά $ΒΓ$ .**
**Να αποδείξετε ότι:**

**α. Τα τρίγωνα $ΚΕΒ$ και $ΛΖΓ$ είναι ίσα.**

**β. $ΕΗ = ΖΘ$ , όπου $Η$ , $Θ$ τα μέσα των τμημάτων $ΚΒ$ , $ΛΓ$ αντίστοιχα.**

**Λύση**

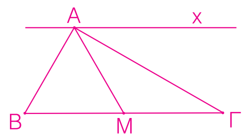
**α.** Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΚΕΒ$ και $ΛΖΓ$ έχουν:
- $ΚΒ = ΛΓ$
- $\hat{Β} = \hat{Γ}$ , αφού το $\overset{\Delta}{ΑΒΓ}$ είναι ισοσκελές.

Άρα είναι ίσα.

**β.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο:
- $\overset{\Delta}{ΕΒΚ}$ $(\hat{Ε} = 90^\circ)$ η $ΕΗ$ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, άρα $ΕΗ = \dfrac{ΚΒ}{2}$ (1) .
- $\overset{\Delta}{ΖΓΛ}$ $(\hat{Ζ} = 90^\circ)$ η $ΖΘ$ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, άρα $ΖΘ = \dfrac{ΓΛ}{2}$ (2) .

Επειδή $ΚΒ = ΓΛ$ από τις (1) και (2) προκύπτει $ΕΗ = ΖΘ$ .

## 291 Θέμα 2 - 1655




**Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ με τη γωνία $Α$ ορθή και $Μ$ το μέσο της $ΒΓ$ . Φέρουμε ημιευθεία $Αx$ παράλληλη στη $ΒΓ$ (στο ημιεπίπεδο που ορίζει η $ΑΜ$ με το σημείο $Γ$ ). Να αποδείξετε ότι:**

**α. $Μ\hat{Α}Γ = Μ\hat{Γ}Α$**

**β. η $ΑΓ$ είναι διχοτόμος της γωνίας $ΜΑx$ .**

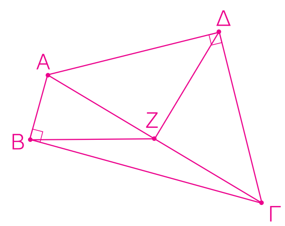
**Λύση**

**α.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ η $ΑΜ$ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε $ΑΜ = \dfrac{ΒΓ}{2} = ΜΓ$ . Άρα το $\overset{\Delta}{ΜΑΓ}$ είναι ισοσκελές, επομένως $Μ\hat{Α}Γ = Μ\hat{Γ}Α$ (1) .

**β.** Επειδή $Αx // ΒΓ$ , είναι $x\hat{Α}Γ = Μ\hat{Γ}Α$ (2) , ως εντός εναλλάξ.

Από τις (1) , (2) προκύπτει $Μ\hat{Α}Γ = x\hat{Α}Γ$ , άρα η $ΑΓ$ είναι διχοτόμος της $Μ\hat{Α}x$ .

## 292 Θέμα 2 - 1685




**Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $\hat{Β} = 90^\circ$ και $Ζ$ το μέσο του $ΑΓ$ . Με υποτείνουσα το $ΑΓ$ κατασκευάζουμε ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο $ΑΔΓ$ με $\hat{Δ} = 90^\circ$ .**

**α. Να αποδείξετε ότι $ΒΖ = ΔΖ$ .**

**β. Αν $Α\hat{Γ}Β = 30^\circ$ , να υπολογίσετε τις γωνίες $ΒΑΔ$ και $ΒΓΔ$ .**

**Λύση**

**α.** Στα ορθογώνια τρίγωνα $ΒΑΓ$ $(\hat{Β} = 90^\circ)$ και $ΔΑΓ$ $(\hat{Δ} = 90^\circ)$ , οι $ΒΖ$ , $ΔΖ$ είναι διάμεσοι προς την υποτείνουσα, οπότε $ΒΖ = \dfrac{ΑΓ}{2}$ και $ΔΖ = \dfrac{ΑΓ}{2}$ .

Επομένως $ΒΖ = ΔΖ$ .

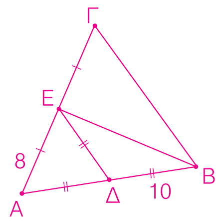
**β.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ έχουμε $Β\widehat{Α}Γ + Α\widehat{Γ}Β = 90^\circ \Leftrightarrow Β\widehat{Α}Γ + 30^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow Β\widehat{Α}Γ = 60^\circ$ .

Στο ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $ΑΔΓ$ είναι $Δ\widehat{Α}Γ = Α\widehat{Γ}Δ = 45^\circ$ .

Είναι:
- $Β\hat{Α}Δ = Β\hat{Α}Γ + Γ\hat{Α}Δ = 60^\circ + 45^\circ = 105^\circ$
- $Β\hat{Γ}Δ = Α\hat{Γ}Β + Α\hat{Γ}Δ = 30^\circ + 45^\circ = 75^\circ$

## 293 Θέμα 2 - 1615

**Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$. Τα σημεία $Δ$ και $Ε$ είναι τα μέσα των πλευρών $ΑΒ$ και $ΑΓ$ αντίστοιχα. Επιπλέον ισχύουν $ΑΔ = ΕΔ = ΔΒ$ με $ΑΕ = 8$ και $ΔΒ = 10$.**




**α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $ΑΕΒ$ είναι ορθογώνιο.**

**β. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελές.**

**γ. Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου $ΑΒΓ$.**

**Λύση**

**α.** Στο $\overset{\Delta}{ΑΕΒ}$ είναι $ΕΔ = \frac{ΑΒ}{2}$, οπότε η διάμεσός του $ΕΔ$ είναι ίση με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί.

Άρα $Α\hat{Ε}Β = 90^{o}$, επομένως το $\overset{\Delta}{ΑΕΒ}$ είναι ορθογώνιο.

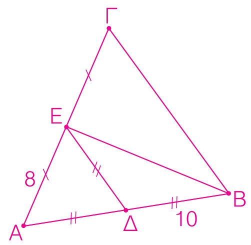
**β.** Στο $\overset{\Delta}{ΑΒΓ}$ η $ΒΕ$ είναι διάμεσος και ύψος, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

**γ.** Στο $\overset{\Delta}{ΑΒΓ}$ τα $Δ$, $Ε$ είναι τα μέσα των $ΑΒ$, $ΑΓ$, οπότε $ΔΕ = \frac{ΒΓ}{2} \Rightarrow ΒΓ = 2ΔΕ = 2 \cdot 10 = 20$.

Η περίμετρος $Π$ του $\overset{\Delta}{ΑΒΓ}$ είναι: $Π = ΑΒ + ΒΓ + ΑΓ = 20 + 20 + 16 = 56$.

## 294 Θέμα 2 - 1614

**Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$. Τα σημεία $Δ$ και $Ε$ είναι τα μέσα των πλευρών $ΑΒ$ και $ΑΓ$ αντίστοιχα. Επιπλέον ισχύουν $ΑΔ = ΕΔ = ΔΒ$ με $ΑΕ = 8$ και $ΔΒ = 10$.**




**α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $ΑΕΒ$ είναι ορθογώνιο.**

**β. Να αποδείξετε ότι $ΒΓ = 20$.**

**γ. Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου $ΑΒΓ$.**

**Λύση**

**α.** Στο $\overset{\Delta}{ΑΕΒ}$ είναι $ΕΔ = \frac{ΑΒ}{2}$, οπότε η διάμεσός του $ΕΔ$ είναι ίση με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί.

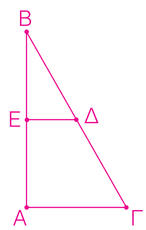
Άρα $Α\hat{Ε}Β = 90^{o}$, επομένως το $\overset{\Delta}{ΑΕΒ}$ είναι ορθογώνιο.

**β.** Στο $\overset{\Delta}{ΑΒΓ}$ τα $Δ$, $Ε$ είναι τα μέσα των $ΑΒ$, $ΑΓ$, οπότε $ΔΕ = \frac{ΒΓ}{2} \Rightarrow ΒΓ = 2ΔΕ = 2 \cdot 10 = 20$.

**γ.** Είναι $Π_{ΑΒΓ} = ΑΒ + ΑΓ + ΒΓ = 20 + 16 + 20 = 56$.

## 295 Θέμα 2 - 1671

**Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $\hat{Α} = 90^{o}$ και $\hat{Β} = 30^{o}$. Αν τα σημεία $Ε$ και $Δ$ είναι τα μέσα των $ΑΒ$ και $ΒΓ$ αντίστοιχα με $ΕΔ = 1$, να υπολογίσετε τα τμήματα:**




**α. $ΑΓ$** **β. $ΒΓ$** **γ. $ΑΔ$**

**Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.**

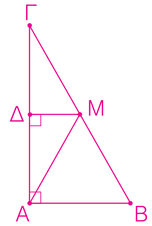
**Λύση**

**α.** Στο $\overset{\Delta}{ΑΒΓ}$ τα $Δ$, $Ε$ είναι μέσα των $ΒΓ$, $ΑΒ$, οπότε $ΔΕ = \frac{ΑΓ}{2} \Rightarrow ΑΓ = 2ΔΕ = 2 \cdot 1 = 2$.

**β.** Επειδή το $\overset{\Delta}{ΑΒΓ}$ είναι ορθογώνιο $(\hat{Α} = 90^{o})$ και $\hat{Β} = 30^{o}$, είναι $ΑΓ = \frac{ΒΓ}{2} \Rightarrow ΒΓ = 2 \cdot 2 = 4$.

**γ.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ $(\hat{Α} = 90^{o})$ η $ΑΔ$ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε $ΑΔ = \frac{ΒΓ}{2} = 2$.

## 296 Θέμα 2 - 1548




**Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ $(\hat{A}=90^o)$ με $B\Gamma=8cm$ . Έστω $AM$ είναι διάμεσος του τριγώνου και $M\Delta \perp A\Gamma$ . Αν η γωνία $A\hat{M}\Gamma$ είναι ίση με $120^o$ , τότε:**

**α. Να δείξετε ότι $AB=4cm$ .**

**β. Να βρείτε το μήκος της $M\Delta$ .**

**Λύση**

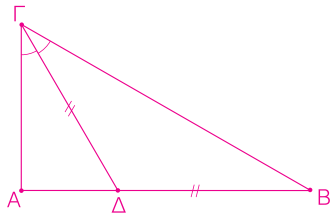
**α.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ $(\hat{A}=90^o)$ η $AM$ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε $AM=\frac{B\Gamma}{2}=M\Gamma$ . Άρα $M\hat{A}\Gamma=\hat{\Gamma}$ .

Στο $M\overset{\Delta}{A}\Gamma$ είναι $A\widehat{M}\Gamma+\hat{\Gamma}+M\widehat{A}\Gamma=180^o \Leftrightarrow 120^o+\hat{\Gamma}+\hat{\Gamma}=180^o \Leftrightarrow 2\hat{\Gamma}=60^o \Leftrightarrow \hat{\Gamma}=30^o$ .

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\hat{\Gamma}=30^o$ , επομένως $AB=\frac{B\Gamma}{2}=4\ cm$ .

**β.** Στο ισοσκελές τρίγωνο $AM\Gamma$ το $M\Delta$ είναι ύψος του, άρα είναι και διάμεσος. Οπότε το $\Delta$ είναι μέσο του $A\Gamma$ . Στο $A\overset{\Delta}{B}\Gamma$ τα $M$ , $\Delta$ είναι μέσα των $B\Gamma$ και $A\Gamma$ , οπότε $M\Delta=\frac{AB}{2}=2\ cm$ .

## 297 Θέμα 2 - 1638




**Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ (με $\hat{A}=90^o$ ) και η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$ τέμνει την πλευρά $AB$ στο σημείο $\Delta$ , τέτοιο ώστε $\Gamma\Delta=\Delta B=2\ cm$ .**
**Να αποδείξετε ότι:**

**α. $\hat{B}=30^o$** **β. $AB=3\ cm$**

**Λύση**

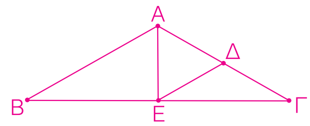
**α.** Επειδή $\Delta B=\Delta\Gamma$ είναι $\hat{B}=\Delta\hat{\Gamma}B=\frac{\hat{\Gamma}}{2}$ , οπότε $\hat{\Gamma}=2\hat{B}$ .

Είναι $\hat{B}+\hat{\Gamma}=90^o \Leftrightarrow \hat{B}+2\hat{B}=90^o \Leftrightarrow 3\hat{B}=90^o \Leftrightarrow \hat{B}=30^o$ .

**β.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ είναι $A\hat{\Gamma}\Delta=30^o$ , οπότε $A\Delta=\frac{\Gamma\Delta}{2}=1\ cm$ .

Άρα $AB=A\Delta+\Delta B=1+2=3\ cm$ .

## 298 Θέμα 2 - 1686




**Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=A\Gamma$ , και γωνία $\hat{B}$ ίση με $30^o$ .**
**Θεωρούμε $\Delta$ και $E$ τα μέσα των $A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα.**

**α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $E\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές και να υπολογίσετε τις γωνίες του.**

**β. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισόπλευρο.**

**Λύση**

**α.** • Επειδή το $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές και το $AE$ είναι διάμεσος θα είναι και ύψος, οπότε $A\hat{E}\Gamma=90^o$ .

• Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AE\Gamma$ $(\hat{E}=90^o)$ η $E\Delta$ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε $E\Delta=\frac{A\Gamma}{2}=\Delta\Gamma$ , επομένως το $E\overset{\Delta}{\Delta}\Gamma$ είναι ισοσκελές.

• Είναι $\hat{\Gamma}=\hat{B}=30^o$ , $\Delta\hat{E}\Gamma=\hat{\Gamma}=30^o$ .

Στο $\Delta\overset{\Delta}{E}\Gamma$ είναι $E\hat{\Delta}\Gamma+\Delta\hat{E}\Gamma+\hat{\Gamma}=180^o \Leftrightarrow E\hat{\Delta}\Gamma+30^o+30^o=180^o \Leftrightarrow E\hat{\Delta}\Gamma=120^o$ .

**β.** Είναι:

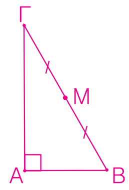
- $E\hat{A}\Delta = 90^\circ - \hat{\Gamma} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$
- $E\Delta = \Delta A$ , οπότε $A\hat{E}\Delta = E\hat{A}\Delta = 60^\circ$ .

Επομένως $A\hat{\Delta}E = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$ .

Άρα το $\overset{\Delta}{A\Delta E}$ είναι ισόπλευρο.

## 299 Θέμα 2 - 1606

**Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ $(\hat{A} = 90^\circ)$ με γωνία $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$ και σημείο $M$ μέσο της $B\Gamma$ .**




**α.** **Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου $AB\Gamma$ .**

**β.** **Να δείξετε ότι το τρίγωνο $AM\Gamma$ είναι ισοσκελές.**

**γ.** **Να βρείτε τη γωνία $A\widehat{M}\Gamma$ .**

**Λύση**

**α.** Είναι $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$ και $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow 2\hat{\Gamma} + \hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow 3\hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 30^\circ$ .

Οπότε $\hat{B} = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$ .

**β.** Επειδή στο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ είναι $\hat{A} = 90^\circ$ και $AM$ διάμεσος προς την υποτείνουσα, προκύπτει $AM = \dfrac{B\Gamma}{2} = M\Gamma$ .

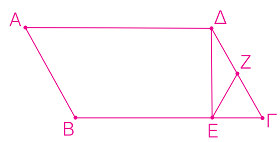
Οπότε το $\overset{\Delta}{AM\Gamma}$ είναι ισοσκελές,.

**γ.** Είναι $MA = M\Gamma$ άρα $M\widehat{A}\Gamma = \hat{\Gamma} = 30^\circ$

Στο $\overset{\Delta}{AM\Gamma}$ είναι $A\widehat{M}\Gamma + \hat{\Gamma} + M\widehat{A}\Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow A\widehat{M}\Gamma + 30^\circ + 30^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow A\widehat{M}\Gamma = 120^\circ$

## 300 Θέμα 2 - 1704

**Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι $\hat{B} = 120^\circ$ και $\Delta E \perp B\Gamma$ . Έστω $EZ$ η διάμεσος του τριγώνου $\Delta E\Gamma$.**




**α.** **Να υπολογίσετε τις γωνίες $A$ και $\Gamma$ του παραλληλογράμμου.**

**β.** **Αν $K$ είναι το μέσο της πλευράς $AB$ , να αποδείξετε ότι $EZ = AK$ .**

**γ.** **Να υπολογίσετε τη γωνία $EZ\Gamma$ .**

**Λύση**

**α.** Οι γωνίες $\widehat{A}$ και $\widehat{B}$ είναι εντός και επί τα αυτά, οπότε $\widehat{A} + \widehat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{A} + 120^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{A} = 60^\circ$ .

Οι απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου είναι ίσες, οπότε $\widehat{\Gamma} = \widehat{A} = 60^\circ$ . Άρα $\hat{A} = \hat{\Gamma} = 60^\circ$ .

**β.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο $E\Gamma\Delta$ η $EZ$ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε $EZ = \dfrac{\Gamma\Delta}{2} = \dfrac{AB}{2} = AK$ .

**γ.** Επειδή $EZ = Z\Gamma$ , είναι $Z\hat{E}\Gamma = \hat{\Gamma} = 60^\circ$ .

Άρα $E\hat{Z}\Gamma = 60^\circ$ .

## 301 Θέμα 2 - 1691

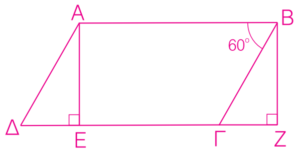
**Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $\hat{B} = 60^\circ$ . Φέρουμε τα ύψη $AE$ και $BZ$ του παραλληλογράμμου που αντιστοιχούν στην ευθεία $\Delta\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι:**

**α.** $\mathbf{\Gamma Z = \dfrac{A\Delta}{2}}$ ,

**β.** **το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ίσο με το τρίγωνο $B\Gamma Z$ ,**

**γ.** **το τετράπλευρο $ABZE$ είναι ορθογώνιο.**

**Λύση**




**α.** Είναι $BZ \perp \Gamma\Delta$ και $AB // \Gamma\Delta$ οπότε $AB \perp BZ$.

Άρα $Z\hat{B}\Gamma = A\hat{B}Z - \hat{B} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$, οπότε $\Gamma Z = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{A\Delta}{2}$.

**β.** Τα ορθογώνια τρίγωνα $A\Delta E$ και $B\Gamma Z$ έχουν:

- $A\Delta = B\Gamma$
- $AE = BZ$, ως αποστάσεις παραλλήλων

Άρα είναι ίσα.

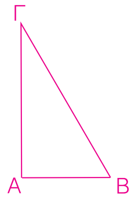
**γ.** Το $ABZE$ είναι ορθογώνιο, γιατί έχει $\hat{B} = \hat{Z} = \hat{E} = 90^\circ$.

## 302 Θέμα 2 - 1631

**Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 120^\circ$ και $\hat{A} = 3\hat{\Gamma}$.**

**α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και να υπολογίσετε τις γωνίες του.**

**β. Αν η πλευρά $B\Gamma = 2cm$ να βρείτε το μήκος της $AB$.**




**Λύση**

**α.** Είναι:

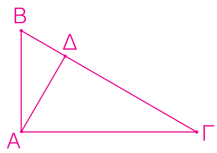
- $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 120^\circ \Leftrightarrow 3\hat{\Gamma} + \hat{\Gamma} = 120^\circ \Leftrightarrow 4\hat{\Gamma} = 120^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 30^\circ$
- $\hat{A} = 3\hat{\Gamma} = 3 \cdot 30^\circ = 90^\circ$
- $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 90^\circ + \hat{B} + 30^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 60^\circ$

Άρα $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{B} = 60^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 30^\circ$.

**β.** Επειδή το $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ είναι ορθογώνιο $(\hat{A} = 90^\circ)$ και $\hat{\Gamma} = 30^\circ$, προκύπτει $AB = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{2}{2} = 1\ cm$.

## 303 Θέμα 2 - 1649

**Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με τη γωνία $A$ ορθή, $2\hat{\Gamma} = \hat{B}$ και $A\Delta$ το ύψος του.**




**α. Να υπολογιστούν οι οξείες γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.**

**β. Να υπολογιστεί η γωνία $BA\Delta$.**

**γ. Να αποδείξετε ότι: $B\Delta = \frac{AB}{2}$.**

**Λύση**

**α.** Είναι $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$ και $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow 2\hat{\Gamma} + \hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow 3\hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 30^\circ$.

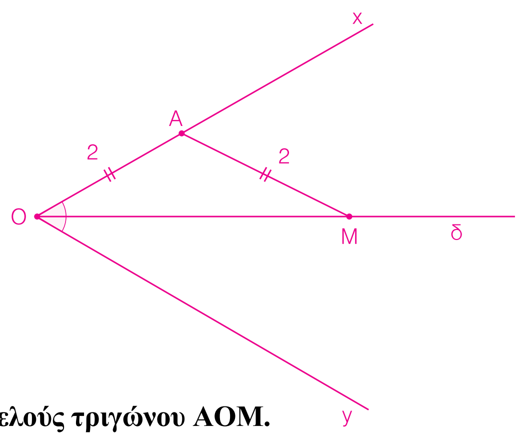
Οπότε $\hat{B} = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$.

**β.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Delta$ είναι $B\hat{A}\Delta + \hat{B} = 90^\circ \Leftrightarrow B\hat{A}\Delta + 60^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow B\hat{A}\Delta = 30^\circ$

**γ.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο $BA\Delta$ είναι $B\hat{A}\Delta = 30^\circ$, οπότε $B\Delta = \frac{AB}{2}$.

## 304 Θέμα 2 - 13653

**Σχεδιάζουμε γωνία $x\hat{O}y = 60^\circ$ και παίρνουμε σημείο A επί της πλευράς Ox, τέτοιο ώστε $AO = 2$. Φέρουμε τη διχοτόμο Οδ της γωνίας $x\hat{O}y$ και θεωρούμε σημείο M στην Οδ, τέτοιο ώστε $AM = AO$. Να υπολογίσετε:**



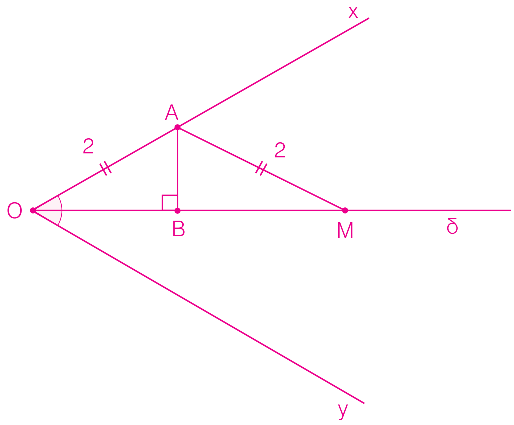

**α. Τη γωνία $\delta\hat{O}y$.**

**β. Τις γωνίες του τριγώνου AOM.**

**γ. Το μήκος του ύψους AB που αντιστοιχεί στη βάση OM του ισοσκελούς τριγώνου AOM.**

**Λύση**

**α.** Η ημιευθεία $O\delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $x\hat{O}y$, οπότε $x\hat{O}\delta = \delta\hat{O}y = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$.



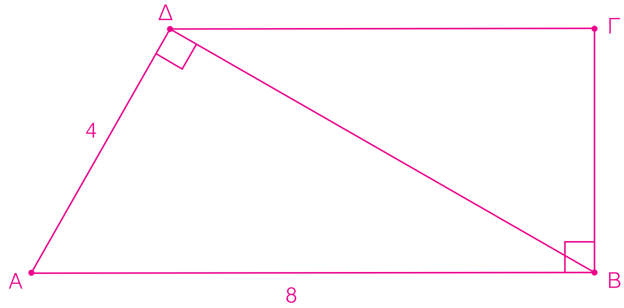

**β.** Είναι: • $A\hat{O}M = x\hat{O}\delta = 30^\circ$

- $AO = AM$, άρα $A\hat{O}M = A\hat{M}O = 30^\circ$
- $A\hat{O}M + A\hat{M}O + M\hat{A}O = 180^\circ \Leftrightarrow 30^\circ + 30^\circ + M\hat{A}O = 180^\circ$

$$\Leftrightarrow M\hat{A}O = 120^\circ$$

**γ.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο AOB είναι $A\hat{O}B = 30^\circ$, οπότε,
$AB = \frac{OA}{2} = \frac{2}{2} = 1$.

## 305 Θέμα 2 - 13828




**Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ η διαγώνιος ΒΔ είναι κάθετη στην πλευρά ΑΔ και η πλευρά ΓΒ κάθετη στη βάση ΑΒ. Αν $A\Delta = 4$ και $AB = 8$ τότε:**

**α. Να υπολογιστεί η γωνία $\Delta\hat{A}B$.**

**β. Να αποδείξετε ότι η διαγώνιος ΒΔ του τραπεζίου ΑΒΓΔ είναι διπλάσια της πλευράς του ΒΓ.**

**Λύση**

**α.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ η υποτείνουσα ΑΒ είναι διπλάσια της κάθετης πλευράς ΑΔ άρα $\Delta\hat{B}A = 30^\circ$.

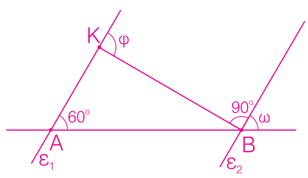
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε $\Delta\hat{A}B + \Delta\hat{B}A = 90^\circ \Leftrightarrow \Delta\hat{A}B = 60^\circ$.

**β.** Οι βάσεις ΑΒ και ΔΓ του τραπεζίου ΑΒΓΔ είναι κάθετες στην ΒΓ άρα το τρίγωνο ΔΓΒ είναι ορθογώνιο στο Γ.

Είναι $A\hat{B}\Delta = B\hat{\Delta}\Gamma = 30^\circ$, ως εντός εναλλάξ άρα $A\hat{B}\Delta = B\hat{\Delta}\Gamma = 30^\circ$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΓΒ είναι $B\hat{\Delta}\Gamma = 30^\circ$, άρα $B\Gamma = \frac{B\Delta}{2} \Leftrightarrow B\Delta = 2B\Gamma$.

## 306 Θέμα 2 - 1619




**Στο διπλανό σχήμα είναι $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ και $AB = 6$.**

**α. Να υπολογίσετε τις γωνίες φ και ω.**

**β. Να προσδιορίσετε το είδος του τριγώνου ΑΒΚ ως προς τις γωνίες του.**

**γ. Να υπολογίσετε το μήκος της ΑΚ, αιτιολογώντας την απάντησή σας.**

**Λύση**

**α.** Επειδή $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ είναι:

- $\omega = B\hat{A}K = 60^\circ$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη.
- $\varphi = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$, ως εντός και επί τα αυτά μέρη.

**β.** Είναι $A\hat{K}B = 180^\circ - \hat{\varphi} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.

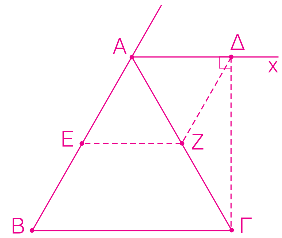
Άρα το τρίγωνο $\overset{\triangle}{ABK}$ είναι ορθογώνιο.

**γ.** Το $\overset{\triangle}{ABK}$ είναι ορθογώνιο $(\hat{K} = 90^\circ)$ και $K\hat{B}A + K\hat{A}B = 90^\circ \Leftrightarrow K\hat{B}A + 60^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow K\hat{B}A = 30^\circ$.

Επομένως $KA = \frac{AB}{2} = 3$.

## 307 Θέμα 2 - 1625

**Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $ΑΒΓ$. Φέρουμε την εξωτερική διχοτόμο $Αx$ της γωνίας $\hat{Α}$ και από το σημείο $Γ$ την κάθετο $ΓΔ$ στην $Αx$. Τα σημεία $Ε$ και $Ζ$ είναι τα μέσα των πλευρών $ΑΒ$ και $ΑΓ$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:**




**α. το τρίγωνο $ΑΖΔ$ είναι ισόπλευρο.**

**β. το τετράπλευρο $ΑΔΖΕ$ είναι ρόμβος.**

**Λύση**

**α.** Είναι $Δ\hat{Α}Ζ = \frac{\hat{Α}_{εξ}}{2} = \frac{180^o - 60^o}{2} = 60^o$ .

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΔΑΓ$ $(\hat{Δ} = 90^o)$ η $ΔΖ$ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε $ΔΖ = \frac{ΑΓ}{2} = ΑΖ$ .

Άρα το $\overset{\triangle}{ΑΔΖ}$ είναι ισοσκελές με $Δ\hat{Α}Ζ = 60^o$ , οπότε είναι ισόπλευρο.

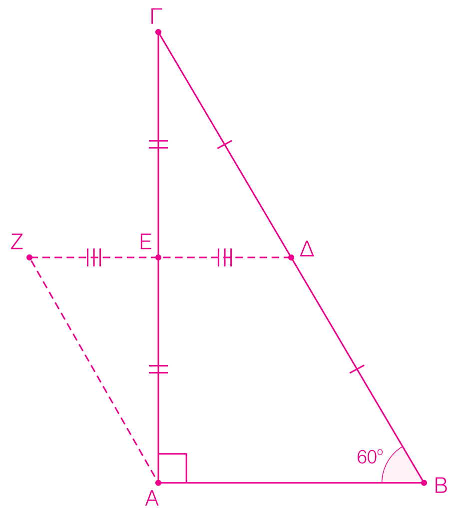
**β.** Στο $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$ τα $Ε$, $Ζ$ είναι τα μέσα των $ΑΒ$, $ΑΓ$, οπότε $ΕΖ = \frac{ΒΓ}{2} = \frac{ΑΒ}{2} = ΑΕ$ .

Είναι $ΑΕ = \frac{ΑΒ}{2} = \frac{ΑΓ}{2} = ΔΖ$ και $ΔΖ = ΑΔ$ , οπότε $ΕΖ = ΑΕ = ΔΖ = ΑΔ$ .

Άρα το $ΑΔΖΕ$ είναι ρόμβος.

## 308 Θέμα 2 - 13837

**Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{Α} = 90^o$ και $\hat{Β} = 60^o$. Θεωρούμε τα σημεία Δ και Ε που είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα. Προεκτείνουμε την ΔΕ κατά τμήμα $ΕΖ = ΔΕ$.**




**α. Να αποδείξετε ότι $ΓΔ = ΑΖ$.**

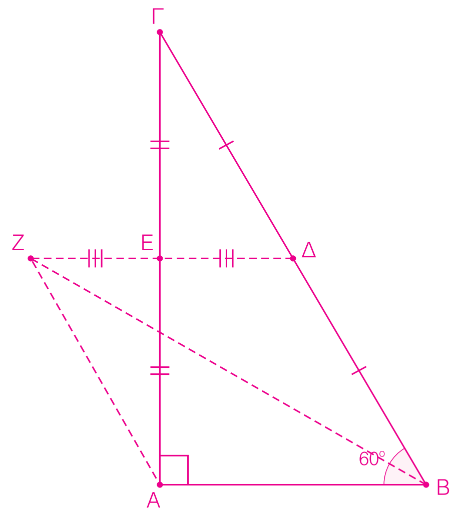
**β. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΖΑΒ είναι ισοσκελές.**

**Λύση**

**α.** Τα τρίγωνα $ΑΕΖ$ και $ΓΕΔ$ έχουν:

- $ΑΕ = ΕΓ$
- $ΕΖ = ΕΔ$
- $Α\hat{Ε}Ζ = Γ\hat{Ε}Δ$ , ως κατακορυφήν

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ), οπότε $ΑΖ = ΓΔ$.

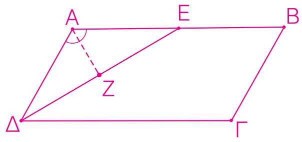



**β.** Είναι $ΑΖ = ΓΔ$ και $ΓΔ = ΔΒ$ , άρα $ΑΖ = ΔΒ = \frac{ΒΓ}{2}$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι $\hat{Β} + \hat{Γ} = 90^o \Leftrightarrow 60^o + \hat{Γ} = 90^o \Leftrightarrow \hat{Γ} = 30^o$ οπότε $ΑΒ = \frac{ΒΓ}{2}$.

Άρα ΑΖ = ΑΒ και το τρίγωνο ΑΒΖ είναι ισοσκελές.

## 309 Θέμα 2 - 1543

**Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με γωνία $\hat{A}=120^o$ και $AB=2A\Delta$ .**
**Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας Δ του παραλληλογράμμου, η οποία τέμνει την ΑΒ στο Ε, και στη συνέχεια το κάθετο τμήμα ΑΖ στη ΔΕ.**
**Να αποδείξετε ότι:**




**α.** $\mathbf{A\hat{\Delta}E=30^o}$ **β.** $\mathbf{AZ=\dfrac{AB}{4}}$

**Λύση**

**α.** Οι γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{\Delta}$ είναι εντός και επί τα αυτά, οπότε $\hat{A}+\hat{\Delta}=180^o \Leftrightarrow 120^o+\hat{\Delta}=180^o \Leftrightarrow \hat{\Delta}=60^o$ .

Η ΔΕ είναι διχοτόμος της $\hat{\Delta}$ , οπότε $A\hat{\Delta}E=\dfrac{\hat{\Delta}}{2}=\dfrac{60^o}{2}=30^o$

**β.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΖΔ $(\hat{Z}=90^o)$ είναι $A\hat{\Delta}E=30^o$ , οπότε $AZ=\dfrac{A\Delta}{2}=\dfrac{\frac{AB}{2}}{2}=\dfrac{AB}{4}$ .

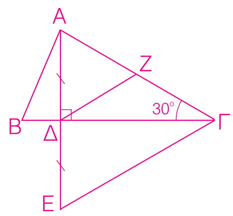
## 310 Θέμα 2 - 1567

**Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $AB<A\Gamma$ και γωνία $\hat{\Gamma}=30^o$ . Θεωρούμε το ύψος ΑΔ και το μέσο Ζ της πλευράς ΑΓ .**

**α. Να αποδείξετε ότι $\Delta Z=\dfrac{A\Gamma}{2}$ .**

**β. Προεκτείνουμε το ύψος ΑΔ (προς το Δ) κατά ίσο τμήμα ΔΕ . Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΓΕ είναι ισόπλευρο.**

**Λύση**




**α.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΑΓ $(\hat{\Delta}=90^o)$ η ΔΖ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε $\Delta Z=\dfrac{A\Gamma}{2}$.

**β.** Στο $\overset{\Delta}{A E \Gamma}$ η ΓΔ είναι ύψος και διάμεσος, οπότε είναι ισοσκελές και η ΓΔ διχοτόμος του.

Επομένως $A\hat{\Gamma}E=2\hat{\Gamma}=2\cdot 30^o=60^o$ .

Άρα το $\overset{\Delta}{A\Gamma E}$ είναι ισοσκελές με μία γωνία $60^o$ , οπότε είναι ισόπλευρο.

## 311 Θέμα 2 - 13831

**Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει $\hat{A}=90^o$.**

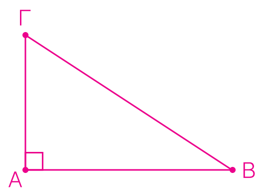
**α. Να σχεδιάσετε ένα τέτοιο τρίγωνο αν επιπλέον γνωρίζετε ότι $AB>A\Gamma$ . Ποια είναι η μικρότερη γωνία του τριγώνου και γιατί;**

**β. Αν για το τρίγωνο που σας ζητήθηκε να σχεδιάσετε στο α. ερώτημα γνωρίζετε επιπλέον ότι η μια από τις οξείες γωνίες του είναι ίση με $30^o$, τότε να απαντήσετε στα παρακάτω:**

**i. Πόσες μοίρες θα είναι η γωνία $\hat{B}$ και πόσες η γωνία $\hat{\Gamma}$ ;**

**ii. Ποια πλευρά του τριγώνου είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας;**

**Λύση**




**α.** Το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με $\hat{A}=90^o$ , οπότε η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου είναι η ΒΓ.

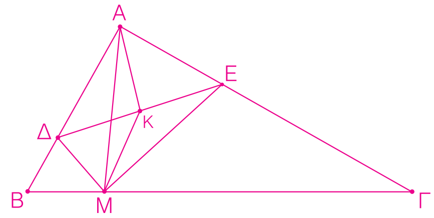
Έχουμε $AB>A\Gamma \Leftrightarrow \gamma>\beta$ , άρα $\hat{\Gamma}>\hat{B} \Leftrightarrow \hat{B}<\hat{\Gamma}$ .

Οπότε, η γωνία $\hat{B}$ είναι η μικρότερη γωνία του τριγώνου.

**β. i.** Εφόσον η μια οξεία γωνία του τριγώνου ΑΒΓ είναι 30° η άλλη οξεία γωνία του είναι συμπληρωματική της, άρα 60°. Αφού η μικρότερη γωνία του τριγώνου είναι η $\widehat{\mathrm{B}}$. Έχουμε $\widehat{\mathrm{B}}=30^{\circ}$ και $\widehat{\Gamma}=60^{\circ}$.

**ii.** Η ΒΓ είναι η υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ. Εφόσον $\widehat{\mathrm{B}}=30^{\circ}$ η απέναντι κάθετη πλευρά της γωνίας $\widehat{\mathrm{B}}$ είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας, άρα η πλευρά ΑΓ είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

## 312 Θέμα 4 - 1812




**Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με τη γωνία Α ορθή και Μ τυχαίο σημείο της πλευράς ΒΓ. Φέρουμε τις διχοτόμους των γωνιών $\mathrm{B\widehat{M}A}$ και $\mathrm{A\widehat{M}\Gamma}$ οι οποίες τέμνουν τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα.**

**α. Να αποδείξετε ότι, η γωνία ΔΜΕ είναι ορθή.**

**β. Αν Κ το μέσο του ΔΕ, να αποδείξετε ότι ΜΚ = ΚΑ.**

**Λύση**

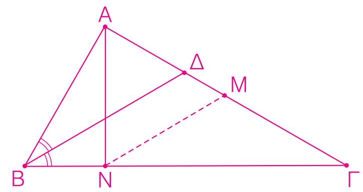
**α.** Επειδή οι ΜΔ, ΜΕ είναι διχοτόμοι των γωνιών $\mathrm{B\hat{M}A}$, $\mathrm{A\hat{M}\Gamma}$ έχουμε

$$\Delta\widehat{\mathrm{M}}\mathrm{A}=\frac{\mathrm{B\widehat{M}A}}{2} \quad \text{και} \quad \mathrm{A\widehat{M}E}=\frac{\mathrm{A\widehat{M}\Gamma}}{2}$$

Οπότε $\Delta\hat{\mathrm{M}}\mathrm{E}=\Delta\widehat{\mathrm{M}}\mathrm{A}+\mathrm{A\widehat{M}E}=\frac{\mathrm{B\widehat{M}A}}{2}+\frac{\mathrm{A\widehat{M}\Gamma}}{2}=\frac{\mathrm{B\widehat{M}A}+\mathrm{A\widehat{M}\Gamma}}{2}=\frac{\mathrm{B\widehat{M}\Gamma}}{2}=\frac{180^{\circ}}{2}=90^{\circ}$.

**β.** Στα ορθογώνια τρίγωνα ΔΜΕ $(\hat{\mathrm{M}}=90^{\circ})$ και ΔΑΕ $(\hat{\mathrm{A}}=90^{\circ})$, οι ΜΚ, ΚΑ είναι διάμεσοι προς την υποτείνουσα, οπότε $\mathrm{MK}=\frac{\Delta\mathrm{E}}{2}$, $\mathrm{KA}=\frac{\Delta\mathrm{E}}{2}$. Άρα ΜΚ = ΚΑ.

## 313 Θέμα 4 - 1738




**Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\mathrm{B}}=2\hat{\Gamma}$, και η διχοτόμος ΒΔ της γωνίας $\hat{\mathrm{B}}$. Από το μέσο Μ της ΑΓ φέρουμε παράλληλη στη διχοτόμο ΒΔ που τέμνει την πλευρά ΒΓ στο Ν. Να αποδείξετε ότι:**

**α. Το τρίγωνο ΒΔΓ είναι ισοσκελές.**

**β. Το τρίγωνο ΜΝΓ είναι ισοσκελές.**

**γ. ΑΝ ⊥ ΒΓ**

**Λύση**

**α.** Επειδή $\hat{\mathrm{B}}=2\hat{\Gamma}$ και η ΒΔ είναι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\mathrm{B}}$ έχουμε $\Delta\hat{\mathrm{B}}\Gamma=\frac{\hat{\mathrm{B}}}{2}=\frac{2\hat{\Gamma}}{2}=\hat{\Gamma}$, οπότε το $\overset{\Delta}{\mathrm{B\Delta\Gamma}}$ είναι ισοσκελές.

**β.** Είναι $\mathrm{M\hat{N}\Gamma}=\Delta\hat{\mathrm{B}}\Gamma$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη.

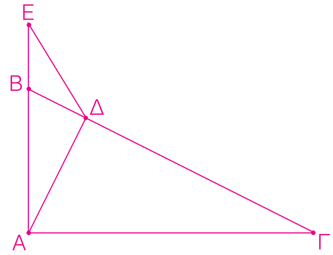
Οπότε $\mathrm{M\hat{N}\Gamma}=\hat{\Gamma}$, επομένως το $\overset{\Delta}{\mathrm{MN\Gamma}}$ είναι ισοσκελές.

**γ.** Στο ισοσκελές τρίγωνο ΜΝΓ είναι $\mathrm{MN}=\mathrm{M\Gamma}=\frac{\mathrm{A\Gamma}}{2}$.

Στο $\overset{\Delta}{\mathrm{AN\Gamma}}$, η ΝΜ είναι διάμεσος και ίση με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί.

Οπότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με $\hat{\mathrm{N}}=90^{\circ}$. Άρα ΑΝ ⊥ ΒΓ.

## 314 Θέμα 4 - 1831




**Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με την γωνία $A$ ορθή και $\hat{B}=2\hat{\Gamma}$. Φέρουμε το ύψος του $A\Delta$ και παίρνουμε σημείο $E$ στην προέκταση της $AB$ τέτοιο ώστε $BE=B\Delta$.**

**α. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $B\Delta E$.**

**β. Να αποδείξετε ότι:**

**i. $BE=\dfrac{AB}{2}$**

**ii. $AE=\Gamma\Delta$**

**Λύση**

α. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι:

- $\hat{B}=2\hat{\Gamma}$
- $\hat{B}+\hat{\Gamma}=90^\circ \Leftrightarrow 2\hat{\Gamma}+\hat{\Gamma}=90^\circ \Leftrightarrow 3\hat{\Gamma}=90^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma}=30^\circ$, οπότε $\hat{B}=2\cdot 30^\circ=60^\circ$
- $E\hat{B}\Delta=180^\circ-\hat{B}=180^\circ-60^\circ=120^\circ$

Το $\overset{\Delta}{BE\Delta}$ είναι ισοσκελές, οπότε $\hat{\Delta}=\hat{E}$ και $E\hat{\Delta}B+\hat{\Delta}+\hat{E}=180^\circ \Leftrightarrow 120^\circ+\hat{E}+\hat{E}=180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{E}=60^\circ \Leftrightarrow \hat{E}=30^\circ$.

Άρα $\hat{\Delta}=\hat{E}=30^\circ$ και $E\hat{B}\Delta=120^\circ$.

β.i. Το $\overset{\Delta}{A\Delta B}$ είναι ορθογώνιο $(\hat{\Delta}=90^\circ)$ με $B\hat{A}\Delta=90^\circ-\hat{B}=90^\circ-60^\circ=30^\circ$.

Οπότε $B\Delta=\dfrac{AB}{2} \Leftrightarrow BE=\dfrac{AB}{2}$.

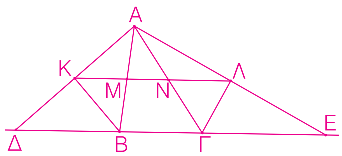
ii. Είναι $AE=AB+BE=AB+\dfrac{AB}{2}=\dfrac{3AB}{2}$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ $(\hat{A}=90^\circ)$ είναι $\hat{\Gamma}=30^\circ$.

Οπότε $AB=\dfrac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow B\Gamma=2AB$.

Είναι $\Delta\Gamma=B\Gamma-B\Delta=2AB-BE=2AB-\dfrac{AB}{2}=\dfrac{3AB}{2}$. Άρα $AE=\Gamma\Delta$.

## 315 Θέμα 4 - 1824




**Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και στην προέκταση της $\Gamma B$ (προς το $B$) θεωρούμε σημείο $\Delta$ τέτοιο ώστε $B\Delta=AB$ ενώ στην προέκταση της $B\Gamma$ (προς το $\Gamma$) θεωρούμε σημείο $E$ τέτοιο ώστε $\Gamma E=\Gamma A$. Αν οι εξωτερικοί διχοτόμοι των γωνιών $B$ και $\Gamma$ τέμνουν τις $A\Delta$ και $AE$ στα σημεία $K$ και $\Lambda$ αντίστοιχα, και η $K\Lambda$ τέμνει τις $AB$ και $A\Gamma$ στα σημεία $M$ και $N$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:**

**α. Τα σημεία $K$ και $\Lambda$ είναι μέσα των $A\Delta$ και $AE$ αντίστοιχα.**

**β. Τα τρίγωνα $KMA$ και $AN\Lambda$ είναι ισοσκελή.**

**γ. $K\Lambda=\dfrac{AB+A\Gamma+B\Gamma}{2}$**

**Λύση**

α. Στα ισοσκελή τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ οι διχοτόμοι $BK$, $\Gamma\Lambda$ είναι ύψη και διάμεσοι, οπότε τα $K$, $\Lambda$ είναι μέσα των $A\Delta$, $AE$.

**β.** Στο τρίγωνο $A\Delta E$ τα $K$, $\Lambda$ είναι τα μέσα των $A\Delta$, $AE$, οπότε $K\Lambda // \Delta E$.

Στο $\overset{\Delta}{A\Delta B}$ το $K$ είναι μέσο της $A\Delta$ και $KM // \Delta B$, οπότε το $M$ είναι μέσο της $AB$.

Στο $\overset{\Delta}{A\Gamma E}$ το $\Lambda$ είναι μέσο της $AE$ και $\Lambda N // \Gamma E$, οπότε το $N$ είναι μέσο της $A\Gamma$.

Στα ορθογώνια τρίγωνα $KAB$ και $\Lambda A\Gamma$ οι $MK$, $N\Lambda$ είναι διάμεσοι προς την υποτείνουσα, επομένως $KM = \dfrac{AB}{2} = MA$ και $\Lambda N = \dfrac{A\Gamma}{2} = NA$.

Άρα τα $\overset{\Delta}{KMA}$, $\overset{\Delta}{AN\Lambda}$ είναι ισοσκελή.

**γ.** Τα $M$, $N$ είναι τα μέσα των πλευρών $AB$, $A\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$, οπότε $MN = \dfrac{B\Gamma}{2}$.

Είναι $K\Lambda = KM + MN + N\Lambda = \dfrac{AB}{2} + \dfrac{B\Gamma}{2} + \dfrac{A\Gamma}{2} = \dfrac{AB + A\Gamma + B\Gamma}{2}$

## 316 Θέμα 4 - 1808

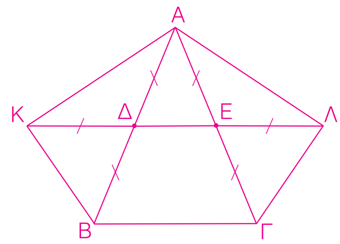
**Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και $\Delta$, $E$ τα μέσα των πλευρών του $AB$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Στην προέκταση της $\Delta E$ (προς το $E$) θεωρούμε σημείο $\Lambda$ ώστε $E\Lambda = AE$ και στην προέκταση της $E\Delta$ (προς το $\Delta$) θεωρούμε σημείο $K$ τέτοιο ώστε $\Delta K = A\Delta$. Να αποδείξετε ότι:**

**α.** **$K\Delta = \Lambda E$**

**β.** **Τα τρίγωνα $AKB$ και $A\Lambda\Gamma$ είναι ορθογώνια.**

**γ.** **Τα τρίγωνα $AKB$ και $A\Lambda\Gamma$ είναι ίσα.**

**Λύση**




**α.** Είναι $K\Delta = A\Delta = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{A\Gamma}{2} = AE = \Lambda E$.

**β.** Στο $\overset{\Delta}{AKB}$ είναι $K\Delta = \dfrac{AB}{2}$, οπότε η διάμεσος $K\Delta$ είναι ίση με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί.

Οπότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με $\hat{K} = 90^o$.

- Στο τρίγωνο $A\Lambda\Gamma$ είναι $\Lambda E = \dfrac{A\Gamma}{2}$, οπότε η διάμεσος είναι ίση με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί. Οπότε το τρίγωνο $A\Lambda\Gamma$ είναι ορθογώνιο με $\Lambda = 90^o$.

**γ.** Τα $\overset{\Delta}{A\Delta K}$ και $\overset{\Delta}{AE\Lambda}$ έχουν:
- $A\Delta = AE$
- $\Delta K = E\Lambda$
- $A\hat{\Delta}K = A\hat{E}\Lambda$, ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $A\hat{\Delta}E$ και $A\hat{E}\Delta$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ), άρα $AK = A\Lambda$.

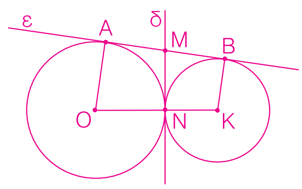
Τα ορθογώνια τρίγωνα $AKB$ και $A\Lambda\Gamma$ έχουν:
- $AK = A\Lambda$
- $AB = A\Gamma$

Οπότε είναι ίσα.

## 317 Θέμα 4 - 1771

**Δύο κύκλοι $(O, \rho_1)$, $(K, \rho_2)$ εφάπτονται εξωτερικά στο $N$. Μια ευθεία $\varepsilon$ εφάπτεται στους δύο κύκλους στα σημεία $A$, $B$ αντίστοιχα. Η κοινή εφαπτομένη των κύκλων στο $N$ τέμνει την $\varepsilon$ στο $M$.**

**Να αποδείξετε ότι:**




**α.** **Το $M$ είναι μέσον του $AB$.** **β.** **$O\widehat{M}K = 90^o$** **γ.** **$A\widehat{N}B = 90^o$**

**Λύση**

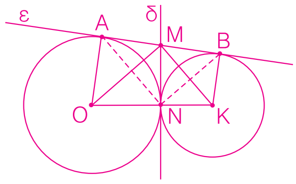
**α.** Είναι:

- $MA = MN$ , ως εφαπτόμενα τμήματα στον κύκλο $(O, \rho_1)$
- $MB = MN$ , ως εφαπτόμενα τμήματα στον κύκλο $(K, \rho_2)$

Οπότε $MA = MB$ , άρα το $M$ είναι το μέσο του $AB$ .

**β.** Οι $MO$ και $MK$ είναι διακεντρικές ευθείες οπότε είναι οι διχοτόμοι των γωνιών $A\hat{M}N$ και $B\hat{M}N$ . Οπότε:

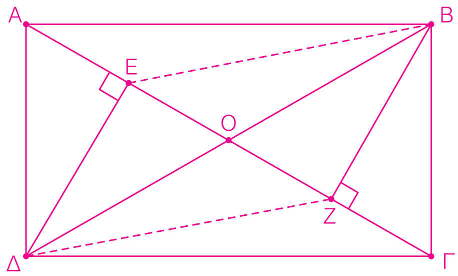
- $O\widehat{M}N = \dfrac{A\widehat{M}N}{2}$ , $N\widehat{M}K = \dfrac{N\widehat{M}B}{2}$
- $O\widehat{M}K = O\widehat{M}N + N\widehat{M}K = \dfrac{A\widehat{M}N + N\widehat{M}B}{2} = \dfrac{A\widehat{M}B}{2} = \dfrac{180^\circ}{2} = 90^\circ$




**γ.** Η $NM$ είναι διάμεσος στο τρίγωνο $ANB$ και $NM = MA = \dfrac{AB}{2}$ .

Άρα το τρίγωνο $ANB$ είναι ορθογώνιο με $A\hat{N}B = 90^\circ$ .

## 318 Θέμα 4 - 13852




**Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με $AB > A\Delta$ και με κέντρο Ο. Αν ΒΖ και ΔΕ είναι οι αποστάσεις των κορυφών Β και Δ από τη διαγώνιο ΑΓ, τότε:**

**α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΔΕΟ και ΒΖΟ είναι ίσα.**

**β. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΒΖΔ είναι παραλληλόγραμμο.**

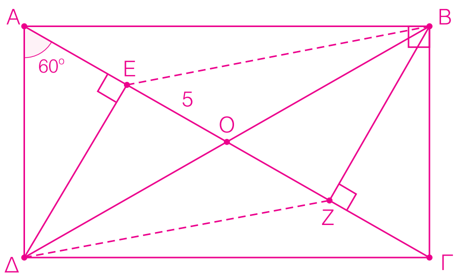
**γ. Αν $\Delta\hat{A}E = 60^\circ$ και $OE = 5$ , να βρείτε το μήκος της πλευράς ΑΔ.**

**Λύση**

**α.** Τα ορθογώνια τρίγωνα $\Delta EO$ και $BZO$ έχουν:

- $\Delta\hat{E}O = B\hat{Z}O = 90^\circ$
- $E\hat{O}\Delta = Z\hat{O}B$ (ως κατακορυφήν)
- $\Delta O = OB$ (Ο μέσο της διαγωνίου ΒΔ του ορθογωνίου ΑΒΓΔ)

Άρα είναι ίσα γιατί είναι ορθογώνια, που έχουν την υποτείνουσα και μια οξεία γωνία ίσες μία προς μία.




**β.** Στα τρίγωνα ΔΕΟ και ΒΖΟ οι γωνίες $O\hat{\Delta}E$ και $O\hat{B}Z$ είναι ίσες ως συμπληρωματικές των ίσων γωνιών $E\hat{O}\Delta$ και $Z\hat{O}B$.

Από τη σύγκριση του α. ερωτήματος έχουμε ΕΟ = ΖΟ.

Το τετράπλευρο ΕΒΖΔ είναι παραλληλόγραμμο διότι οι διαγώνιοι του ΕΖ και ΒΔ διχοτομούνται στο Ο.

**γ.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε $\Delta\hat{A}\Gamma = 60^\circ$ , άρα $\Delta\hat{\Gamma}A = 30^\circ$ .

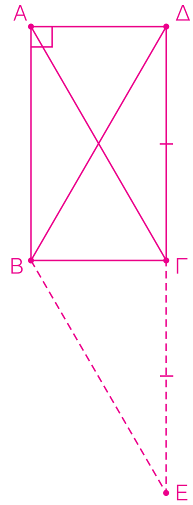
Στο ορθογώνο ΑΒΓΔ είναι $A\Gamma = B\Delta \Leftrightarrow \dfrac{A\Gamma}{2} = \dfrac{B\Delta}{2} \Leftrightarrow \Gamma O = \Delta O$ .

Επομένως το τρίγωνο ΔΟΓ είναι ισοσκελές με βάση ΓΔ και $\Delta\hat{\Gamma}A = 30^\circ$, άρα $\Delta\hat{O}\Gamma = 120^\circ$ και $\Delta\hat{O}A = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ .

Οπότε το τρίγωνο ΑΔΟ είναι ισόπλευρο και η ΔΕ είναι ύψος άρα και διάμεσος. Το σημείο Ε είναι το μέσο του τμήματος ΑΟ με ΑΕ = ΕΟ = 5.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΕ έχουμε $\Delta\hat{A}E = 60^\circ$ , οπότε $A\hat{\Delta}E = 30^\circ$ , άρα η $AE = \dfrac{A\Delta}{2} \Leftrightarrow A\Delta = 2AE \Leftrightarrow A\Delta = 10$ .

## 319 Θέμα 4 - 13851




**Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΔΓ προς το μέρος του Γ κατά τμήμα $ΓΕ = ΔΓ$.**

**α. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΓΕΒ είναι παραλληλόγραμμο.**

**β. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές.**

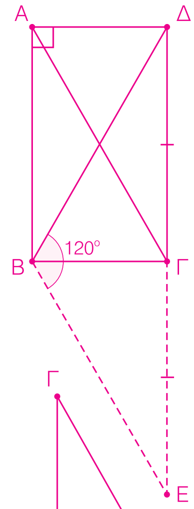
**γ. Αν $Δ\hat{B}E = 120^o$ να αποδείξετε ότι $BΔ = 2AΔ$.**

**Λύση**

**α.** Στο ορθογώνιο ΑΒΓΔ είναι ΑΒ = ΓΔ, ενώ έχουμε ότι ΓΔ = ΓΕ, άρα ΑΒ = ΓΕ. Είναι ΑΒ//ΓΔ άρα και ΑΒ//ΓΕ. Το τετράπλευρο ΑΓΕΒ είναι παραλληλόγραμμο αφού έχει δύο απέναντι πλευρές του, τις ΑΒ και ΓΕ παράλληλες και ίσες.

**β.** Στο παραλληλόγραμμο ΑΓΕΒ έχουμε ΑΓ = ΒΕ και στο ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχουμε ΑΓ = ΒΔ.

Άρα ΒΕ = ΒΔ δηλαδή το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές.



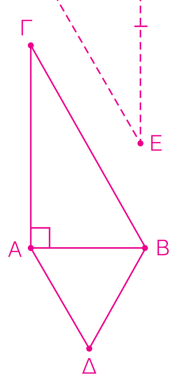

**γ.** • Το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές με βάση τη ΔΕ, οπότε ΒΔ = ΒΕ και $B\hat{Δ}E = B\hat{E}Δ = 30^o$ αφού $E\hat{B}Δ = 120^o$.

• Το ΑΓΕΒ είναι παραλληλόγραμμο άρα ΑΓ//ΒΕ συνεπώς $B\hat{E}Γ = A\hat{Γ}Δ = 30^o$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη.

• Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΓΔ έχουμε $A\hat{Γ}Δ = 30^o$ άρα

$AΔ = \dfrac{AΓ}{2} \Leftrightarrow AΔ = \dfrac{BΔ}{2} \Leftrightarrow BΔ = 2AΔ$.

## 320 Θέμα 4 - 13853




**Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 90^o$. Επίσης οι ΑΔ και ΒΓ είναι παράλληλες και το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισόπλευρο.**

**α. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{Γ}$ του τριγώνου ΑΒΓ.**

**β. Αν η περίμετρος του ΑΒΔ είναι 12 να βρείτε το μήκος της υποτείνουσας του ΑΒΓ.**

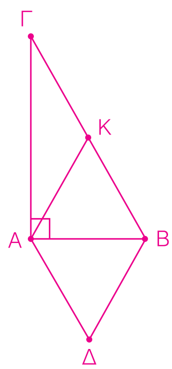
**γ. Αν το σημείο Κ είναι σημείο της υποτείνουσας τέτοιο ώστε το ΑΔΒΚ να είναι παραλληλόγραμμο, τότε να βρείτε τη θέση του σημείου Κ. Τι είδους παραλληλόγραμμο είναι το ΑΔΒΚ; Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.**

**Λύση**

**α.** Είναι $Δ\hat{A}B = A\hat{B}Γ$, ως εντός και εναλλάξ.

Το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισόπλευρο, επομένως $Δ\hat{A}B = 60^o$ άρα $A\hat{B}Γ = 60^o$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $A\hat{Γ}B = 90^o - 60^o = 30^o$.




**β.** Το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισόπλευρο, άρα $AB = AΔ = BΔ = \dfrac{12}{3} = 4$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ η γωνία $\hat{Γ} = A\hat{Γ}B = 30^o$, επομένως $AB = \dfrac{BΓ}{2}$ άρα

$BΓ = 2AB = 2 \cdot 4 = 8$.

**γ.** Αν το ΑΔΒΚ του παρακάτω σχήματος είναι παραλληλόγραμμο τότε έχει τις απέναντι πλευρές του. Άρα ΒΚ = ΑΔ.

Είναι ΑΔ = ΑΒ και $AB = \dfrac{BΓ}{2}$.

Οπότε $BK = AΔ = AB = \dfrac{BΓ}{2}$, δηλαδή το Κ είναι το μέσο της ΒΓ.

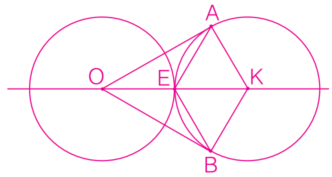
Η ΑΚ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, άρα $AK=\frac{B\Gamma}{2}$.

Είναι $B\Delta=AB$ και $AB=\frac{B\Gamma}{2}$. Αρα $B\Delta=\frac{B\Gamma}{2}$, οπότε ΒΔ = ΑΚ.

Αρα, αν Κ μέσο της ΒΓ τότε ότι ΑΔ = ΒΚ και ΒΔ = ΑΚ, δηλαδή το ΑΔΒΚ είναι παραλληλόγραμμο. Επιπλέον, εφόσον ΑΔ = ΒΔ το παραλληλόγραμμο ΑΔΒΚ έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες, επομένως είναι ρόμβος.

## 321 Θέμα 4 - 1796

**Δυο ίσοι κύκλοι $(O,\rho)$ και $(K,\rho)$ εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο $E$. Αν $OA$ και $OB$ είναι τα εφαπτόμενα τμήματα από το σημείο $O$ στον κύκλο $(K,\rho)$ να αποδείξετε ότι:**




**α.** $AE=BE$ **β.** $A\hat{O}K=30^o$

**γ.** **Το τετράπλευρο ΑΚΒΕ είναι ρόμβος.**

**Λύση**

**α.** Οι ακτίνες στα σημεία επαφής είναι κάθετες στις εφαπτόμενες, άρα $KA\perp OA$ και $KB\perp OB$.

Στα ορθογώνια τρίγωνα $AOK$ $(\hat{A}=90^o)$ και $BOK$ $(\hat{B}=90^o)$ οι $AE$, $BE$ είναι διάμεσοι προς την υποτείνουσα, οπότε $AE=\frac{OK}{2}$ και $BE=\frac{OK}{2}$.

Άρα $AE=BE$.

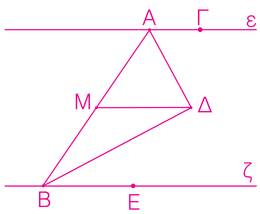
**β.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο $OAK$ είναι $AK=\rho=EK=\frac{OK}{2}$, οπότε $A\hat{O}K=30^o$.

**γ.** Είναι $AE=\frac{OK}{2}$ και $AK=\frac{OK}{2}$ άρα $AE=AK$.

Οπότε $AE=AK=KB=BE$, άρα το ΑΚΒΕ είναι ρόμβος.

## 322 Θέμα 4 - 1811

**Δίνονται δυο παράλληλες ευθείες $\varepsilon$ και $\zeta$, και μια τρίτη που τις τέμνει στα σημεία $A$ και $B$ αντίστοιχα. Θεωρούμε τις διχοτόμους των εντός και επί τα αυτά μέρη γωνιών που σχηματίζονται, οι οποίες τέμνονται σε σημείο $\Delta$. Αν $M$ είναι το μέσον του $AB$, να αποδείξετε ότι:**




**α.** **Η γωνία $B\hat{\Delta}A$ είναι ορθή.**

**β.** $B\hat{M}\Delta=2\cdot M\hat{\Delta}A$

**γ.** $M\Delta\,//\,\varepsilon$

**Λύση**

**α.** Οι $B\Delta$, $A\Delta$ είναι οι διχοτόμοι των εντός και επί τα αυτά μέρη γωνιών $B\hat{A}\Gamma$ και $A\hat{B}E$, οπότε

$$B\hat{A}\Delta+A\hat{B}\Delta=\frac{B\hat{A}\Gamma}{2}+\frac{A\hat{B}E}{2}=\frac{B\hat{A}\Gamma+A\hat{B}E}{2}=\frac{180^o}{2}=90^o$$

Στο τρίγωνο ΑΒΔ είναι $B\hat{A}\Delta+A\hat{B}\Delta+B\hat{\Delta}A=180^o \Leftrightarrow 90^o+B\hat{\Delta}A=180^o \Leftrightarrow B\hat{\Delta}A=90^o$

**β.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta AB$ $(\hat{\Delta}=90^o)$ η $\Delta M$ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε $\Delta M=\frac{AB}{2}=AM$.

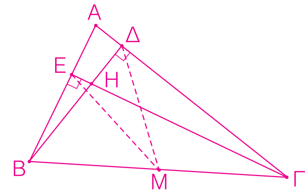
Άρα $M\hat{\Delta}A=M\hat{A}\Delta$ (1). Στο τρίγωνο ΜΑΔ η γωνία $B\hat{M}\Delta$ είναι εξωτερική, οπότε

$B\hat{M}\Delta=M\hat{\Delta}A+M\hat{A}\Delta\overset{(1)}{=}2M\hat{\Delta}A$.

**γ.** Έχουμε $\Gamma\hat{A}\Delta=M\hat{A}\Delta\overset{(1)}{=}M\hat{\Delta}A$, οπότε οι εντός εναλλάξ γωνίες είναι ίσες, άρα $M\Delta\,//\,\varepsilon$.

## 323 Θέμα 4 - 1716

**Στο διπλανό σχήμα δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$, τα ύψη του $ΒΔ$ και $ΓΕ$ που τέμνονται στο σημείο $Η$ και το μέσο $Μ$ της πλευράς $ΒΓ$.**




**α. Να αποδείξετε ότι:**

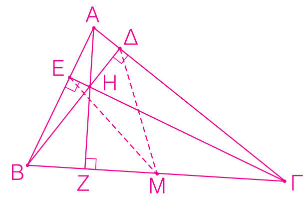
**i. $ΜΔ = ΜΕ$**

**ii. Η ευθεία $ΑΗ$ τέμνει κάθετα τη $ΒΓ$ και ότι $Α\hat{Η}Δ = \hat{Γ}$, όπου $\hat{Γ}$ η γωνία του τριγώνου $ΑΒΓ$.**

**β. Να βρείτε το ορθόκεντρο του τριγώνου $ΑΒΗ$.**

**Λύση**

**α. i.** Στα ορθογώνια τρίγωνα $ΔΒΓ$ και $ΕΒΓ$ τα $ΔΜ$, $ΕΜ$ είναι διάμεσοι προς την υποτείνουσα, οπότε $ΔΜ = \frac{ΒΓ}{2}$ και $ΕΜ = \frac{ΒΓ}{2}$. Άρα $ΜΔ = ΜΕ$.




**ii.** Επειδή το $Η$ είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου $ΑΒΓ$ έχουμε $ΑΗ \perp ΒΓ$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΗΔ$ είναι $Α\hat{Η}Δ + Η\hat{Α}Δ = 90^o \Leftrightarrow Α\hat{Η}Δ = 90^o - Η\hat{Α}Δ$, (1).

Έστω $Ζ$ το σημείο τομής της $ΑΗ$ με τη $ΒΓ$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΖΓ$ είναι

$\hat{Γ} + Ζ\hat{Α}Γ = 90^o \Leftrightarrow \hat{Γ} = 90^o - Ζ\hat{Α}Γ \Leftrightarrow \hat{Γ} = 90^o - Η\hat{Α}Δ$ (2).

Από τις (1), (2) έχουμε $Α\hat{Η}Δ = \hat{Γ}$.

2ος τρόπος

Οι γωνίες $Α\hat{Η}Δ$ και $\hat{Γ}$ είναι οξείες και έχουν πλευρές κάθετες, άρα $Α\hat{Η}Δ = \hat{Γ}$.

**β.** Στο τρίγωνο $ΑΒΗ$ το ύψος στην $ΑΒ$ είναι το $ΗΕ$ και το ύψος στην $ΒΗ$ είναι το $ΑΔ$, οι φορείς των οποίων τέμνονται στο $Γ$. Άρα το ορθόκεντρο του $\overset{\triangle}{ΑΒΗ}$ είναι το $Γ$.

## 324 Θέμα 4 - 1759

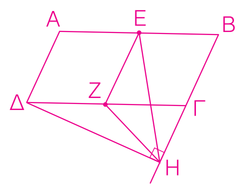
**Σε παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ με γωνία $Α$ αμβλεία, ισχύει ότι $ΑΒ = 2ΑΔ$. Τα σημεία $Ε$ και $Ζ$, είναι μέσα των πλευρών του $ΑΒ$ και $ΓΔ$ αντίστοιχα. Από το $Δ$ φέρουμε τη $ΔΗ$ κάθετη στην προέκταση της $ΒΓ$. Να αποδείξετε ότι:**

**α. Το τετράπλευρο $ΑΕΖΔ$ είναι ρόμβος.**

**β. Το τρίγωνο $ΕΖΗ$ είναι ισοσκελές.**

**γ. Η $ΗΕ$, είναι διχοτόμος της γωνίας $Ζ\hat{Η}Γ$.**

**Λύση**




**α.** Είναι $ΑΒ // = ΓΔ$, οπότε $\frac{ΑΕ}{2} // = \frac{ΔΓ}{2}$, άρα $ΑΕ // = ΔΖ$, επομένως το $ΑΕΖΔ$.

Είναι παραλληλόγραμμο.

Αφού επιπλέον $ΑΔ = \frac{ΑΒ}{2} = ΑΕ$, το $ΑΕΖΔ$ είναι ρόμβος.

**β.** Επειδή το $ΑΕΖΔ$ είναι ρόμβος, έχουμε $ΕΖ = ΑΔ = \frac{ΑΒ}{2} = \frac{ΓΔ}{2}$.

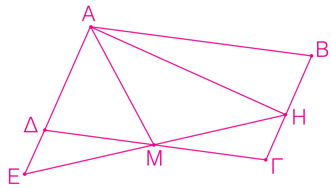
Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΔΗΓ$ $(\hat{Η} = 90^o)$, η $ΗΖ$ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε $ΗΖ = \frac{ΓΔ}{2}$.

Άρα $ΕΖ = ΗΖ$, οπότε το $\overset{\triangle}{ΕΖΗ}$ είναι ισοσκελές.

**γ.** Επειδή $ΕΖ = ΗΖ$, έχουμε $Ζ\hat{Η}Ε = Ζ\hat{Ε}Η$. Αφού $ΕΖ // ΒΓ$, είναι $Ζ\hat{Ε}Η = Ε\hat{Η}Β$ ως εντός εναλλάξ.

Άρα $Ζ\hat{Η}Ε = Ε\hat{Η}Β$, οπότε η $ΗΕ$ είναι η διχοτόμος της $Ζ\hat{Η}Γ$.

## 325 Θέμα 4 - 1787




**Δίνεται παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ με $ΑΒ = 2ΒΓ$ , τη γωνία $Α$ αμβλεία και $Μ$ το μέσο της $ΓΔ$ . Φέρουμε κάθετη στην $ΑΔ$ στο σημείο $Α$ , η οποία τέμνει την $ΒΓ$ στο $Η$ . Αν η προέκταση της $ΗΜ$ τέμνει την προέκταση της $ΑΔ$ στο $Ε$ , να αποδείξετε ότι:**

**α.** **Η $ΑΜ$ είναι διχοτόμος της γωνίας $ΔΑΒ$ .**

**β.** **Τα τμήματα $ΕΗ$ , $ΔΓ$ διχοτομούνται.**

**γ.** **$\hat{Ε} = Δ\hat{Μ}Α$**

**Λύση**

**α.** Είναι $ΔΜ = \frac{ΔΓ}{2} = \frac{ΑΒ}{2} = ΒΓ = ΑΔ$ , οπότε $Δ\hat{Α}Μ = Δ\hat{Μ}Α$ .

Επειδή $ΑΒ // ΓΔ$ , είναι $Δ\hat{Μ}Α = Μ\hat{Α}Β$ , ως εντός εναλλάξ.

Άρα $Δ\hat{Α}Μ = Μ\hat{Α}Β$ , οπότε η $ΑΜ$ είναι η διχοτόμος της $Δ\hat{Α}Β$ .

**β.** Τα $\overset{\Delta}{ΜΔΕ}$ και $\overset{\Delta}{ΜΓΗ}$ έχουν:

- $ΜΔ = ΜΓ$
- $Δ\hat{Μ}Ε = Η\hat{Μ}Γ$
- $Ε\hat{Δ}Μ = Μ\hat{Γ}Η$ , ως εντός εναλλάξ .

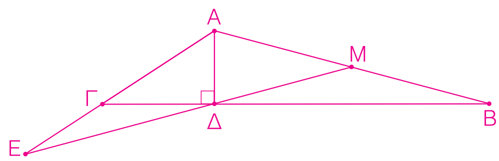
Άρα είναι ίσα (ΓΠΓ) , οπότε $ΜΕ = ΜΗ$ .

Επομένως το $Μ$ είναι το κοινό μέσο των $ΓΔ$ και $ΕΗ$ .

**γ.** Το $\overset{\Delta}{ΕΑΗ}$ είναι ορθογώνιο $(\hat{Α} = 90^\circ)$ και η $ΑΜ$ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε $ΑΜ = \frac{ΗΕ}{2} = ΜΕ$ .

Άρα $\hat{Ε} = Ε\hat{Α}Μ$ . και αφού $Ε\hat{Α}Μ = Δ\hat{Μ}Α$ έχουμε $\hat{Ε} = Δ\widehat{Μ}Α$ .

## 326 Θέμα 4 - 1881




**Έστω τρίγωνο $\overset{\Delta}{ΑΒΓ}$ με $ΑΒ > ΑΓ$ , $ΑΔ$ το ύψος του και $Μ$ το μέσο του $ΑΒ$ . Η προέκταση της $ΜΔ$ τέμνει την προέκταση της $ΑΓ$ στο σημείο $Ε$ ώστε $ΓΔ = ΓΕ$ . Να αποδείξετε ότι:**

**α.** **$\hat{Β} = \hat{Ε}$** **β.** **$\hat{Γ} = 2\hat{Β} = Α\widehat{Μ}Δ$** **γ.** **$ΓΕ < ΑΓ$**

**Λύση**

**α.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΔΒ$ η $ΔΜ$ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε $ΔΜ = \frac{ΑΒ}{2} = ΜΒ$ .

Επομένως το $\overset{\Delta}{ΔΜΒ}$ είναι ισοσκελές, άρα $\hat{Β} = Μ\hat{Δ}Β$ .

Είναι $Μ\hat{Δ}Β = Γ\hat{Δ}Ε$ ως κατακορυφήν και $Γ\hat{Δ}Ε = \hat{Ε}$ , αφού $ΓΔ = ΓΕ$ .

Άρα $\hat{Β} = \hat{Ε}$ .

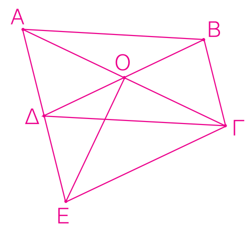
**β.** • Η γωνία $Α\hat{Γ}Β$ είναι εξωτερική του ισοσκελούς τριγώνου $ΓΕΔ$ , οπότε $Α\hat{Γ}Β = \hat{Ε} + Γ\hat{Δ}Ε = 2\hat{Ε} \overset{α.}{=} 2\hat{Β}$

• Η γωνία $Α\hat{Μ}Δ$ είναι εξωτερική του ισοσκελούς τριγώνου $ΜΔΒ$ , οπότε $Α\hat{Μ}Δ = \hat{Β} + Μ\hat{Δ}Β = 2\hat{Β}$ .

Άρα $\hat{Γ} = 2\hat{Β} = Α\widehat{Μ}Δ$

**γ.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΓΔ$ είναι $ΓΔ < ΑΓ$ είναι $ΓΔ = ΓΕ$ , οπότε $ΓΕ < ΑΓ$ .

## 327 Θέμα 4 - 1862




**Δίνεται παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ τέτοιο ώστε αν φέρουμε την κάθετη στην $ΑΓ$ στο κέντρο του $Ο$, αυτή τέμνει την προέκταση της $ΑΔ$ σε σημείο $Ε$ τέτοιο ώστε $ΔΕ = ΑΔ$.**

**Να αποδείξετε ότι:**

**α. Το τρίγωνο $ΑΕΓ$ είναι ισοσκελές.**

**β. Το τετράπλευρο $ΒΓΕΔ$ είναι παραλληλόγραμμο.**

**γ. Το τρίγωνο $ΒΟΓ$ είναι ισοσκελές.**

**Λύση**

**α.** Το $Ο$ είναι μέσο της $ΑΓ$, οπότε στο $\overset{\triangle}{ΑΕΓ}$ η $ΕΟ$ είναι διάμεσος και ύψος.
Επομένως το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ισοσκελές.

**β.** Είναι $ΒΓ // = ΑΔ$, οπότε $ΒΓ // = ΔΕ$.

Επομένως το $ΒΓΕΔ$ είναι παραλληλόγραμμο.

**γ.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΟΑΕ$ $(\hat{Ο} = 90^o)$, η $ΟΔ$ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε

$ΟΔ = \frac{ΑΕ}{2} = ΔΑ$, $(1)$.

Επειδή $ΟΔ = ΟΒ$ και $ΔΑ = ΒΓ$, από την $(1)$ έχουμε $ΟΒ = ΒΓ$.

Οπότε το $\overset{\triangle}{ΒΟΓ}$ είναι ισοσκελές.

## 328 Θέμα 4 - 1813

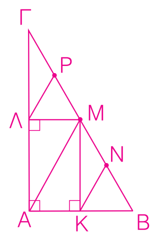
**Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ με τη γωνία $Α$ ορθή και $ΑΜ$ η διάμεσός του. Από το $Μ$ φέρουμε $ΜΚ$ κάθετη στην $ΑΒ$ και $ΜΛ$ κάθετη στην $ΑΓ$. Αν $Ν$, $Ρ$ είναι τα μέσα των $ΒΜ$ και $ΓΜ$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:**

**α.** $\mathbf{Ν\hat{Κ}Μ = Ν\hat{Μ}Κ}$

**β. Η $ΜΚ$ είναι διχοτόμος της γωνίας $Ν\hat{Μ}Α$.**

**γ.** $\mathbf{ΑΜ = ΚΝ + ΛΡ}$

**Λύση**




**α.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΚΒΜ$, η $ΚΝ$ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε

$ΚΝ = \frac{ΜΒ}{2} = ΝΜ$.

Άρα $Ν\hat{Κ}Μ = Ν\hat{Μ}Κ$.

**β.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ $(\hat{Α} = 90^o)$ η $ΑΜ$ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα,

οπότε $ΑΜ = \frac{ΒΓ}{2} = ΜΒ$.

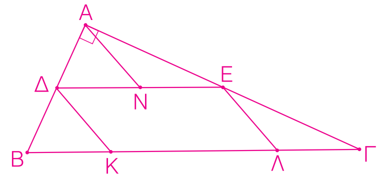
Άρα το $ΜΑΒ$ είναι ισοσκελές και επειδή το $ΜΚ$ είναι ύψος θα είναι και η διχοτόμος της $Ν\hat{Μ}Α$.

**γ.** Έχουμε $ΚΝ = \frac{ΜΒ}{2}$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΛΜΓ$, η $ΛΡ$ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, άρα $ΛΡ = \frac{ΜΓ}{2}$.

Οπότε $ΚΝ + ΛΡ = \frac{ΜΒ + ΜΓ}{2} = \frac{ΒΓ}{2} = ΑΜ$.

## 329 Θέμα 4 - 1880




**Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ με $\hat{A} = 90^o$ και $\Delta$, $E$ και $N$ τα μέσα των $AB$, $A\Gamma$ και $\Delta E$ αντίστοιχα. Στο τμήμα $B\Gamma$ θεωρούμε σημεία $K$ και $\Lambda$ ώστε $\Delta K = KB$ και $E\Lambda = \Lambda\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:**

**α.** **$\Delta\hat{K}\Lambda = 2\hat{B}$ και $E\hat{\Lambda}K = 2\hat{\Gamma}$**

**β.** **Το τετράπλευρο $\Delta E\Lambda K$ είναι παραλληλόγραμμο.**

**γ.** **$\Delta E = 2\Delta K$**

**Λύση**

**α.** • Στο τρίγωνο $B\Delta K$ είναι $\Delta K = KB$, οπότε $\hat{B} = B\hat{\Delta}K$ και η γωνία $\Delta\hat{K}\Lambda$ είναι εξωτερική, άρα $\Delta\hat{K}\Lambda = \hat{B} + B\hat{\Delta}K = 2\hat{B}$.

• Στο τρίγωνο $E\Lambda\Gamma$ είναι $E\Lambda = \Lambda\Gamma$, οπότε $\Lambda\hat{E}\Gamma = \hat{\Gamma}$ και η γωνία $E\hat{\Lambda}K$ είναι εξωτερική, άρα $E\hat{\Lambda}K = \hat{\Gamma} + \Lambda\hat{E}\Gamma = 2\hat{\Gamma}$.

**β.** Στο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ τα $\Delta$, $E$ είναι τα μέσα των $AB$, $A\Gamma$, οπότε $\Delta E // B\Gamma$, άρα $\Delta E // K\Lambda$ (1) και $\Delta E = \dfrac{B\Gamma}{2}$.

Είναι $\Delta\hat{K}\Lambda + E\hat{\Lambda}K = 2\hat{B} + 2\hat{\Gamma} = 2(\hat{B} + \hat{\Gamma}) = 2 \cdot 90^o = 180^o$.

Επειδή οι $\Delta\hat{K}\Lambda$, $E\hat{\Lambda}K$ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των $K\Delta$, $E\Lambda$ που τέμνονται από την $K\Lambda$ και είναι παραπληρωματικές, έχουμε $\Delta K // E\Lambda$ (2).

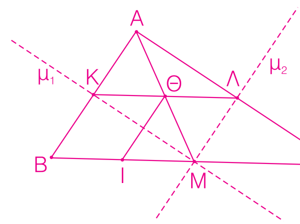
Από τις (1) και (2) έχουμε ότι το $\Delta E\Lambda K$ είναι παραλληλόγραμμο.

Είναι: • $KB = K\Delta = E\Lambda = \Lambda\Gamma$.

• $\Delta E = \dfrac{B\Gamma}{2} = \dfrac{BK + K\Lambda + \Lambda\Gamma}{2} = \dfrac{\Delta K + \Delta E + \Delta K}{2}$

Οπότε $2\Delta E = 2\Delta K + \Delta E \Leftrightarrow \Delta E = 2\Delta K$.

## 330 Θέμα 4 - 1859




**Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ και τις μεσοκαθέτους $\mu_1$, $\mu_2$ των πλευρών του $AB$ και $A\Gamma$, οι οποίες τέμνονται στο μέσο $M$ της $B\Gamma$.**

**α.** **Να αποδείξετε ότι:**

**i.** **Το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 90^o$**

**ii.** **Το τετράπλευρο $A\Lambda MK$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.**

**iii.** **$\Lambda\Theta = \dfrac{B\Gamma}{4}$, όπου $\Theta$ το σημείο τομής των $AM$ και $K\Lambda$.**

**β.** **Αν $I$ σημείο της $B\Gamma$ τέτοιο ώστε $BI = \dfrac{B\Gamma}{4}$ να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $K\Theta IB$ είναι παραλληλόγραμμο.**

**Λύση**

**α.** **i.** Επειδή $M \in \mu_1$, έχουμε $MA = MB = \dfrac{B\Gamma}{2}$.

Οπότε στο τρίγωνο $AB\Gamma$ η διάμεσος $AM$ είναι το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 90^o$.

**ii.** Στο $A\Lambda MK$ είναι $\hat{K} = \hat{A} = \hat{\Lambda} = 90^o$, οπότε είναι ορθογώνιο.

**iii.** Επειδή το $A\Lambda MK$ είναι ορθογώνιο, οι διαγώνιοί του διχοτομούνται και είναι $K\Lambda = AM$.

Οπότε $\Lambda\Theta = \dfrac{K\Lambda}{2} = \dfrac{AM}{2} = \dfrac{\frac{B\Gamma}{2}}{2} = \dfrac{B\Gamma}{4}$.

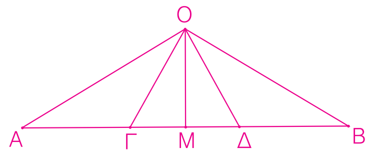
**β.** Στο $\overset{\Delta}{\text{ΑΒΓ}}$ τα Κ, Λ είναι τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ, οπότε $\text{ΚΛ} // \text{ΒΓ}$, άρα $\text{ΚΘ} // \text{ΒΙ}$.

Στο ορθογώνιο ΑΛΜΚ είναι $\text{ΚΘ} = \text{ΛΘ} = \frac{\text{ΒΓ}}{4} = \text{ΒΙ}$.

Οπότε $\text{ΚΘ} // = \text{ΒΙ}$, άρα το ΚΘΙΒ είναι παραλληλόγραμμο.

## 331 Θέμα 4 - 1710

**Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και στο εσωτερικό του θεωρούμε τα σημεία Γ, Δ ώστε να ισχύει $\text{ΑΓ} = \text{ΓΔ} = \text{ΔΒ}$. Επίσης θεωρούμε σημείο Ο εκτός του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ έτσι ώστε να ισχύουν $\text{ΟΓ} = \text{ΑΓ}$ και $\text{ΟΔ} = \text{ΔΒ}$.**




**α. Να αποδείξετε ότι:**

**i. η γωνία $\text{Γ}\hat{\text{Ο}}\text{Δ}$ είναι $60^\circ$**

**ii. οι γωνίες $\text{Ο}\hat{\text{Α}}\text{Γ}$, $\text{Ο}\hat{\text{Β}}\text{Δ}$ είναι ίσες και κάθε μια ίση με $30^\circ$.**

**β. Αν Μ το μέσον του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ, να αποδείξετε ότι $2\text{ΟΜ} = \text{ΟΑ}$.**

**Λύση**

**α. i.** Επειδή $\text{ΟΓ} = \text{ΓΔ} = \text{ΟΔ}$, το $\overset{\Delta}{\text{ΟΓΔ}}$ είναι ισόπλευρο, άρα $\text{Γ}\hat{\text{Ο}}\text{Δ} = 60^\circ$.

**ii.** Επειδή το τρίγωνο ΟΓΔ είναι ισόπλευρο είναι $\text{Ο}\hat{\text{Γ}}\text{Δ} = \text{Ο}\hat{\text{Δ}}\text{Γ} = 60^\circ$

- Στο τρίγωνο ΓΟΑ είναι $\text{ΟΓ} = \text{ΑΓ}$, οπότε $\text{Γ}\hat{\text{Ο}}\text{Α} = \hat{\text{Α}}$ και η γωνία $\text{Ο}\hat{\text{Γ}}\text{Δ}$ είναι εξωτερική, άρα $\text{Ο}\hat{\text{Γ}}\text{Δ} = \hat{\text{Α}} + \text{Γ}\hat{\text{Ο}}\text{Α} \Leftrightarrow 60^\circ = 2\hat{\text{Α}} \Leftrightarrow \hat{\text{Α}} = 30^\circ$

- Στο τρίγωνο ΒΟΔ είναι $\text{ΟΔ} = \text{ΔΒ}$, οπότε $\text{Δ}\hat{\text{Ο}}\text{Β} = \hat{\text{Β}}$ και η γωνία $\text{Ο}\hat{\text{Δ}}\text{Γ}$ είναι εξωτερική, άρα $\text{Ο}\hat{\text{Δ}}\text{Γ} = \hat{\text{Β}} + \text{Δ}\hat{\text{Ο}}\text{Β} \Leftrightarrow 60^\circ = 2\hat{\text{Β}} \Leftrightarrow \hat{\text{Β}} = 30^\circ$.

Άρα $\text{Ο}\hat{\text{Α}}\text{Γ} = \text{Ο}\hat{\text{Β}}\text{Δ} = 30^\circ$.

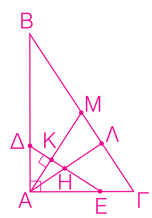
**β.** Επειδή $\hat{\text{Α}} = \hat{\text{Β}}$ το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές με $\text{ΟΑ} = \text{ΟΒ}$. Στο ισοσκελές τρίγωνο ΟΑΒ η διάμεσος ΟΜ είναι και ύψος, άρα $\text{ΟΜ} \perp \text{ΑΒ}$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΜΟΑ $(\hat{\text{Μ}} = 90^\circ)$ είναι $\hat{\text{Α}} = 30^\circ$, οπότε $\text{ΟΜ} = \frac{\text{ΟΑ}}{2} \Leftrightarrow 2\text{ΟΜ} = \text{ΟΑ}$.

## 332 Θέμα 4 - 1806

**Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με τη γωνία Α ορθή. Φέρουμε τη διάμεσό του ΑΜ και σε τυχαίο σημείο Κ αυτής φέρουμε κάθετη στην ΑΜ η οποία τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα. Αν Η είναι το μέσο του ΔΕ να αποδείξετε ότι:**

**α. $\hat{\text{Β}} = \text{Β}\hat{\text{Α}}\text{Μ}$** **β. $\text{Α}\hat{\text{Δ}}\text{Η} = \text{Δ}\hat{\text{Α}}\text{Η}$** **γ. Η ευθεία ΑΗ τέμνει κάθετα τη ΒΓ.**

**Λύση**




**α.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $(\hat{\text{Α}} = 90^\circ)$ η ΑΜ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα.

Οπότε $\text{ΑΜ} = \frac{\text{ΒΓ}}{2} = \text{ΜΒ}$, άρα $\hat{\text{Β}} = \text{Β}\hat{\text{Α}}\text{Μ}$.

**β.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΕ $(\hat{\text{Α}} = 90^\circ)$, η ΑΗ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα.

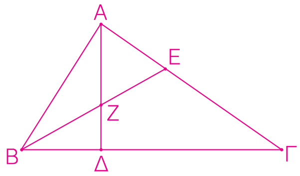
Οπότε $\text{ΑΗ} = \frac{\text{ΔΕ}}{2} = \text{ΗΔ}$, άρα $\text{Α}\hat{\text{Δ}}\text{Η} = \text{Δ}\hat{\text{Α}}\text{Η}$.

**γ.** Έστω ότι η ΑΗ τέμνει την ΒΓ στο Λ.

Στο τρίγωνο ΑΒΛ είναι $\text{Β}\hat{\text{Α}}\text{Λ} + \hat{\text{Β}} = \text{Δ}\hat{\text{Α}}\text{Η} + \text{Β}\hat{\text{Α}}\text{Μ} = \text{Α}\hat{\text{Δ}}\text{Κ} + \text{Δ}\hat{\text{Α}}\text{Κ} = 90^\circ$, αφού το τρίγωνο ΚΑΔ είναι ορθογώνιο.

Άρα $\text{Β}\hat{\text{Λ}}\text{Α} = 90^\circ$, οπότε $\text{ΑΗ} \perp \text{ΒΓ}$.

## 333 Θέμα 4 - 1713




**Σε τρίγωνο $ΑΒΓ$ ισχύει $\hat{Α}+\hat{Γ}=2\hat{Β}$ και έστω $ΑΔ$ ύψος και $ΒΕ$ διχοτόμος του τριγώνου που τέμνονται στο $Ζ$.**

**α. Να αποδείξετε ότι:**

**i.** $\hat{Β}=60^\circ$ **και** $ΑΖ=ΒΖ$ **ii.** $ΑΔ=\dfrac{3}{2}ΒΖ$

**β. Αν είναι γνωστό ότι το τρίγωνο $ΑΖΕ$ είναι ισόπλευρο, να υπολογίσετε τις άλλες γωνίες του τριγώνου $ΑΒΓ$.**

**Λύση**

**α. i.** Είναι $\hat{Α}+\hat{Β}+\hat{Γ}=180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{Β}+\hat{Β}=180^\circ \Leftrightarrow 3\hat{Β}=180^\circ \Leftrightarrow \hat{Β}=60^\circ$.

Οπότε $Α\hat{Β}Ζ=\dfrac{\hat{Β}}{2}=30^\circ$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΔ$ είναι $\hat{Β}+Β\hat{Α}Δ=90^\circ \Leftrightarrow 60^\circ+Β\hat{Α}Ζ=90^\circ \Leftrightarrow Β\hat{Α}Ζ=30^\circ$.

Επειδή $Α\hat{Β}Ζ=Β\hat{Α}Ζ$, το $\overset{\Delta}{ΖΑΒ}$ είναι ισοσκελές με $ΑΖ=ΒΖ$.

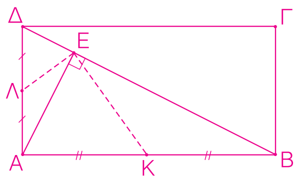
**ii.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΔΒΖ$ $(\hat{Δ}=90^\circ)$ είναι $Ζ\hat{Β}Δ=30^\circ$,

οπότε $ΖΔ=\dfrac{ΒΖ}{2} \Leftrightarrow ΑΔ-ΑΖ=\dfrac{ΒΖ}{2} \Leftrightarrow ΑΔ-ΒΖ=\dfrac{ΒΖ}{2} \Leftrightarrow 2ΑΔ-2ΒΖ=ΒΖ \Leftrightarrow 2ΑΔ=3ΒΖ \Leftrightarrow ΑΔ=\dfrac{3}{2}ΒΖ$

**β.** Επειδή το $\overset{\Delta}{ΑΖΕ}$ είναι ισόπλευρο, έχουμε $Ζ\hat{Α}Ε=60^\circ$, οπότε:

- $\hat{Α}=30^\circ+60^\circ=90^\circ$
- $\hat{Α}+\hat{Β}+\hat{Γ}=180^\circ \Leftrightarrow 90^\circ+60^\circ+\hat{Γ}=180^\circ \Leftrightarrow \hat{Γ}=30^\circ$

## 334 Θέμα 4 - 1763




**Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$. Από την κορυφή $Α$ φέρουμε $ΑΕ \perp ΒΔ$. Έστω $Κ$, $Λ$ τα μέσα των πλευρών $ΑΒ$ και $ΑΔ$ αντιστοίχως, τότε:**

**α. Να αποδείξετε ότι:**

**i.** $Κ\hat{Ε}Λ=90^\circ$

**ii.** $ΚΛ=\dfrac{ΑΓ}{2}$

**β. Αν $Β\hat{Α}Γ=30^\circ$, να αποδείξετε ότι $ΚΛ=ΒΓ$.**

**Λύση**

**α. i.** Στα ορθογώνια τρίγωνα $ΕΑΒ$ και $ΕΑΔ$ $(\hat{Ε}=90^\circ)$, οι $ΕΚ$ και $ΕΛ$ είναι διάμεσοι προς την υποτείνουσα.

Οπότε $ΕΚ=\dfrac{ΑΒ}{2}=ΑΚ$ και $ΕΛ=\dfrac{ΑΔ}{2}=ΑΛ$.

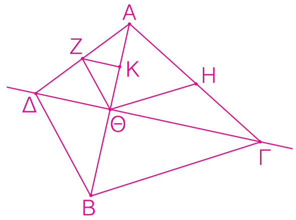
Άρα τα τρίγωνα $ΚΕΑ$ και $ΛΕΑ$ είναι ισοσκελή, οπότε $Α\hat{Ε}Κ=Ε\hat{Α}Κ$ και $Λ\hat{Ε}Α=Ε\hat{Α}Λ$.

Είναι $Κ\hat{Ε}Λ=Κ\hat{Ε}Α+Λ\hat{Ε}Α=Ε\hat{Α}Κ+Ε\hat{Α}Λ=Κ\hat{Α}Λ=90^\circ$.

**ii.** Στο $\overset{\Delta}{ΑΒΔ}$ τα $Κ$, $Λ$ είναι τα μέσα των $ΑΒ$, $ΑΔ$, οπότε $ΚΛ=\dfrac{ΒΔ}{2}$. Επειδή το $ΑΒΓΔ$ είναι ορθογώνιο έχουμε $ΒΔ=ΑΓ$, οπότε $ΚΛ=\dfrac{ΑΓ}{2}$.

**β.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΒΑΓ$ $(\hat{Β}=90^\circ)$ έχουμε $Β\hat{Α}Γ=30^\circ$, οπότε $ΒΓ=\dfrac{ΑΓ}{2}\overset{α.ii.}{=}ΚΛ$.

## 335 Θέμα 4 - 1866




**Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $ΑΒΓ$. Με βάση την $ΑΒ$ κατασκευάζουμε ισοσκελές τρίγωνο $ΑΔΒ$, εκτός του τριγώνου $ΑΒΓ$, με γωνία $\hat{Δ}=120^o$. Θεωρούμε τα μέσα $Ζ$ και $Η$ των πλευρών $ΑΔ$ και $ΑΓ$ αντίστοιχα.**

**α. Να αποδείξετε ότι η $ΔΓ$ είναι μεσοκάθετος του $ΑΒ$.**

**β. Αν η $ΔΓ$ τέμνει την $ΑΒ$ στο $Θ$, να αποδείξετε ότι η γωνία $Ζ\hat{Θ}Η$ είναι ορθή.**

**γ. Αν η $ΖΚ$ είναι η κάθετη στην $ΑΒ$ από το σημείο $Ζ$, να αποδείξετε ότι $ΖΚ=\dfrac{ΑΔ}{4}$.**

### Λύση

**α.** Είναι:
- $ΔΑ=ΔΒ$, αφού το τρίγωνο $ΔΑΒ$ είναι ισοσκελές
- $ΓΑ=ΓΒ$, αφού το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισόπλευρο

Άρα η $ΔΓ$ είναι η μεσοκάθετος του $ΑΒ$.

**β.** Επειδή η ΓΔ είναι μεσοκάθετος του ΑΒ, θα είναι και διχοτόμος των γωνιών $\hat{Δ}$ και $\hat{Γ}$, δηλαδή $Α\hat{Δ}Θ=Θ\hat{Δ}Β=60^o$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΘΔ η ΘΖ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, άρα $ΘΖ=\dfrac{ΑΔ}{2}=ΖΑ$.

Οπότε $Ζ\hat{Θ}Δ=Α\hat{Δ}Θ=60^o$.

Στο ΑΘΓ, είναι: $Α\hat{Γ}Θ+Θ\hat{Α}Γ=90^o \Leftrightarrow Α\hat{Γ}Θ+60^o=90^o \Leftrightarrow Α\hat{Γ}Θ=30^o$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΘΓ η ΘΗ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, άρα $ΘΗ=\dfrac{ΑΓ}{2}=ΗΓ$.

Οπότε $Η\hat{Θ}Γ=Α\hat{Γ}Θ=30^o$.

Είναι $Ζ\hat{Θ}Δ+Ζ\hat{Θ}Η+Η\hat{Θ}Γ=180^o \Leftrightarrow 60^o+Ζ\hat{Θ}Η+30^o=180^o \Leftrightarrow Ζ\hat{Θ}Η=90^o$.

2ος τρόπος

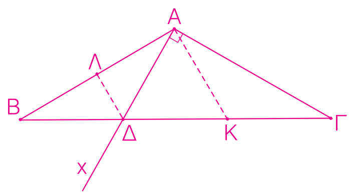
- Στο ισοσκελές τρίγωνο $ΔΑΒ$ έχουμε $\hat{Δ}=120^o$, οπότε $Δ\hat{Β}Α=30^o$, άρα $Δ\hat{Β}Γ=30^o+60^o=90^o$.
- Στο $\overset{\triangle}{ΑΔΒ}$, τα $Ζ$, $Θ$ είναι τα μέσα των $ΑΔ$, $ΑΒ$, οπότε $ΖΘ // ΒΔ$
- Στο $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$, τα $Θ$, $Η$ είναι τα μέσα των $ΑΒ$, $ΑΓ$, οπότε $ΘΗ // ΒΓ$

Επειδή $ΔΒ \perp ΒΓ$ είναι και $ΖΘ \perp ΘΗ$, οπότε $Ζ\hat{Θ}Η=90^o$.

**γ.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΘΔ$ είναι $Θ\hat{Δ}Α+Δ\hat{Α}Θ=90^o \Leftrightarrow 60^o+Δ\hat{Α}Θ=90^o \Leftrightarrow Δ\hat{Α}Θ=30^o$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΚΑΖ$ $(\hat{Κ}=90^o)$, είναι $\hat{Α}=30^o$, οπότε $ΖΚ=\dfrac{ΑΖ}{2}=\dfrac{ΑΔ}{4}$.

## 336 Θέμα 4 - 1871




**Έστω ισοσκελές τρίγωνο $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$ με $\hat{Α}=120^o$. Φέρουμε ημιευθεία $Αx$ κάθετη στην $ΑΓ$ στο $Α$, η οποία τέμνει τη $ΒΓ$ στο $Δ$. Έστω $Λ$ το μέσο του $ΑΒ$ και $Κ$ το μέσο του $ΔΓ$. Να αποδείξετε ότι:**

**α. Το τρίγωνο $\overset{\triangle}{ΑΔΒ}$ είναι ισοσκελές.**

**β. $ΔΓ=2ΔΒ$**

**γ. $ΛΔ // ΑΚ$**

**δ. $ΑΚ=2ΛΔ$**

### Λύση

**α.** Επειδή το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελές με $\hat{Α} = 120^o$, έχουμε:

- $\hat{Β} = \hat{Γ}$
- $\hat{Α} + \hat{Β} + \hat{Γ} = 180^o \Leftrightarrow 120^o + \hat{Β} + \hat{Β} = 180^o \Leftrightarrow 2\hat{Β} = 60^o \Leftrightarrow \hat{Β} = 30^o$
- $\hat{Β} = \hat{Γ} = 30^o$
- $Β\hat{Α}Δ = 120^o - 90^o = 30^o$

Άρα $\hat{Β} = Β\hat{Α}Δ$, οπότε το τρίγωνο $ΑΔΒ$ είναι ισοσκελές.

**β.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΔΓ$ $(Δ\hat{Α}Γ = 90^o)$, έχουμε $\hat{Γ} = 30^o$, οπότε $ΑΔ = \dfrac{ΓΔ}{2} \overset{α.}{\Leftrightarrow} ΒΔ = \dfrac{ΓΔ}{2} \Leftrightarrow ΓΔ = 2ΒΔ$.

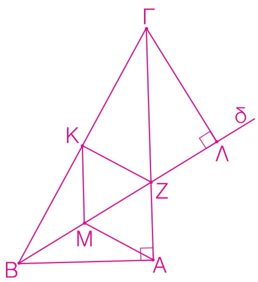
**γ.** Είναι $ΔΓ = 2ΔΒ \Leftrightarrow 2ΔΚ = 2ΔΒ \Leftrightarrow ΔΚ = ΔΒ$.

Στο $\overset{\triangle}{ΑΒΚ}$ τα $Λ$, $Δ$ είναι τα μέσα των $ΑΒ$, $ΒΚ$, οπότε $ΛΔ \,//\, ΑΚ$.

**δ.** Από το **γ.** ερώτημα είναι και $ΛΔ = \dfrac{ΑΚ}{2} \Leftrightarrow ΑΚ = 2ΛΔ$.

## 337 Θέμα 4 - 1872

**Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$ με $\hat{Α} = 90^o$ και $\hat{Β} = 60^o$. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{Β}$ τέμνει την $ΑΓ$ στο $Ζ$. Τα σημεία $Μ$ και $Κ$ είναι τα μέσα των $ΒΖ$ και $ΒΓ$ αντίστοιχα. Αν το τμήμα $ΓΛ$ είναι κάθετο στη διχοτόμο $Βδ$ να αποδείξετε:**




**α.** **Το τρίγωνο $\overset{\triangle}{ΒΖΓ}$ είναι ισοσκελές.**

**β.** **Το τετράπλευρο $ΑΜΚΖ$ είναι ρόμβος.**

**γ.** $\mathbf{ΓΖ = 2ΖΑ}$

**δ.** $\mathbf{ΒΛ = ΑΓ}$

**Λύση**

**α.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ $(\hat{Α} = 90^o)$ έχουμε $\hat{Β} = 60^o$ και $\hat{Β} + \hat{Γ} = 90^o \Leftrightarrow 60^o + \hat{Γ} = 90^o \Leftrightarrow \hat{Γ} = 30^o$.

Είναι $Γ\hat{Β}Ζ = \dfrac{\hat{Β}}{2} = 30^o$, οπότε $Γ\hat{Β}Ζ = \hat{Γ}$, άρα το τρίγωνο $ΒΖΓ$ είναι ισοσκελές.

**β.** • Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΖ$ $(\hat{Α} = 90^o)$ είναι $Ζ\hat{Β}Α = \dfrac{\hat{Β}}{2} = 30^o$ και $ΑΜ$ η διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε $ΑΖ = \dfrac{ΒΖ}{2}$ και $ΑΜ = \dfrac{ΒΖ}{2}$.

Άρα $ΑΜ = ΑΖ$.

• Στο $\overset{\triangle}{ΒΓΖ}$ τα $Κ$, $Μ$ είναι τα μέσα των $ΒΓ$, $ΒΖ$, οπότε $ΚΜ \,//\, ΓΖ$ και $ΚΜ = \dfrac{ΓΖ}{2} \overset{α.}{=} \dfrac{ΒΖ}{2} = ΑΖ$.

Άρα $ΚΜ \,//=\, ΑΖ$, οπότε το $ΑΜΚΖ$ είναι παραλληλόγραμμο και επειδή $ΑΜ = ΑΖ$, είναι ρόμβος.

**γ.** Στο **β.** ερώτημα έχουμε $ΚΜ = \dfrac{ΓΖ}{2} \Leftrightarrow ΖΑ = \dfrac{ΓΖ}{2} \Leftrightarrow ΓΖ = 2ΖΑ$.

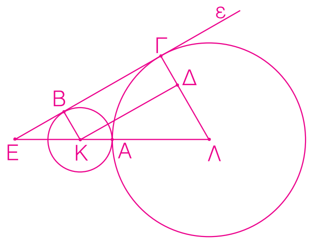
**δ.** Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΛΒΓ$ $(\hat{Λ} = 90^o)$ έχουν:

- $ΒΓ$ κοινή
- $Β\hat{Γ}Α = Γ\hat{Β}Λ$ $(= 30^o)$

Οπότε είναι ίσα, άρα $ΒΛ = ΑΓ$.

## 338 Θέμα 4 - 1721

**Οι κύκλοι $(K, \rho)$ και $(\Lambda, 3\rho)$ εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο $A$. Μία ευθεία $\varepsilon$ εφάπτεται εξωτερικά και στους δύο κύκλους στα σημεία $B$ και $\Gamma$ αντίστοιχα και τέμνει την προέκταση της διακέντρου $K\Lambda$ στο σημείο $E$. Φέρουμε από το σημείο $K$ παράλληλο τμήμα στην $\varepsilon$ που τέμνει το τμήμα $\Lambda\Gamma$ στο $\Delta$.**




**α. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $B\Gamma\Delta K$ είναι ορθογώνιο.**

**β. Να αποδείξετε ότι η γωνία $\Delta\hat{K}\Lambda$ είναι $30^o$.**

**γ. Να αποδείξετε ότι το τμήμα $E\Lambda = 6\rho$, όπου $\rho$ η ακτίνα του κύκλου $(K, \rho)$.**

**Λύση**

**α.** Οι ακτίνες στα σημεία επαφής είναι κάθετες στην εφαπτόμενη, άρα $KB \perp \varepsilon$ και $\Lambda\Gamma \perp \varepsilon$.
Είναι $\Delta\Gamma \perp B\Gamma$ και $K\Delta // B\Gamma$, οπότε $K\Delta \perp \Gamma\Delta$.

Άρα στο $B\Gamma\Delta K$ είναι $\hat{B} = \hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = 90^o$, οπότε είναι ορθογώνιο.

**β.** Επειδή το $B\Gamma\Delta K$ είναι ορθογώνιο, έχουμε $\Gamma\Delta = BK = \rho$.

Είναι:
- $\Lambda\Delta = \Lambda\Gamma - \Gamma\Delta = 3\rho - \rho = 2\rho$.
- $K\Lambda = KA + A\Lambda = \rho + 3\rho = 4\rho$.

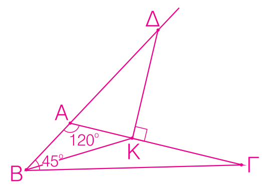
Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta K\Lambda$ $(\hat{\Delta} = 90^o)$ είναι $\Lambda\Delta = 2\rho = \dfrac{4\rho}{2} = \dfrac{K\Lambda}{2}$, οπότε $\Delta\hat{K}\Lambda = 30^o$.

**γ.** Επειδή $K\Delta // B\Gamma$, έχουμε $\hat{E} = \Delta\hat{K}\Lambda = 30^o$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Gamma E\Lambda$ $(\hat{\Gamma} = 90^o)$ είναι $\hat{E} = 30^o$, οπότε $\Gamma\Lambda = \dfrac{E\Lambda}{2} \Leftrightarrow 3\rho = \dfrac{E\Lambda}{2} \Leftrightarrow E\Lambda = 6\rho$.

## 339 Θέμα 4 - 1761

**Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με γωνία $A$ ίση με $120^o$ και γωνία $B$ είναι ίση με $45^o$. Στην προέκταση της $BA$ προς το $A$, παίρνουμε τμήμα $A\Delta = 2AB$. Από το $\Delta$ φέρνουμε την κάθετη στην $A\Gamma$ που την τέμνει στο σημείο $K$. Να αποδείξετε ότι:**




**α. Η γωνία $A\Delta K$ είναι ίση με $30^o$.**

**β. Το τρίγωνο $KAB$ είναι ισοσκελές.**

**γ. Αν $Z$ το μέσο της $\Delta A$, τότε $Z\hat{K}B = 90^o$.**

**δ. Το σημείο $K$ ανήκει στη μεσοκάθετο του τμήματος $B\Delta$.**

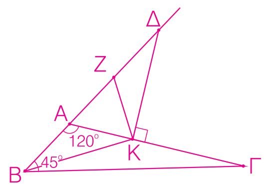
**Λύση**

**α.** Είναι $\Delta\hat{A}K = 180^o - 120^o = 60^o$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\Delta}{KA\Delta}$ είναι $A\hat{\Delta}K + \Delta\hat{A}K = 90^o \Leftrightarrow A\hat{\Delta}K + 60^o = 90^o \Leftrightarrow A\hat{\Delta}K = 30^o$.

**β.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο $KA\Delta$ $(\hat{K} = 90^o)$, είναι $\hat{\Delta} = 30^o$, οπότε $AK = \dfrac{A\Delta}{2} = \dfrac{2AB}{2} = AB$.

Άρα το $\overset{\Delta}{KAB}$ είναι ισοσκελές.




**γ.** Το $Z$ είναι το μέσο της $A\Delta$, οπότε $AZ = \dfrac{A\Delta}{2} = AB$.

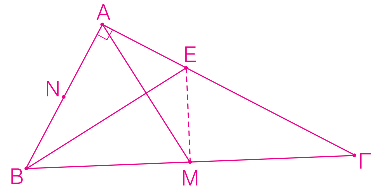
Οπότε στο $\overset{\Delta}{ZKB}$ η $KA$ είναι διάμεσος και $KA = AB = \dfrac{BZ}{2}$, άρα $Z\hat{K}B = 90^o$.

**δ.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο $KA\Delta$, η $KZ$ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, άρα $KZ = \dfrac{A\Delta}{2} = AK$

Τα ορθογώνια τρίγωνα $KA\Delta$ και $KZB$ έχουν:
- $A\Delta = BZ$
- $AK = KZ$

Άρα είναι ίσα, οπότε $KB = K\Delta$. Επομένως το $K$ ανήκει στη μεσοκάθετο του $B\Delta$.

## 340 Θέμα 4 - 1835




**Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ $(\hat{A}=90^o)$ και $\hat{\Gamma}=30^o$ με $M$ και $N$ τα μέσα των πλευρών $B\Gamma$ και $AB$ αντίστοιχα. Έστω ότι η μεσοκάθετος της πλευράς $B\Gamma$ τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο $E$.**

**α. Να αποδείξετε ότι:**

**i. η $BE$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$** **ii. $AE=\dfrac{\Gamma E}{2}$**

**iii. η $BE$ είναι μεσοκάθετος της διαμέσου $AM$.**

**β. Αν $A\Delta$ είναι το ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$ που τέμνει την $BE$ στο $H$, να αποδείξετε ότι τα σημεία $M$, $H$ και $N$ είναι συνευθειακά.**

**Λύση**

**α. i.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ $(\hat{A}=90^o)$ έχουμε $\hat{\Gamma}=30^o$, οπότε $AB=\dfrac{B\Gamma}{2}=BM$.

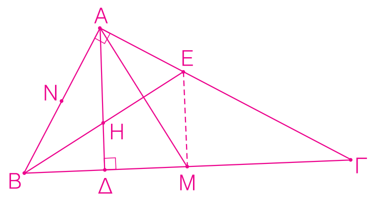
Τα ορθογώνια τρίγωνα $ABE$, $MBE$ έχουν:
- $AB=MB$
- $BE$ κοινή

Οπότε είναι ίσα, επομένως $A\hat{B}E=E\hat{B}M$. Άρα η $BE$ είναι η διχοτόμος της $\hat{B}$.

**ii.** Επειδή η $BE$ είναι η διχοτόμος της $\hat{B}$, έχουμε $AE=EM$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $EM\Gamma$ $(\hat{M}=90^o)$ είναι $\hat{\Gamma}=30^o$, οπότε $EM=\dfrac{\Gamma E}{2}\Leftrightarrow AE=\dfrac{\Gamma E}{2}$.

**iii.** Επειδή $BA=BM$ και $EA=EM$, η $BE$ είναι η μεσοκάθετος του $AM$.

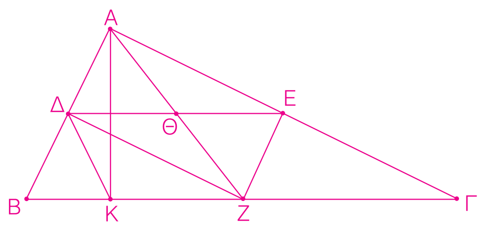
**β.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ $(\hat{A}=90^o)$ η $AM$ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε $AM=\dfrac{B\Gamma}{2}=MB$.




Επομένως το $\overset{\Delta}{MAB}$ είναι ισοσκελές με κορυφή $M$, άρα η διάμεσος $MN$ είναι και ύψος.

Αφού επιπλέον το $H$ είναι το ορθόκεντρο του $\overset{\Delta}{ABM}$ το ύψος $MN$ διέρχεται από το $H$, άρα τα $M, H$ και $N$ είναι συνευθειακά.

## 341 Θέμα 4 - 1782




**Θεωρούμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ $(\hat{A}=90^o)$, τα μέσα $\Delta$, $E$, $Z$ των πλευρών του και το ύψος του $AK$. Έστω $\Theta$ είναι το σημείο τομής των $AZ$ και $\Delta E$.**

**α. Να αποδείξετε ότι:**

**i. Το τετράπλευρο $A\Delta ZE$ είναι ορθογώνιο.**

**ii. $A\Theta=\Theta E=\dfrac{B\Gamma}{4}$**

**β. Αν επιπλέον είναι η γωνία $\hat{\Gamma}=30^o$,**

**i. να βρείτε τη γωνία $A\hat{Z}B$**

**ii. να αποδείξετε ότι $BK=\dfrac{B\Gamma}{4}$.**

**Λύση**

**α. i.** Επειδή τα $\Delta$, $E$, $Z$ είναι τα μέσα των πλευρών του $AB\Gamma$ έχουμε $EZ // AB$, $\Delta Z // A\Gamma$, οπότε το $A\Delta ZE$ είναι παραλληλόγραμμο. Επιπλέον είναι $\hat{A}=90^o$, οπότε το $A\Delta ZE$ είναι ορθογώνιο.

**ii.** Επειδή το $ΑΔΖΕ$ είναι ορθογώνιο, έχουμε $ΑΖ = ΔΕ$, οπότε $ΑΘ = ΘΕ$. Στο $\overset{\Delta}{ΑΖΓ}$, τα $Θ$, $Ε$ είναι τα μέσα πλευρών του, οπότε $ΘΕ = \frac{ΖΓ}{2} = \frac{\frac{ΒΓ}{2}}{2} = \frac{ΒΓ}{4}$.

**β. i.** Στο ορθογώνιο $\overset{\Delta}{ΑΒΓ}$, η $ΑΖ$ είναι διάμεσος, οπότε $ΑΖ = \frac{ΒΓ}{2} = ΖΓ$, άρα $\hat{Γ} = Γ\hat{Α}Ζ$. Η $Α\hat{Ζ}Β$ είναι εξωτερική του $\overset{\Delta}{ΑΖΓ}$, οπότε $Α\hat{Ζ}Β = \hat{Γ} + Γ\hat{Α}Ζ = 2\hat{Γ} = 60^{o}$.

**ii.** Επειδή $Α\hat{Ζ}Β = 60^{o}$ και $ΑΖ = ΖΒ$ το $\overset{\Delta}{ΑΒΖ}$ είναι ισόπλευρο, οπότε το ύψος του $ΑΚ$ είναι και διάμεσος.

Άρα $ΒΚ = \frac{ΒΖ}{2} = \frac{\frac{ΒΓ}{2}}{2} = \frac{ΒΓ}{4}$.

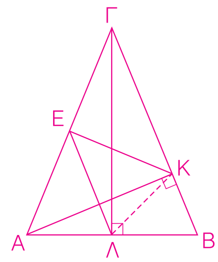
## 342 Θέμα 4 - 1895

**Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ΑΓΒ$ $(ΑΓ = ΓΒ)$. Φέρουμε τα ύψη του $ΑΚ$ και $ΓΛ$. Αν $Ε$ είναι το μέσο της πλευράς $ΑΓ$, να αποδείξετε ότι:**

**α. Το τρίγωνο $ΚΕΛ$ είναι ισοσκελές.**

**β. Η $ΚΛ$ είναι διχοτόμος της γωνίας $ΒΚΕ$.**

**Λύση**



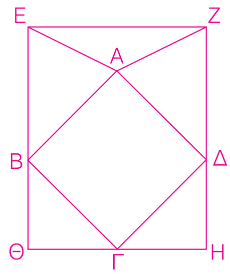

**α.** Στα ορθογώνια τρίγωνα $ΚΑΓ$ $(\hat{Κ} = 90^{o})$ και $ΛΓΑ$ $(\hat{Λ} = 90^{o})$, οι $ΚΕ$, $ΛΕ$ είναι διάμεσοι προς την υποτείνουσα, οπότε $ΚΕ = \frac{ΑΓ}{2}$ (2) και $ΛΕ = \frac{ΑΓ}{2}$.

Άρα $ΚΕ = ΛΕ$, οπότε το τρίγωνο $ΚΕΛ$ είναι ισοσκελές.

**β.** Είναι:
- $Λ\hat{Κ}Ε = Κ\hat{Λ}Ε$, αφού $ΚΕ = ΛΕ$
- $Λ$, $Ε$ μέσα $ΑΒ$, $ΑΓ$ οπότε $ΕΛ // ΒΓ$, άρα $Κ\hat{Λ}Ε = Λ\hat{Κ}Β$, ως εντός εναλλάξ.

Επομένως $Λ\hat{Κ}Ε = Λ\hat{Κ}Β$. Άρα η $ΚΛ$ είναι διχοτόμος της γωνίας $Β\hat{Κ}Ε$.

## 343 Θέμα 4 - 1850




**Στο διπλανό σχήμα το ορθογώνιο $ΕΖΗΘ$ παριστάνει ένα τραπέζι του μπιλιάρδου.**
**Μια μπάλα του μπιλιάρδου ξεκινάει από σημείο $Α$ της μεσοκαθέτου του τμήματος $ΕΖ$ και χτυπώντας διαδοχικά στους τοίχους $ΕΘ$, $ΘΗ$, $ΗΖ$ στα σημεία $Β$, $Γ$ και $Δ$ αντίστοιχα, καταλήγει στο σημείο εκκίνησης $Α$. Για τη διαδρομή $Α \to Β \to Γ \to Δ \to Α$ που ακολουθεί η μπάλα ισχύει ότι κάθε γωνία πρόσπτωσης σε τοίχο (π.χ η γωνία $ΑΒΕ$) είναι ίση με κάθε γωνία ανάκλασης σε τοίχο (π.χ η γωνία $ΘΒΓ$) και η κάθε μια απ' αυτές είναι $45^{o}$.**

**α. Να αποδείξετε ότι:**

**i. Τα τρίγωνα $ΑΕΒ$ και $ΑΖΔ$ είναι ίσα.**

**ii. Η διαδρομή $ΑΒΓΔΑ$ της μπάλας σχηματίζει τετράγωνο.**

**β. Αν η $ΑΖ$ είναι διπλάσια από την απόσταση του $Α$ από τον τοίχο $ΕΖ$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $ΑΕΖ$.**

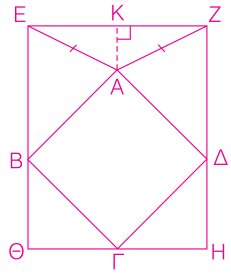
**Λύση**

**α. i.** Επειδή το σημείο $Α$ βρίσκεται στη μεσοκάθετο του $ΕΖ$, έχουμε $ΑΕ = ΑΖ$, οπότε $Α\hat{Ε}Ζ = Α\hat{Ζ}Ε$.
Επομένως $Α\hat{Ε}Β = Α\hat{Ζ}Δ$, ως διαφορές ίσων γωνιών.

Τα τρίγωνα $ΑΕΒ$ και $ΑΖΔ$ έχουν $Α\hat{Ε}Β = Α\hat{Ζ}Δ$ και $Ε\hat{Β}Α = Ζ\hat{Δ}Α = 45^{o}$, οπότε έχουν και τις τρίτες γωνίες τους ίσες, δηλαδή $Ε\hat{Α}Β = Ζ\hat{Α}Δ$.

Τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΖΔ έχουν:
- ΑΕ = ΑΖ
- $A\hat{E}B = A\hat{Z}\Delta$
- $E\hat{A}B = Z\hat{A}\Delta$

Άρα είναι ίσα (ΓΠΓ).

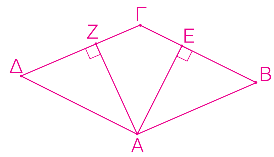



**ii.** Επειδή τα τρίγωνα ΕΑΒ και ΖΑΔ είναι ίσα, έχουμε ΑΒ = ΑΔ .
Οι γωνίες πρόσκρουσης και ανάκλασης είναι $45^o$ , οπότε
$A\hat{B}E = \Theta\hat{B}\Gamma = B\hat{\Gamma}\Theta = \Delta\hat{\Gamma}H = H\hat{\Delta}\Gamma = A\hat{\Delta}Z = 45^o$
Άρα $A\hat{B}\Gamma = B\hat{\Gamma}\Delta = \Gamma\hat{\Delta}A = 90^o$ .
Επομένως το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο.
Το ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχει δύο διαδοχικές πλευρές του ίσες, επομένως είναι τετράγωνο.

**β.** Έστω ΑΚ η απόσταση του Α από την πλευρά ΕΖ. Είναι $AZ = 2AK \Leftrightarrow AK = \frac{AZ}{2}$ .

Άρα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΚΖ μια κάθετη πλευρά ισούται με το μισό της υποτείνουσας, επομένως $A\hat{Z}K = 30^o$ .
Επειδή ΑΕ = ΑΖ έχουμε $A\hat{Z}K = A\hat{E}Z = 30^o$ .
Στο τρίγωνο ΑΕΖ , είναι $E\hat{A}Z + A\hat{E}Z + A\hat{Z}K = 180^o \Leftrightarrow E\hat{A}Z + 30^o + 30^o = 180^o \Leftrightarrow E\hat{A}Z = 120^o$

## 344 Θέμα 4 - 1742




**Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος είναι ρόμβος. Θεωρούμε $AZ \perp \Gamma\Delta$ και $AE \perp \Gamma B$ . Να αποδείξετε ότι:**

**α. Το τρίγωνο ΖΑΕ είναι ισοσκελές.**

**β. Η ευθεία ΑΓ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΖΕ .**

**γ. Αν Μ και Ν τα μέσα των πλευρών ΑΔ και ΑΒ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι ΜΝ // ΖΕ και ΖΜ = ΕΝ .**

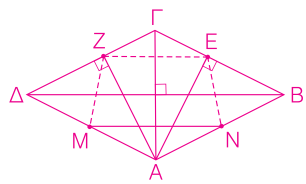
**Λύση**

**α.** Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΖΔ και ΑΕΒ έχουν:
- ΑΒ = ΑΔ , ως πλευρές ρόμβου
- $\hat{B} = \hat{\Delta}$ , ως απέναντι γωνίες ρόμβου

Άρα είναι ίσα, οπότε ΑΖ = ΑΕ , επομένως το τρίγωνο ΖΑΕ είναι ισοσκελές.

**β.** Επειδή τα $\overset{\Delta}{ZA\Delta}$ και $\overset{\Delta}{EAB}$ είναι ίσα, έχουμε ΔΖ = ΒΕ .
Οπότε και ΓΖ = ΓΕ , αφού ΓΔ = ΓΒ .
Επειδή ΑΖ = ΑΕ και ΓΖ = ΓΕ , η ΑΓ είναι η μεσοκάθετος του ΖΕ .

**γ.** Στο $\overset{\Delta}{AB\Delta}$ , τα Μ , Ν είναι τα μέσα των ΑΔ , ΑΒ, οπότε ΜΝ // ΒΔ .
Είναι:
- $ZE \perp A\Gamma$ , αφού η ΑΓ μεσοκάθετος του ΖΕ
- $B\Delta \perp A\Gamma$ , ως διαγώνιοι του ρόμβου




Άρα έχουμε ΖΕ // ΒΔ , οπότε ΖΕ // ΜΝ .

Στα ορθογώνια τρίγωνα ΖΑΔ ($\hat{Z} = 90^o$) , ΕΑΒ ($\hat{E} = 90^o$) , οι ΖΜ , ΕΝ είναι διάμεσοι προς την υποτείνουσα, οπότε $ZM = \frac{A\Delta}{2}$ και $EN = \frac{AB}{2}$ .

Είναι ΑΔ = ΑΒ , οπότε ΖΜ = ΕΝ .

## 345 Θέμα 4 - 1737

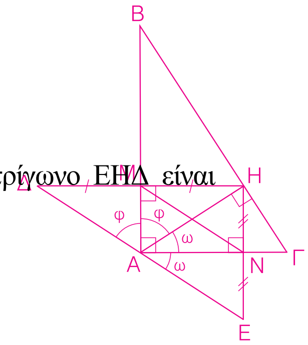
**Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $(\hat{A}=90^{\circ})$ και το ύψος του ΑΗ. Έστω Δ και Ε τα συμμετρικά σημεία του Η ως προς τις ευθείες ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:**

**α.** **$AH = A\Delta = AE$**

**β.** **Η γωνία ΕΗΔ είναι ορθή.**

**γ.** **Τα σημεία Α, Ε και Δ είναι συνευθειακά και $MN = \dfrac{\Delta E}{2}$ .**

**Λύση**




**α.** Στο $\overset{\triangle}{A\Delta H}$ το ΑΜ είναι ύψος και διάμεσος, οπότε είναι ισοσκελές με βάση τη ΔΗ, άρα $AH = A\Delta$ .

Όμοια το $\overset{\triangle}{AEH}$ είναι ισοσκελές, οπότε $AH = AE$. Άρα $AH = A\Delta = AE$ .

**β.** Το ΑΜΗΝ είναι ορθογώνιο, αφού έχει τρεις ορθές γωνίες, οπότε $M\hat{H}N = 90^{\circ}$ , άρα το τρίγωνο ΕΗΔ είναι ορθογώνιο.

**γ.** Στα ισοσκελή τρίγωνα ΑΔΗ και ΑΗΕ οι ΑΜ, ΑΝ είναι ύψη άρα και διχοτόμοι τους.

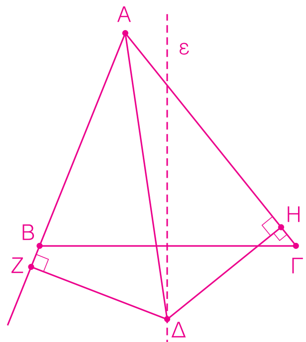
Οπότε $\Delta\hat{A}M = M\hat{A}H = \varphi$ και $E\hat{A}N = H\hat{A}N = \omega$ .

Είναι $\Delta\hat{A}E = 2\varphi + 2\omega = 2(\varphi+\omega) = 2B\hat{A}\Gamma = 2\cdot 90^{\circ} = 180^{\circ}$ .

Άρα τα Ε, Α, Δ είναι συνευθειακά.

Στο τρίγωνο ΔΗΕ τα Μ, Ν είναι μέσα των ΗΔ και ΗΕ οπότε $MN = \dfrac{\Delta E}{2}$ .

## 346 Θέμα 4 - 13522



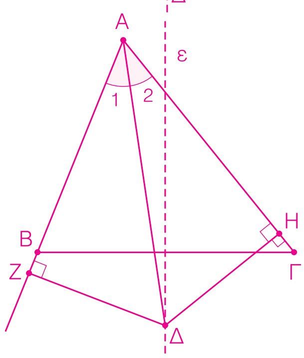

**Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < A\Gamma$. Η διχοτόμος της γωνίας Α τέμνει την μεσοκάθετο (ε) της ΒΓ στο Δ. Από το Δ φέρνουμε τα κάθετα τμήματα ΔΖ και ΔΗ προς τις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.**

**α.** **Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΖΔ και ΑΗΔ.**

**β.** **Να αποδείξετε ότι $BZ = H\Gamma$ .**

**γ.** **Αν η γωνία $A = 60^{\circ}$ και Μ το μέσο της ΑΔ, να αποδείξετε ότι $HM = Z\Delta$ .**

**Λύση**




**α.** Τα τρίγωνα ΑΖΔ και ΑΗΔ έχουν:

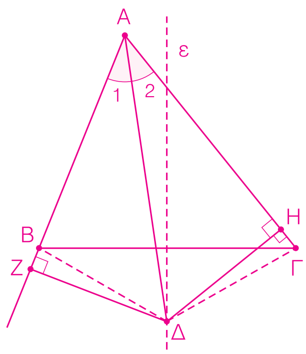
- ΑΔ κοινή
- $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ , επειδή ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Α.
- $A\hat{Z}\Delta = A\hat{H}\Delta = 90^{\circ}$

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΖΔ και ΑΗΔ είναι ίσα, επειδή έχουν την υποτείνουσα και μία οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία.

**β.** Φέρνουμε τις ΔΒ, ΔΓ. Επειδή το Δ ανήκει στην μεσοκάθετο της ΒΓ θα ισαπέχει από τα Β και Γ,

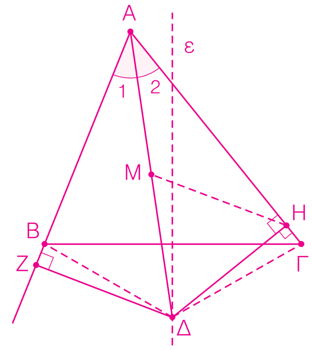
άρα $B\Gamma = \Gamma\Delta$ , (1).

Τα τρίγωνα ΒΖΔ και ΓΗΔ έχουν:




- $A\hat{Z}\Delta = A\hat{H}\Delta = 90^{\circ}$
- $B\Delta = \Gamma\Delta$
- $\Delta Z = H\Delta$ , (2) επειδή είναι πλευρές των ίσων τριγώνων ΑΖΔ και ΑΗΔ, που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{A}_1$ , $\hat{A}_2$ αντίστοιχα.

Άρα είναι ίσα, οπότε $ZB = H\Gamma$ .




**γ.** Είναι $A = 60^o$ , οπότε $A_2 = 30^o$ .

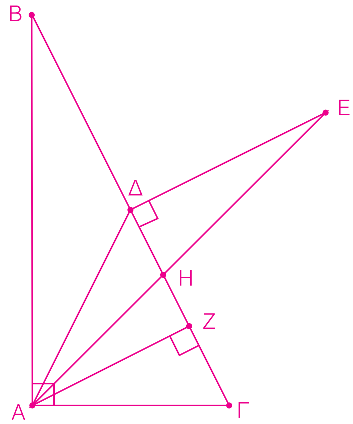
Στο ορθογώνιο $A\Delta H$ , η γωνία $A_2 = 30^o$ , οπότε $H\Delta = \dfrac{A\Delta}{2}$ (3).

Στο ορθογώνιο $AH\Delta$ , η $HM$ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε $HM = \dfrac{A\Delta}{2}$ (4).

Από (3) και (4) συμπεραίνουμε ότι $HM = H\Delta$ (5).

Από (5) και (2) έχουμε ότι $HM = \Delta Z$ .

## 347 Θέμα 4 - 13672




**Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^o$ και $AB > A\Gamma$ . Από το μέσο Δ της πλευράς ΒΓ φέρουμε κάθετη στη ΒΓ όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, η οποία τέμνει τη διχοτόμο ΑΗ της γωνίας $\hat{A}$ στο σημείο Ε. Έστω ΑΖ το ύψος στην υποτείνουσα. Να αποδείξετε ότι:**

**α.** $\Gamma\hat{A}Z = \Delta\hat{A}B$ **.**

**β.** $A\Delta = \Delta E$ **.**

**γ.** $Z\hat{A}\Delta = \hat{\Gamma} - \hat{B}$ **.**

**Λύση**

**α.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ , η $A\Delta$ είναι διάμεσος στην υποτείνουσα ΒΓ, οπότε $A\Delta = \Delta B = \Delta\Gamma$ , και είναι $\hat{B} = 90^o - \hat{\Gamma}$ (1)

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ZA\Gamma$ είναι $\Gamma\hat{A}Z = 90^o - \hat{\Gamma}$ (2)

Από τις (1) και (2) έχουμε ότι $\Gamma\hat{A}Z = \hat{B}$ .

Το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές με $A\Delta = \Delta B$ , οπότε θα είναι $\Delta\hat{A}B = \hat{B}$ .

Επομένως $\Gamma\hat{A}Z = \Delta\hat{A}B$ (3).

**β.** Η $AH$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ , οπότε $\Gamma\hat{A}H = H\hat{A}B$ (4).
Με αφαίρεση των σχέσεων (3) και (4) κατά μέλη προκύπτει ότι:

$$\Gamma\hat{A}H - \Gamma\hat{A}Z = H\hat{A}B - \Delta\hat{A}B \Leftrightarrow Z\hat{A}H = H\hat{A}\Delta \quad (5).$$

Είναι, $AZ // \Delta E$ αφού είναι κάθετες στη $B\Gamma$ , άρα, $Z\hat{A}H = \hat{E}$ (6), ως εντός εναλλάξ.

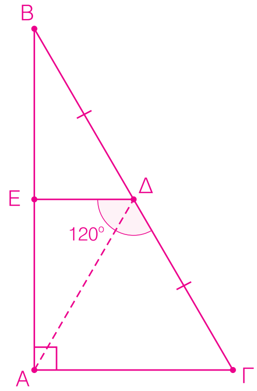
Από τις (5) και (6) προκύπτει ότι $H\hat{A}\Delta = \hat{E}$ , οπότε στο τρίγωνο $A\Delta E$ , είναι $\Delta E = A\Delta$ .

**γ.** Είναι $\Gamma\hat{A}Z + Z\hat{A}\Delta + \Delta\hat{A}B = \hat{A}$ , οπότε:

$$Z\hat{A}\Delta = \hat{A} - \Gamma\hat{A}Z - \Delta\hat{A}B = 90^o - \hat{B} - \hat{B} = \hat{\Gamma} - \hat{B}$$ αφού είναι

$$\Gamma\hat{A}Z = \Delta\hat{A}B = \hat{B} \text{ και } \hat{\Gamma} = 90^o - \hat{B} .$$

## 348 Θέμα 4 - 13855



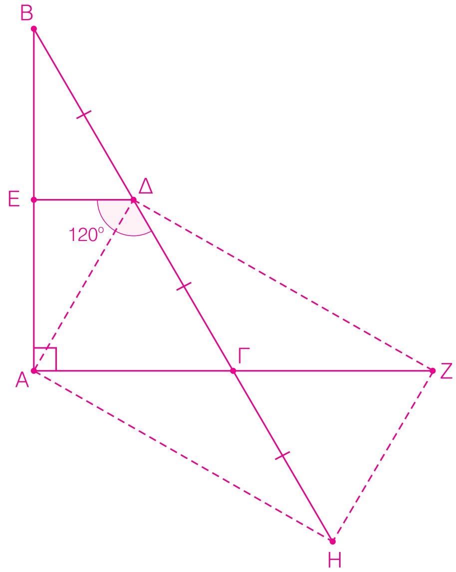

**Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}=90^o$. Από το μέσο Δ της πλευράς ΒΓ φέρουμε παράλληλη προς την πλευρά ΑΓ που τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Ε. Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι $E\hat{\Delta}\Gamma=120^o$, τότε:**

**α. Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνία $\Delta\hat{\Gamma}A$.**

**β. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισόπλευρο.**

**γ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΓ προς το Γ κατά τμήμα $\Gamma Z=A\Gamma$ και την πλευρά ΒΓ προς το Γ κατά τμήμα $\Gamma H=\frac{B\Gamma}{2}$. Να αποδείξετε ότι $A\hat{H}Z=90^o$.**

### Λύση




**α.** Στο τρίγωνο ΑΒΓ το σημείο Δ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ και ΔΕ//ΑΓ άρα το σημείο Ε είναι το μέσο της πλευράς ΑΒ. Οι γωνίες $E\hat{\Delta}\Gamma$ και $\hat{\Gamma}$ είναι εντός και επί τα αυτά άρα

$E\hat{\Delta}\Gamma+\hat{\Gamma}=180^o \Leftrightarrow 120^o+\hat{\Gamma}=180^o \Leftrightarrow \hat{\Gamma}=60^o$.

**β.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ η ΑΔ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα $A\Delta=\frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow A\Delta=\Delta\Gamma$ και $\hat{B}=90^o-\hat{\Gamma}=30^o$.

Οπότε $A\Gamma=\frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow A\Gamma=\Delta\Gamma$.

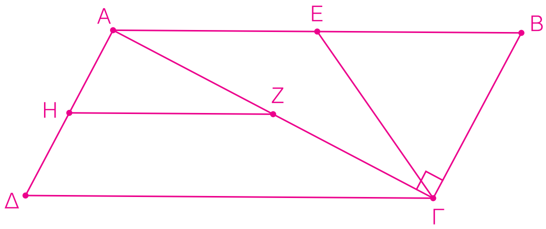
Επομένως το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισόπλευρο αφού ΑΔ = ΑΓ = ΔΓ.

**γ.** • Στο τετράπλευρο ΑΗΖΔ οι διαγώνιοι ΔΗ και ΑΖ διχοτομούνται στο Γ αφού $\Delta\Gamma=\frac{B\Gamma}{2}=\Gamma H$ και ΑΓ = ΓΖ.

Άρα ΑΗΖΔ είναι παραλληλόγραμμο.

• Είναι $A\Gamma=\Gamma\Delta \Leftrightarrow 2A\Gamma=2\Gamma\Delta \Leftrightarrow AZ=\Delta H$, άρα το παραλληλόγραμμο ΑΗΖΔ είναι ορθογώνιο αφού έχει ίσες διαγωνίους, οπότε $A\hat{H}Z=90^o$.

## 349 Θέμα 4 - 13540




**Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ τέτοιο, ώστε η διαγώνιός του ΑΓ να είναι κάθετη στη ΒΓ. Θεωρούμε τα μέσα Ε, Ζ και Η των ΑΒ, ΑΓ και ΑΔ αντίστοιχα.**

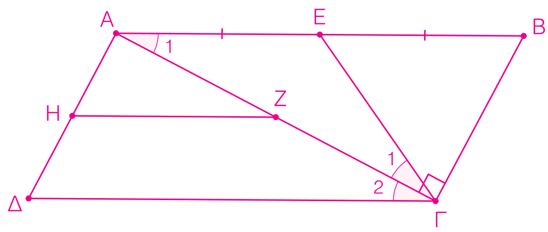
**α. Να αποδείξετε ότι:**

**i. ΓΕ = ΖΗ.**

**ii. Η ΓΑ είναι διχοτόμος της γωνίας $\Delta\hat{\Gamma}E$.**

**β. Αν $\Delta H=\frac{AB}{4}$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΓΕ είναι ισόπλευρο.**

### Λύση




**α. i.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ η ΓΕ είναι η διάμεσος προς την υποτείνουσα ΑΒ, οπότε $\Gamma E=\frac{AB}{2}$ (1).

Στο τρίγωνο ΑΓΔ το τμήμα ΖΗ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΓ και ΑΔ, άρα είναι

$ZH=\frac{\Gamma\Delta}{2} \Leftrightarrow ZH=\frac{AB}{2}$ (2).

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι ΓΕ = ΖΗ.

**ii.** Το τρίγωνο $ΑΕΓ$ είναι ισοσκελές με $ΑΕ = ΓΕ = \frac{ΑΒ}{2}$, άρα είναι $\hat{Α}_1 = \hat{Γ}_1$ (3).

Είναι $\hat{Α}_1 = \hat{Γ}_2$ (4), ως εντός εναλλάξ γωνίες, οπότε $\hat{Γ}_1 = \hat{Γ}_2$.

Άρα η $ΓΑ$ είναι διχοτόμος της γωνίας $Δ\hat{Γ}Ε$.

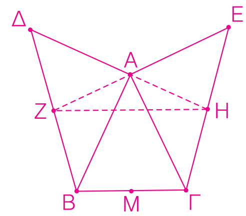
**β.** Έχουμε $ΔΗ = \frac{ΑΒ}{4} \Leftrightarrow 2ΔΗ = \frac{ΑΒ}{2} \Leftrightarrow ΑΔ = \frac{ΑΒ}{2} \Leftrightarrow ΒΓ = \frac{ΑΒ}{2}$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ η κάθετη πλευρά $ΒΓ$ ισούται με το μισό της υποτείνουσας $ΑΒ$, οπότε $\hat{Α}_1 = 30^\circ$, άρα $\hat{Β} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.

Το τρίγωνο $ΒΓΕ$ είναι ισοσκελές με $ΓΕ = ΕΒ = \frac{ΑΒ}{2}$, άρα $Ε\hat{Γ}Β = \hat{Β} = 60^\circ$ και $Β\hat{Ε}Γ = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$.

Άρα το τρίγωνο $ΒΓΕ$ είναι ισόπλευρο, γιατί έχει και τις τρεις γωνίες του ίσες.

## 350 Θέμα 4 - 1870




**Δίνεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο $\overset{\Delta}{ΑΒΓ}$ με $ΑΒ = ΑΓ$. Φέρνουμε τμήμα $ΑΔ$ κάθετο στην $ΑΒ$ και τμήμα $ΑΕ$ κάθετο στην $ΑΓ$ με $ΑΔ = ΑΕ$. Θεωρούμε τα μέσα $Ζ$, $Η$ και $Μ$ τα μέσα των $ΔΒ$, $ΕΓ$ και $ΒΓ$ αντίστοιχα.**

**α. Να αποδείξετε ότι:**

**i. Τα τρίγωνα $ΑΔΒ$ και $ΑΕΓ$ είναι ίσα.**

**ii. Το τρίγωνο $ΖΑΗ$ είναι ισοσκελές.**

**iii. Η $ΑΜ$ είναι μεσοκάθετος του $ΖΗ$.**

**β. Ένας μαθητής συγκρίνοντας τα τρίγωνα $ΑΔΒ$ και $ΑΕΓ$ έγραψε τα εξής:**

**« 1. $ΑΔ = ΑΕ$ *από υπόθεση***

**2. $ΑΒ = ΑΓ$ *πλευρές ισοσκελούς τριγώνου***

**3. $Δ\hat{Α}Β = Ε\hat{Α}Γ$ *ως κατακορυφήν***

***Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα έχοντας δύο πλευρές ίσες μια προς μια και την περιεχόμενη γωνία ίση».***

**Ο καθηγητής είπε ότι αυτή η λύση περιέχει λάθος μπορείς να το εντοπίσεις;**

**Λύση**

**α. i.** Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΑΔΒ$ και $ΑΕΓ$ έχουν:

- $ΑΔ = ΑΕ$
- $ΑΒ = ΑΓ$

Οπότε είναι ίσα.

**ii.** Στα ορθογώνια τρίγωνα $ΑΔΒ$ $(\hat{Α} = 90^\circ)$ και $ΑΕΓ$ $(\hat{Α} = 90^\circ)$, οι $ΑΖ$, $ΑΗ$ είναι διάμεσοι προς την υποτείνουσα, οπότε $ΑΖ = \frac{ΒΔ}{2}$ και $ΑΗ = \frac{ΕΓ}{2}$.

Επειδή τα $\overset{\Delta}{ΑΔΒ}$, $\overset{\Delta}{ΑΕΓ}$ είναι ίσα έχουμε $ΒΔ = ΕΓ$.

Οπότε $ΑΖ = ΑΗ$, επομένως το $\overset{\Delta}{ΖΑΗ}$ είναι ισοσκελές.

**iii.** Επειδή τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΕΓ είναι ίσα έχουν $B\Delta = E\Gamma$ και $A\hat{B}\Delta = A\hat{\Gamma}E$ .

Τα τρίγωνα ΜΒΖ και ΓΗΜ έχουν:

- $MB = M\Gamma$
- $BZ = H\Gamma$ , ως μισά των ίσων πλευρών ΔΒ και ΕΓ
- $Z\hat{B}M = M\hat{\Gamma}H$ , ως αθροίσματα ίσων γωνιών αφού $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ και $A\hat{B}\Delta = A\hat{\Gamma}E$

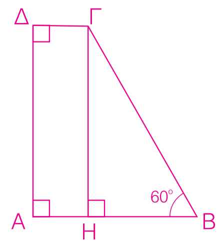
Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ), οπότε $MZ = MH$ .

Επειδή $AZ = AH$ και $MZ = MH$ η ΑΜ είναι η μεσοκάθετος του ΖΗ .

**β.** Το λάθος είναι ότι οι γωνίες $\Delta\hat{A}B$ και $E\hat{A}\Gamma$ δεν είναι κατακορυφήν, αφού το $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ είναι οξυγώνιο οπότε οι πλευρές τους δεν είναι αντικείμενες ημιευθείες.

## 24. Τραπέζιο

### 351 Θέμα 2 - 1549




**Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^o$ , $AB > \Gamma\Delta$ , $B\Gamma = 4\Delta\Gamma$ και $\hat{B} = 60^o$ . Φέρουμε την $\Gamma H \perp AB$ . Να δείξετε ότι:**

**α. $HB = 2\Delta\Gamma$**

**β. Το τετράπλευρο ΑΗΓΔ είναι ορθογώνιο με $AH = \frac{1}{2}HB$ .**

**Λύση**

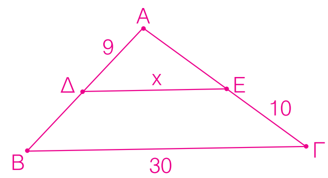
**α.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΗΒΓ είναι $\hat{B} + H\hat{\Gamma}B = 90^o \Leftrightarrow 60^o + H\hat{\Gamma}B = 90^o \Leftrightarrow H\hat{\Gamma}B = 30^o$ .

Οπότε $HB = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{4\Gamma\Delta}{2} = 2\Gamma\Delta$ .

**β.** Το ΔΓΗΑ έχει $\hat{\Delta} = \hat{A} = \hat{H} = 90^o$ , οπότε είναι ορθογώνιο, άρα $\Gamma\Delta = AH$ .

Είναι $HB = 2\Gamma\Delta \Leftrightarrow \Gamma\Delta = \frac{1}{2}HB \Leftrightarrow AH = \frac{1}{2}HB$ .

### 352 Θέμα 2 - 1612




**Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με Δ και Ε τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, $A\Delta = 9$ , $E\Gamma = 10$ και $B\Gamma = 30$ .**

**α. Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ.**

**β. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΕΓΒ είναι τραπέζιο.**

**γ. Να υπολογίσετε το μήκος x του τμήματος ΔΕ .**

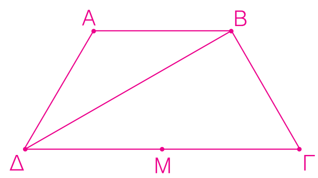
**Λύση**

**α.** Είναι $\Pi_{AB\Gamma} = AB + B\Gamma + \Gamma A = 2\cdot 9 + 30 + 2\cdot 10 = 68$ .

**β.** Στο τρίγωνο ΑΒΓ τα Δ , Ε είναι τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ , οπότε $\Delta E \,//\, B\Gamma$ , άρα το ΔΕΓΒ είναι τραπέζιο.

**γ.** Από το **β.** ερώτημα είναι $\Delta E = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow x = \frac{30}{2} \Leftrightarrow x = 15$ .

### 353 Θέμα 2 - 1697




**Στο τραπέζιο του διπλανού σχήματος έχουμε $AB = A\Delta = \frac{\Gamma\Delta}{2}$ , $\hat{\Delta} = 60^o$ και Μ το μέσο της πλευράς ΓΔ . Να αποδείξετε ότι:**

**α. η ΔΒ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Delta}$**

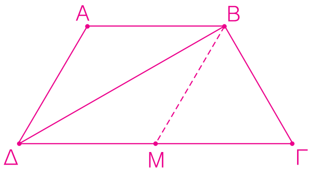
**β. η ΒΜ χωρίζει το τραπέζιο σε ένα ρόμβο και ένα ισόπλευρο τρίγωνο.**

**Λύση**

**α.** Επειδή $AB = A\Delta$, είναι $A\hat{B}\Delta = A\hat{\Delta}B$. Αφού $AB // \Gamma\Delta$, είναι $A\hat{B}\Delta = B\hat{\Delta}\Gamma$, ως εντός εναλλάξ.

Άρα $A\hat{\Delta}B = B\hat{\Delta}\Gamma$, οπότε η $\Delta B$ είναι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Delta}$.

**β.** Επειδή $AB // = \Delta M$, το $AB M\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο. Αφού επιπλέον είναι $AB = A\Delta$, έχουμε ότι το $ABM\Delta$ είναι ρόμβος.




Είναι:
- $BM // A\Delta$, οπότε $B\hat{M}\Gamma = \hat{\Delta} = 60^\circ$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη
- $BM = M\Delta \Leftrightarrow BM = M\Gamma$

Οπότε το τρίγωνο $BM\Gamma$ είναι ισοσκελές με μια γωνία $60^\circ$, άρα είναι ισόπλευρο.

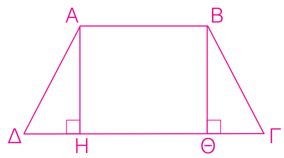
## 354 Θέμα 2 - 1694

**Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ $(AB // \Gamma\Delta)$ με $AB = 8$ και $\Delta\Gamma = 12$. Αν $AH$ και $B\Theta$ τα ύψη του τραπεζίου,**

**α. να αποδείξετε ότι $\Delta H = \Theta\Gamma$**

**β. να υπολογίσετε τη διάμεσο του τραπεζίου.**

**Λύση**




**α.** Τα ορθογώνια τρίγωνα $HA\Delta$ και $\Theta B\Gamma$ έχουν:
- $A\Delta = B\Gamma$
- $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$, ως γωνίες προσκείμενες στη βάση ισοσκελούς τραπεζίου

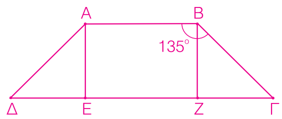
Οπότε είναι ίσα, άρα $\Delta H = \Theta\Gamma$.

**β.** Η διάμεσος του τραπεζίου $EZ$ είναι: $EZ = \dfrac{AB + \Gamma\Delta}{2} = \dfrac{8 + 12}{2} = 10$

## 355 Θέμα 2 - 1629

**Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ $(AB // \Gamma\Delta)$ με $\Gamma\Delta > AB$ και $\hat{B} = 135^\circ$.**

**Από τις κορυφές $A$ και $B$ φέρουμε τα ύψη του $AE$ και $BZ$.**




**α. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τραπεζίου.**

**β. Να αποδείξετε ότι $AE = E\Delta = BZ = \Gamma Z$.**

**Λύση**

**α.** Είναι:
- $\hat{A} = \hat{B} = 135^\circ$
- $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 135^\circ + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 45^\circ$
- $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma} = 45^\circ$

**β.** Είναι $AE = BZ$, ως αποστάσεις των παράλληλων $AB$ και $\Gamma\Delta$.

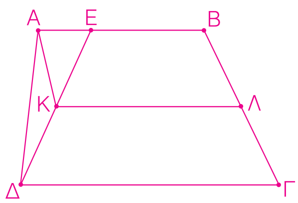
Στα ορθογώνια τρίγωνα $EA\Delta$ και $ZB\Gamma$ είναι:
- $\hat{\Delta} + \Delta\hat{A}E = 90^\circ \Leftrightarrow 45^\circ + \Delta\hat{A}E = 90^\circ \Leftrightarrow \Delta\hat{A}E = 45^\circ$, άρα $\hat{\Delta} = \Delta\hat{A}E$
- $\hat{\Gamma} + \Gamma\hat{B}Z = 90^\circ \Leftrightarrow 45^\circ + \Gamma\hat{B}Z = 90^\circ \Leftrightarrow \Gamma\hat{B}Z = 45^\circ$, άρα $\hat{\Gamma} = \Gamma\hat{B}Z$

Τα ορθογώνια τρίγωνα $EA\Delta$ και $ZB\Gamma$ είναι ισοσκελή, οπότε $\Delta E = AE$ και $Z\Gamma = BZ$.

Άρα $AE = E\Delta = BZ = \Gamma Z$.

## 356 Θέμα 2 - 1644

**Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ $(AB // \Gamma\Delta)$ με $AB = 3$, $\Gamma\Delta = 4$. Θεωρούμε σημείο $E$ στην $AB$ ώστε $AE = 1$. Στο τραπέζιο $EB\Gamma\Delta$ θεωρούμε τα $K$ και $\Lambda$, μέσα των $E\Delta$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα.**




**α. Να υπολογίσετε τη διάμεσο $K\Lambda$ του τραπεζίου $EB\Gamma\Delta$.**

**β. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Lambda K$ είναι παραλληλόγραμμο.**

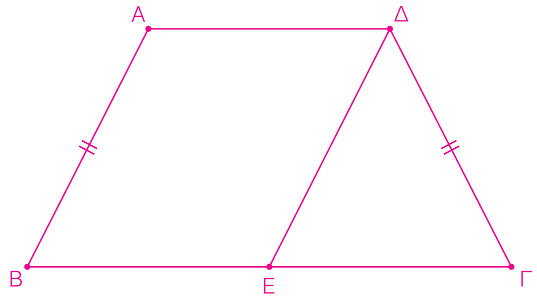
**Λύση**

**α.** Είναι: • $EB = AB - AE = 3 - 1 = 2$

• $K\Lambda = \dfrac{\Gamma\Delta + EB}{2} = \dfrac{4+2}{2} = 3$ .

**β.** Είναι $K\Lambda // EB$ , οπότε $K\Lambda // AB$ και $K\Lambda = AB = 3$ , οπότε το $AB\Lambda K$ είναι παραλληλόγραμμο.

## 357 Θέμα 2 - 13497



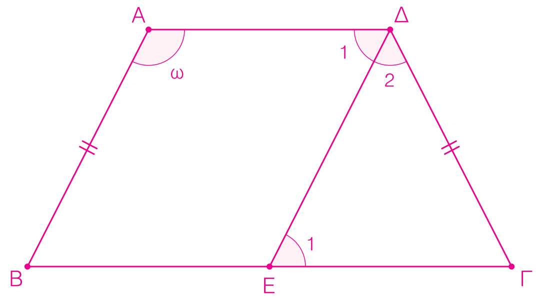

**Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta (A\Delta // B\Gamma)$ με $B\Gamma > \Delta\Gamma$ .**

**Στην πλευρά ΒΓ θεωρούμε σημείο Ε, τέτοιο ώστε $\Gamma E = \Gamma\Delta$ .**

**α. Να αποδείξετε ότι η ΔΕ είναι διχοτόμος της $A\hat{\Delta}\Gamma$ .**

**β. Αν $\hat{A} = 120^o$ , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΔΕΓ είναι ισόπλευρο.**

**Λύση**




**α.** Είναι: • $\hat{\Delta}_1 = \hat{E}_1$ (1), ως εντός εναλλάξ.

• $\hat{\Delta}_2 = \hat{E}_1$ (2), ως γωνίες προσκείμενες στη βάση ΔΕ του ισοσκελούς τριγώνου ΔΓΕ.

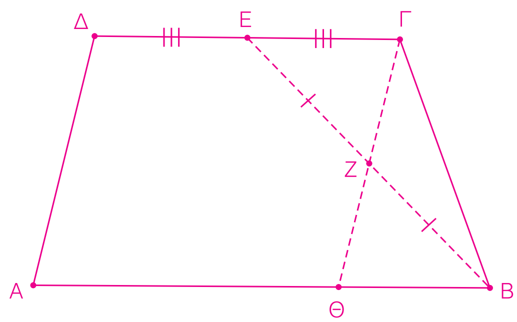
Από (1) και (2) έχουμε ότι $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$ , άρα η ΔΕ είναι διχοτόμος της $A\hat{\Delta}\Gamma$ .

**β.** Αν $\hat{A} = 120^o$ , τότε, επειδή το τραπέζιο ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές, θα είναι $A\hat{\Delta}\Gamma = 120^o$ .

Επειδή η ΔΕ είναι διχοτόμος της $A\hat{\Delta}\Gamma$ , θα είναι $\hat{\Delta}_2 = 60^o$ οπότε η (2) $\Leftrightarrow \hat{E}_1 = 60^o$ .

Επομένως, το τρίγωνο ΔΕΓ είναι ισόπλευρο, γιατί έχει δύο γωνίες $60^o$, οπότε και η τρίτη γωνία $\hat{\Gamma}$ θα είναι $60^o$ .

## 358 Θέμα 2 - 13824




**Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις ΑΒ και ΓΔ. Αν Ε και Ζ τα μέσα των ΓΔ και ΒΕ αντίστοιχα και Θ το σημείο τομής της ΑΒ και της προέκτασης της ΓΖ, να αποδείξετε ότι:**

**α. Τα τρίγωνα ΓΕΖ, ΘΒΖ είναι ίσα.**

**β. $E\Gamma = \Theta B$ .**

**γ. Το τετράπλευρο ΕΒΘΔ είναι παραλληλόγραμμο.**

**Λύση**

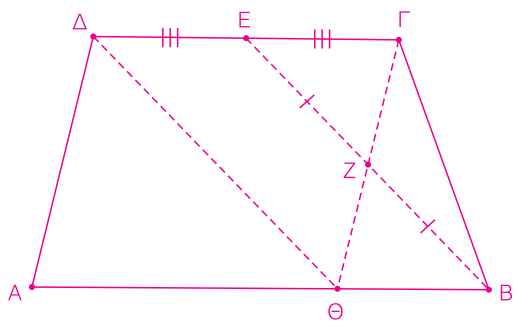
**α.** Τα τρίγωνα ΓΕΖ και ΘΖΒ έχουν:

**i.** $EZ = ZB$ ,

**ii.** $Z\hat{E}\Gamma = Z\hat{B}\Theta$ , ως εντός αναλλάξ

**iii.** $E\hat{Z}\Gamma = \Theta\hat{Z}B$ , ως κατακορυφήν

Άρα είναι ίσα (ΓΠΓ).



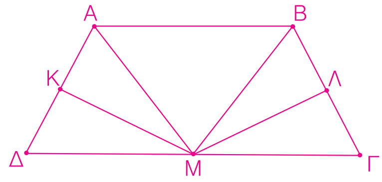

**β.** Από την ισότητα των τριγώνων ΓΕΖ και ΘΖΒ έχουμε ότι $E\Gamma = \Theta B$ .

**γ.** Είναι: • $\Delta E // B\Theta$ ως τμήματα των βάσεων ΓΔ και ΑΒ του τραπεζίου ΑΒΓΔ.

• $E\Gamma = B\Theta$ και $E\Gamma = \Delta E$ , άρα $B\Theta = \Delta E$ .

Επομένως το τετράπλευρο ΕΒΘΔ είναι παραλληλόγραμμο αφού έχει δύο απέναντι πλευρές του, τις ΔΕ και ΘΒ, παράλληλες και ίσες.

## 359 Θέμα 2 - 1669




**Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ , το σημείο Μ είναι το μέσο της πλευράς ΔΓ και τα σημεία Κ και Λ είναι τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών του ΑΔ και ΒΓ αντίστοιχα.**
**Να αποδείξετε ότι:**

**α. Τα τμήματα ΚΜ και ΛΜ είναι ίσα.**

**β. Τα τμήματα ΑΜ και ΒΜ είναι ίσα.**

### Λύση

**α.** Επειδή το ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο έχουμε ότι $ΑΔ = ΒΓ$ , $\hat{Δ} = \hat{Γ}$ .
Τα τρίγωνα ΜΚΔ και ΜΛΓ έχουν:
- $ΜΔ = ΜΓ$
- $ΔΚ = ΓΛ$ , ως μισά ίσων τμημάτων
- $\hat{Δ} = \hat{Γ}$

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ), οπότε $ΚΜ = ΛΜ$ .

**β.** Τα τρίγωνα ΑΔΜ και ΜΒΓ έχουν:
- $ΜΔ = ΜΓ$
- $\hat{Δ} = \hat{Γ}$
- $ΑΔ = ΒΓ$

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ) , οπότε $ΑΜ = ΒΜ$ .

## 360 Θέμα 2 - 1634


**Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ // ΓΔ) , με $ΑΒ = 6$ , $ΒΓ = 4$ και $\hat{Γ} = 60^\circ$ . Δίνονται επίσης τα ύψη ΑΕ και ΒΖ από τις κορυφές Α και Β αντίστοιχα.**

**α. Να υπολογίσετε τις υπόλοιπες γωνίες του τραπεζίου ΑΒΓΔ .**

**β. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΕΔ , ΒΖΓ είναι ίσα.**

**γ. Να υπολογίσετε την περίμετρο του ΑΒΓΔ .**

### Λύση

**α.** Είναι:
- $\hat{Δ} = \hat{Γ} = 60^\circ$
- $\hat{Β} + \hat{Γ} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{Β} + 60^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{Β} = 120^\circ$
- $\hat{Α} = \hat{Β} = 120^\circ$

**β.** Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΕΔ και ΒΖΓ έχουν:
- $ΑΔ = ΒΓ$
- $\hat{Δ} = \hat{Γ}$

Οπότε είναι ίσα.

**γ.** Το ΑΒΖΕ είναι ορθογώνιο, οπότε $ΕΖ = ΑΒ = 6$ .
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΖΒΓ είναι $Γ\hat{Β}Ζ = 90^\circ - \hat{Γ} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ .

Οπότε $ΖΓ = \dfrac{ΒΓ}{2} = 2$ .

Επειδή τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΒΖΓ είναι ίσα, έχουμε $ΔΕ = ΖΓ = 2$ .
Οπότε $ΓΔ = ΔΕ + ΕΖ + ΖΓ = 2 + 6 + 2 = 10$ .
Η περίμετρος του ΑΒΓΔ είναι $Π_{ΑΒΓΔ} = ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + ΔΑ = 6 + 4 + 2 + 6 + 2 + 4 = 24$ .

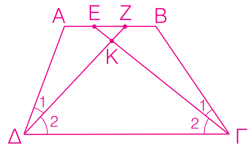
## 361 Θέμα 2 - 1579

**Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ με $ΑΒ // ΓΔ$ και $ΑΒ < ΓΔ$ . Θεωρούμε τα σημεία $Ε$ και $Ζ$ πάνω στην $ΑΒ$ έτσι ώστε $ΑΕ = ΕΖ = ΖΒ$ και έστω $Κ$ το σημείο τομής των $ΔΖ$ και $ΓΕ$ . Να αποδείξετε ότι:**

**α.** **$ΔΖ = ΓΕ$**

**β.** **Τα τρίγωνα $ΕΚΖ$ και $ΔΚΓ$ είναι ισοσκελή .**

**Λύση**




**α.** Επειδή το $ΑΒΓΔ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο, έχουμε $ΑΔ = ΒΓ$ και $\hat{Α} = \hat{Β}$ .

Τα τρίγωνα $ΑΔΖ$ και $ΒΓΕ$ έχουν:
- $ΑΔ = ΒΓ$
- $ΑΖ = ΒΕ$
- $\hat{Α} = \hat{Β}$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ), επομένως $ΔΖ = ΓΕ$ .

**β.** Επειδή τα τρίγωνα $ΑΔΖ$ και $ΒΓΕ$ είναι ίσα, έχουμε $\hat{Δ}_1 = \hat{Γ}_1$ .

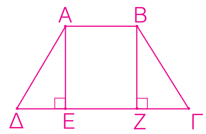
Στο ισοσκελές τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ είναι $\hat{Δ} = \hat{Γ}$ , οπότε $\hat{Δ}_2 = \hat{Γ}_2$ .

Άρα το τρίγωνο $ΚΓΔ$ είναι ισοσκελές , οπότε $ΚΔ = ΚΓ$ .

Επειδή $ΔΖ = ΓΕ$ και $ΚΔ = ΚΓ$ είναι και $ΚΖ = ΚΕ$ .

Οπότε το τρίγωνο $ΚΖΕ$ είναι ισοσκελές.

## 362 Θέμα 2 - 1563




**Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ $(ΑΒ // ΓΔ)$ . Φέρουμε τα ύψη του $ΑΕ$ και $ΒΖ$ .**

**Να αποδείξετε ότι:**

**α.** **$ΔΕ = ΓΖ$**

**β.** **$ΑΒ = ΕΖ$**

**Λύση**

**α.** Επειδή το $ΑΒΓΔ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο έχουμε $ΑΔ = ΒΓ$ και $\hat{Δ} = \hat{Γ}$ .

Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΕΑΔ$ και $ΖΒΓ$ έχουν:
- $ΑΔ = ΒΓ$
- $\hat{Δ} = \hat{Γ}$

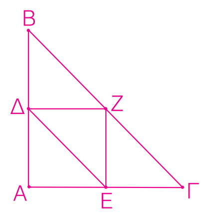
Οπότε είναι ίσα, άρα $ΔΕ = ΓΖ$ .

**β.** Είναι $ΑΕ \perp ΓΔ$ και $ΑΒ // ΓΔ$ , οπότε $ΑΕ \perp ΑΒ$ , άρα $Ε\hat{Α}Β = 90^o$ .

Στο τετράπλευρο $ΑΒΖΕ$ είναι $\hat{Α} = \hat{Ε} = \hat{Ζ} = 90^o$ , οπότε είναι ορθογώνιο.

Άρα $ΑΒ = ΕΖ$ .

## 363 Θέμα 2 - 1666




**Σε ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ $(\hat{Α} = 90^o)$ θεωρούμε τα μέσα $Δ$ , $Ε$ και $Ζ$ των πλευρών του $ΑΒ$ , $ΑΓ$ και $ΒΓ$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:**

**α.** **Το τετράπλευρο $ΑΕΖΔ$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.**

**β.** **Το τετράπλευρο $ΕΔΒΓ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.**

**Λύση**

**α.** Στο τρίγωνο $ΑΒΓ$ , τα $Δ$ , $Ζ$ είναι τα μέσα των $ΒΑ$ , $ΒΓ$ , οπότε $ΔΖ // = \dfrac{ΑΓ}{2} \Rightarrow ΔΖ // = ΑΕ$ .

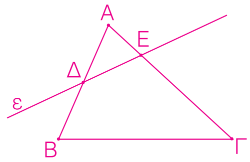
Επομένως το $ΑΕΖΔ$ είναι παραλληλόγραμμο και επειδή έχει $\hat{Α} = 90^o$ είναι ορθογώνιο.

**β.** Στο τρίγωνο $ΑΒΓ$ , τα $Δ$ , $Ε$ είναι τα μέσα των $ΑΒ$ , $ΑΓ$ , οπότε $ΔΕ // ΒΓ$ .

Άρα το $ΕΔΒΓ$ είναι τραπέζιο και επειδή $ΒΔ = ΕΓ$ , ως μισά ίσων τμημάτων, είναι ισοσκελές τραπέζιο.

## 364 Θέμα 2 - 1536

**Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Δ το μέσο της πλευράς ΑΒ. Από το Δ διέρχεται μια τυχαία ευθεία ε που τέμνει την πλευρά ΑΓ σε εσωτερικό της σημείο Ε. Η ευθεία ε χωρίζει το τρίγωνο ΑΒΓ σε ένα τρίγωνο ΑΔΕ και σε ένα τετράπλευρο ΒΔΕΓ.**




**α. Ποια πρέπει να είναι η θέση του σημείου Ε, ώστε το τετράπλευρο ΒΔΕΓ να είναι τραπέζιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.**

**β. Ποιο πρέπει να είναι το είδος του ΑΒΓ τριγώνου, ώστε το τραπέζιο του ερωτήματος α. να είναι ισοσκελές τραπέζιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.**

**Λύση**

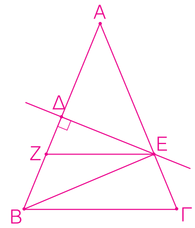
**α.** Για να είναι τραπέζιο το ΒΔΕΓ, αρκεί $ΔΕ // ΒΓ$.

Επειδή το Δ είναι μέσο της ΑΒ, θα είναι το Ε το μέσο του ΑΓ.

**β.** Για να είναι το ΒΔΕΓ ισοσκελές τραπέζιο, αρκεί $\hat{Β} = \hat{Γ}$, δηλαδή το τρίγωνο ΑΒΓ να είναι ισοσκελές.

## 365 Θέμα 2 - 1529

**Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(ΑΒ = ΑΓ)$ με $\hat{Α} < 90^\circ$. Στο μέσο Δ της πλευράς ΑΒ φέρουμε κάθετη ευθεία που τέμνει την ΑΓ στο Ε. Από το Ε φέρουμε ευθεία παράλληλη στη βάση ΒΓ που τέμνει την ΑΒ στο Ζ.**




**α. Να αποδείξετε ότι $ΑΕ = ΒΕ$.**

**β. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΓΕΖ είναι ισοσκελές τραπέζιο.**

**Λύση**

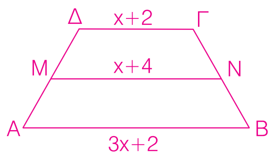
**α.** Επειδή η ΕΔ είναι η μεσοκάθετος του ΑΒ, έχουμε $ΑΕ = ΒΕ$.

**β.** Επειδή $ΖΕ // ΒΓ$, το ΒΓΕΖ είναι τραπέζιο.

Αφού επιπλέον το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, έχουμε $\hat{Β} = \hat{Γ}$, οπότε το ΒΓΕΖ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

## 366 Θέμα 2 - 1550

**Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με $ΑΒ // ΓΔ$, $ΑΒ > ΓΔ$ και $ΑΔ = ΒΓ$.**




**α. Αν τα μήκη των βάσεων είναι $ΑΒ = 3x + 2$, $ΓΔ = x + 2$ και το μήκος της διαμέσου του τραπεζίου είναι $ΜΝ = x + 4$, τότε να δείξετε ότι $x = 2$.**

**β. Αν η γωνία $\hat{Γ}$ είναι διπλάσια της γωνίας $\hat{Β}$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τραπεζίου.**

**Λύση**

**α.** Είναι $ΜΝ = \dfrac{ΑΒ + ΓΔ}{2} \Leftrightarrow x + 4 = \dfrac{(3x+2)+(x+2)}{2} \Leftrightarrow 2x + 8 = 4x + 4 \Leftrightarrow -2x = -4 \Leftrightarrow x = 2$.

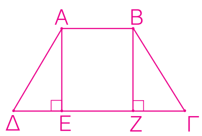
**β.** Έχουμε $\hat{Γ} = 2\hat{Β}$ και επειδή $ΑΒ // ΓΔ$ είναι $\hat{Β} + \hat{Γ} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{Β} + 2\hat{Β} = 180^\circ \Leftrightarrow 3\hat{Β} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{Β} = 60^\circ$.

Οπότε $\hat{Γ} = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$.

Επειδή το ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο έχουμε $\hat{Α} = \hat{Β} = 60^\circ$ και $\hat{Δ} = \hat{Γ} = 120^\circ$.

## 367 Θέμα 2 - 1562

**Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ $(ΑΒ // ΓΔ)$ με $\hat{Γ} = \hat{Δ} = 60^\circ$. Φέρουμε τα ύψη του ΑΕ και ΒΖ. Να αποδείξετε ότι:**




**α. $ΔΕ = ΓΖ$**

**β. Το τετράπλευρο ΑΕΖΒ είναι ορθογώνιο.**

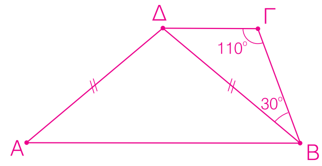
**Λύση**

**α.** Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΕΑΔ$ και $ΖΒΓ$ έχουν: $ΑΔ = ΒΓ$ και $\hat{Δ} = \hat{Γ}$. Οπότε είναι ίσα, άρα $ΔΕ = ΓΖ$.
**β.** Είναι $ΑΕ \perp ΓΔ$ και $ΑΒ // ΓΔ$, οπότε $ΑΕ \perp ΑΒ$, άρα $Ε\hat{Α}Β = 90^o$.

Στο τετράπλευρο $ΑΒΖΕ$ είναι $\hat{Α} = \hat{Ε} = \hat{Ζ} = 90^o$.
Οπότε είναι ορθογώνιο.

## 368 Θέμα 4 - 1577

**Δίνεται τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ με $ΑΒ // ΓΔ$ στο οποίο η διαγώνιος $ΒΔ$ είναι ίση με την πλευρά $ΑΔ$. Αν η γωνία $\hat{Γ} = 110^o$ και η γωνία $Δ\hat{Β}Γ = 30^o$, να υπολογίσετε τη γωνία $Α\hat{Δ}Β$.**




**Λύση**

Επειδή $ΑΒ // ΓΔ$ είναι $Α\hat{Β}Γ = 180^o - \hat{Γ} = 180^o - 110^o = 70^o$.

Οπότε $Α\hat{Β}Δ = Α\hat{Β}Γ - Δ\hat{Β}Γ = 70^o - 30^o = 40^o$. Αφού $ΔΑ = ΔΒ$, το τρίγωνο $ΑΒΔ$ είναι ισοσκελές, οπότε $\hat{Α} = Α\hat{Β}Δ = 40^o$.

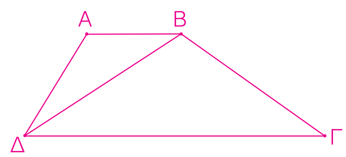
Στο τρίγωνο $ΑΒΔ$ είναι $Α\hat{Δ}Β + \hat{Α} + Α\hat{Β}Δ = 180^o \Leftrightarrow Α\hat{Δ}Β + 40^o + 40^o = 180^o \Leftrightarrow Α\hat{Δ}Β = 100^o$.

## 369 Θέμα 4 - 1650

**Δίνεται τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ με $ΑΒ // ΓΔ$ και $ΒΔ = ΒΓ$. Αν $Δ\hat{Β}Γ = 110^o$ και $Α\hat{Δ}Β = 25^o$ να υπολογίσετε:**

**α. Τη γωνία $\hat{Γ}$.**

**β. Τη γωνία $\hat{Α}$.**




**Λύση**

**α.** Το τρίγωνο $ΒΔΓ$ είναι ισοσκελές με $ΒΔ = ΒΓ$, άρα $Β\hat{Δ}Γ = \hat{Γ}$.
Στο τρίγωνο $ΒΔΓ$ έχουμε $Β\hat{Δ}Γ + \hat{Γ} + Δ\hat{Β}Γ = 180^o \Leftrightarrow 2\hat{Γ} + 110^o = 180^o \Leftrightarrow 2\hat{Γ} = 70^o \Leftrightarrow \hat{Γ} = 35^o$.

**β.** Είναι $Β\hat{Δ}Γ = \hat{Γ} = 35^o$ οπότε $Α\hat{Δ}Γ = Α\hat{Δ}Β + Β\hat{Δ}Γ = 25^o + 35^o = 60^o$.
Οι γωνίες $\hat{Α}$ και $Α\hat{Δ}Γ$ είναι εντός και επί τα αυτά των παραλλήλων $ΑΒ$, $ΓΔ$ που τέμνονται από την $ΑΔ$ και είναι παραπληρωματικές, οπότε $\hat{Α} + Α\hat{Δ}Γ = 180^o \Leftrightarrow \hat{Α} + 60^o = 180^o \Leftrightarrow \hat{Α} = 120^o$

## 370 Θέμα 4 - 13539

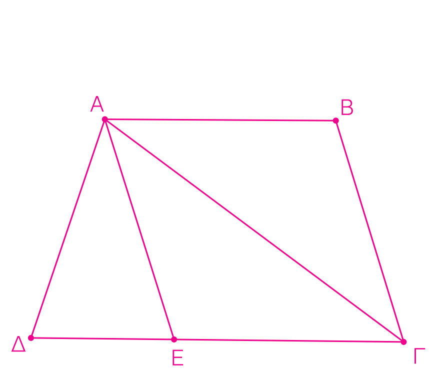
**Στο διπλανό σχήμα δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ με $ΑΒ // ΓΔ$ και $\hat{Α} = 108^o$. Στη βάση $ΓΔ$ θεωρούμε σημείο Ε, ώστε οι ΑΓ, ΑΕ να τριχοτομούν τη γωνία $\hat{Α}$.**

**α. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΔΕ.**

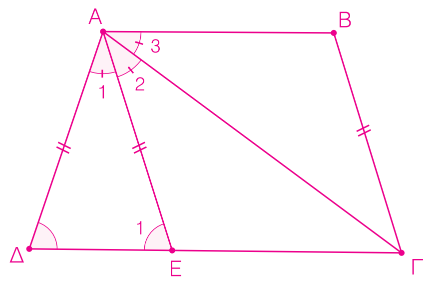
**β. Να αποδείξετε ότι:**

**i. Το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ρόμβος.**

**ii. Το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι ρόμβος.**




**Λύση**




**α.** Αφού τα τμήματα ΑΓ , ΑΕ να τριχοτομούν τη γωνία $\hat{A}=108^o$ , θα είναι

$\hat{A}_1=\hat{A}_2=\hat{A}_3=\frac{\hat{A}}{3}=\frac{108^o}{3}=36^o$.

Οι γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{\Delta}$ του τραπεζίου είναι παραπληρωματικές , άρα

$\hat{\Delta}=180^o-\hat{A}=180^o-108^o=72^o$.

Είναι $\hat{E}_1=B\hat{A}E$ , ως εντός εναλλάξ, άρα

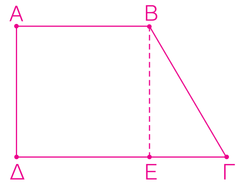
$\hat{E}_1=B\hat{A}E=\hat{A}_2+\hat{A}_3=36^o+36^o=72^o$.

**β. i.** Από το ερώτημα **α.** έχουμε ότι $\hat{\Delta}=\hat{E}_1=72^o$ (1), οπότε το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές με $A\Delta=AE$ (2).

**ii.** Το τραπέζιο ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές, άρα $B\hat{\Gamma}\Delta=\hat{\Delta}$ (3).

Από τις ισότητες (1) , (3) προκύπτει $B\hat{\Gamma}\Delta=\hat{E}_1$ , οπότε $AE//B\Gamma$ , γιατί σχηματίζουν τις εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες.
Είναι $A\Delta=B\Gamma$ (4) και $A\Delta=AE$ , οπότε $AE=B\Gamma$.
Άρα το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι παραλληλόγραμμο, γιατί οι απέναντι πλευρές του ΑΕ , ΒΓ είναι ίσες και παράλληλες. Όμως η ΑΓ διχοτομεί τη γωνία $B\hat{A}E$ , αφού $\hat{A}_2=\hat{A}_3=36^o$ , οπότε το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι ρόμβος.

## 371 Θέμα 4 - 1635




**Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ // ΓΔ) , με $AB=B\Gamma=4$ , $\hat{A}=90^o$ και $\hat{\Gamma}=60^o$ .**
**Δίνεται επίσης το ύψος ΒΕ από τη κορυφή Β .**

**α. Να υπολογίσετε τις άλλες δυο γωνίες του τραπεζίου ΑΒΓΔ .**

**β. Να αποδείξετε $2E\Gamma=B\Gamma$ .**

**γ. Αν Μ , Ν τα μέσα των πλευρών ΑΔ , ΒΓ αντίστοιχα να βρείτε το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΜΝ .**

**Λύση**

**α.** Είναι:
- $\hat{B}=180^o-\hat{\Gamma}=180^o-60^o=120^o$ , αφού $AB//\Gamma\Delta$ .
- $A\Delta\perp AB$ και $AB//\Gamma\Delta$ , οπότε $A\Delta\perp\Gamma\Delta$ , άρα $\hat{\Delta}=90^o$ .

**β.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΕΒΓ είναι $E\hat{B}\Gamma+\hat{\Gamma}=90^o \Leftrightarrow E\hat{B}\Gamma+60^o=90^o \Leftrightarrow E\hat{B}\Gamma=30^o$

Οπότε $E\Gamma=\frac{B\Gamma}{2}\Leftrightarrow 2E\Gamma=B\Gamma$ .

**γ.** Η ΜΝ είναι η διάμεσος του τραπεζίου ΑΒΓΔ .

Οπότε $MN=\frac{AB+\Gamma\Delta}{2}$ .

Είναι:
- $\Delta E=AB=4$ , αφού το ΑΒΕΔ είναι ορθογώνιο
- $E\Gamma=\frac{B\Gamma}{2}=\frac{4}{2}=2$
- $\Gamma\Delta=\Delta E+E\Gamma=4+2=6$ .

Οπότε $MN=\frac{4+6}{2}=5$ .

## 372 Θέμα 4 - 1747

**Δίνεται κύκλος $(O, R)$ με διάμετρο $AB$ και δυο ευθείες $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ εφαπτόμενες του κύκλου στα άκρα της διαμέτρου $AB$. Έστω ότι, μια τρίτη ευθεία $\varepsilon$ εφάπτεται του κύκλου σ' ένα σημείο του $E$ και τέμνει τις $\varepsilon_1$ και $\varepsilon_2$ στα $\Delta$ και $\Gamma$ αντίστοιχα.**

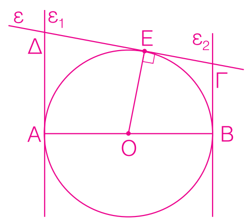
**α.** **Αν το σημείο $E$ δεν είναι το μέσο του τόξου $AB$, να αποδείξετε ότι:**

**i.** **Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι τραπέζιο.**

**ii.** **$\Gamma\Delta = A\Delta + B\Gamma$**

**β.** **Αν το σημείο $E$ βρίσκεται στο μέσον του τόξου $AB$, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $A\Delta\Gamma B$ είναι ορθογώνιο. Στην περίπτωση αυτή να εκφράσετε την περίμετρο του ορθογωνίου $A\Delta\Gamma B$ ως συνάρτηση της ακτίνας $R$ του κύκλου.**

**Λύση**



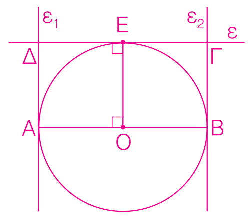

**α i.** Είναι $\varepsilon_1 \perp AB$ και $\varepsilon_2 \perp AB$, οπότε $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.

Επειδή το $E$ δεν είναι μέσο του $\overset{\frown}{AB}$, έχουμε $B\hat{O}E \neq 90^\circ$ και αφού $\hat{E} = 90^\circ$ προκύπτει $\Gamma\Delta \nparallel AB$.

Οπότε το $AB\Gamma\Delta$ είναι τραπέζιο.

**ii.** Είναι $\Delta E = \Delta A$ και $\Gamma E = \Gamma B$, ως εφαπτόμενα τμήματα.

Οπότε $\Gamma\Delta = \Gamma E + \Delta E = \Gamma B + \Delta A = A\Delta + B\Gamma$




**β.** Αν το $E$ είναι το μέσο του $\overset{\frown}{AB}$, τότε $EO \perp AB$.

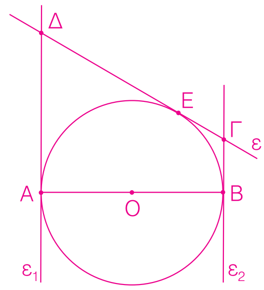
Επειδή $EO \perp \Gamma\Delta$ έχουμε $EO // A\Delta$ και $EO // B\Gamma$.

Το $OB\Gamma E$ είναι τετράγωνο αφού $\hat{B} = \hat{O} = \hat{E} = 90^\circ$ και $OB = OE = R$

Το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο, αφού $A\Delta // = B\Gamma$ και $\hat{A} = 90^\circ$

Άρα $\Pi_{A\Delta\Gamma B} = 2(AB + A\Delta) = 2(2R + R) = 6R$.

## 373 Θέμα 4 - 1758



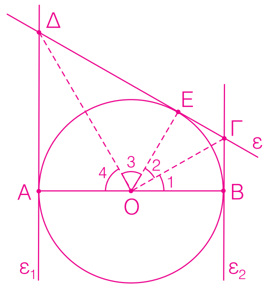

**Δίνεται κύκλος $(O, R)$ με διάμετρο $AB$ και ευθείες $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ εφαπτόμενες του κύκλου στα άκρα της διαμέτρου $AB$. Θεωρούμε ευθεία $\varepsilon$ εφαπτομένη του κύκλου σε σημείο του $E$, η οποία τέμνει τις $\varepsilon_1$ και $\varepsilon_2$ στα $\Delta$ και $\Gamma$ αντίστοιχα.**

**α.** **Να αποδείξετε ότι $\Gamma\Delta = A\Delta + B\Gamma$.**

**β.** **Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $\Gamma O\Delta$ είναι ορθογώνιο.**

**γ.** **Να διερευνήσετε το είδος του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ ανάλογα με τη θέση του σημείου $E$ στο ημικύκλιο $AB$.**

**Λύση**




**α.** Είναι $\Gamma E = \Gamma B$ και $\Delta E = \Delta A$, ως εφαπτόμενα τμήματα.

Οπότε $\Gamma\Delta = \Gamma E + E\Delta = \Gamma B + \Delta A = A\Delta + B\Gamma$.

**β.** Οι $O\Gamma$, $O\Delta$ είναι διακεντρικές ευθείες, οπότε είναι οι διχοτόμοι των $B\hat{O}E$, $E\hat{O}A$.

Άρα $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ και $\hat{O}_3 = \hat{O}_4$

Είναι $\hat{O}_1 + \hat{O}_2 + \hat{O}_3 + \hat{O}_4 = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{O}_2 + 2\hat{O}_3 = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{O}_2 + \hat{O}_3 = 90^\circ \Leftrightarrow \Gamma\hat{O}\Delta = 90^\circ$.

Άρα $O\Gamma \perp O\Delta$, οπότε το $\overset{\triangle}{\Gamma O\Delta}$ είναι ορθογώνιο.

**γ.** Οι $A\Delta$, $B\Gamma$ είναι εφαπτόμενες του κύκλου, οπότε $A\Delta \perp AB$ και $B\Gamma \perp AB$.

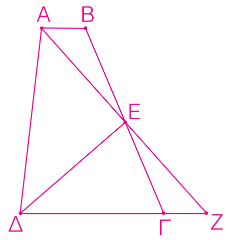
Άρα $A\Delta // B\Gamma$.

- Αν το σημείο $E$ δεν είναι μέσο του ημικυκλίου $AB$ τότε οι $\Gamma\Delta$ και $AB$ δεν είναι παράλληλες οπότε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι τραπέζιο.
- Αν το $E$ είναι μέσο του ημικυκλίου $AB$, τότε $B\hat{O}E = 90^\circ$ (επίκεντρη γωνία που βαίνει σε τεταρτοκύκλιο) και $E\Gamma \perp OE$, άρα $E\Gamma // AB$. Οπότε το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο και αφού έχει μια ορθή γωνία, είναι ορθογώνιο.

## 374 Θέμα 4 - 1783

**Σε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ $(AB // \Gamma\Delta)$ ισχύει $AB + \Gamma\Delta = A\Delta$ .**

**Αν η διχοτόμος της γωνίας $A$ τέμνει την $B\Gamma$ στο $E$ και την προέκταση της $\Delta\Gamma$ στο $Z$ , να αποδείξετε ότι:**




**α. Το τρίγωνο $\Delta AZ$ είναι ισοσκελές.**

**β. Το $E$ είναι το μέσο της $B\Gamma$ .**

**γ. Η $\Delta E$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\Delta$ του τραπεζίου.**

**Λύση**

α. Είναι:
- $\Delta\hat{A}Z = Z\hat{A}B$ , αφού $AE$ διχοτόμος
- $AB // \Gamma\Delta$ , άρα $Z\hat{A}B = A\hat{Z}\Delta$ , ως εντός εναλλάξ.

Οπότε $\Delta\hat{A}Z = \Delta\hat{Z}A$ , επομένως το $\overset{\triangle}{\Delta AZ}$ είναι ισοσκελές.

β. Από το ισοσκελές τρίγωνο $\Delta AZ$ έχουμε $A\Delta = \Delta Z \Rightarrow AB + \Gamma\Delta = \Gamma\Delta + \Gamma Z \Rightarrow AB = \Gamma Z$ .
Επειδή επιπλέον $AB // \Gamma Z$ το $ABZ\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο.
Οπότε το $E$ είναι το μέσο της διαγωνίου του $B\Gamma$ .

γ. Το $E$ είναι το μέσο και της διαγωνίου $AZ$ , του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ .

Στο ισοσκελές τρίγωνο $\Delta AZ$ , το $\Delta E$ είναι διάμεσος, οπότε η $\Delta E$ είναι διχοτόμος της $\hat{\Delta}$ .

## 375 Θέμα 4 - 1885

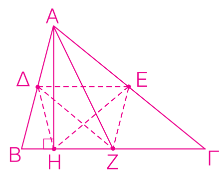
**Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και το ύψος του $AH$ . Αν $\Delta$ , $E$ και $Z$ είναι τα μέσα των $AB$ , $A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:**

**α. το τετράπλευρο $\Delta EZH$ είναι ισοσκελές τραπέζιο**

**β. οι γωνίες $H\Delta Z$ και $HEZ$ είναι ίσες**

**γ. οι γωνίες $E\Delta Z$ και $EHZ$ είναι ίσες.**

**Λύση**




α. • Στο τρίγωνο $AB\Gamma$, τα $\Delta$ , $E$ είναι τα μέσα των $AB$ , $A\Gamma$ , οπότε $\Delta E // B\Gamma$ .
Άρα το $\Delta EZH$ είναι τραπέζιο.

• Στο ορθογώνιο τρίγωνο $HAB$ $(\hat{H} = 90^\circ)$ , η $H\Delta$ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε $H\Delta = \dfrac{AB}{2}$ (1) .

• Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ , τα $E$ , $Z$ είναι τα μέσα των $A\Gamma$ , $B\Gamma$ , οπότε $EZ = \dfrac{AB}{2}$ (2) .

Από τις (1) και (2) έχουμε $H\Delta = EZ$ .
Άρα το τραπέζιο $\Delta EZH$ είναι ισοσκελές.

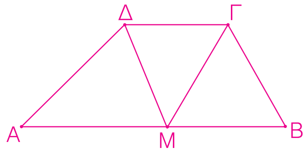
β. Τα τρίγωνα $H\Delta Z$ και $HEZ$ έχουν:
- $EZ = H\Delta$
- $HZ$ κοινή
- $\Delta\hat{H}Z = E\hat{Z}H$ , ως γωνίες βάσης του ισοσκελούς τραπεζίου.

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ) , άρα $H\hat{\Delta}Z = H\hat{E}Z$ .

γ. Είναι:
- $E\hat{\Delta}Z = \Delta\hat{Z}H$ , ως εντός εναλλάξ
- $\Delta\hat{Z}H = E\hat{H}Z$ , από την ισότητα των τριγώνων $\Delta HZ$ και $EHZ$.

Άρα $E\hat{\Delta}Z = E\hat{H}Z$

## 376 Θέμα 4 - 1815




**Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB // \Gamma\Delta$ και $AB = A\Delta + B\Gamma$. Αν η διχοτόμος της γωνίας $\Delta$ τέμνει την $AB$ στο σημείο $M$, να αποδείξετε ότι:**

**α. Το τρίγωνο $A\Delta M$ είναι ισοσκελές.**

**β. Το τρίγωνο $MB\Gamma$ είναι ισοσκελές.**

**γ. Η $\Gamma M$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\Gamma$ του τραπεζίου.**

**Λύση**

**α.** Είναι:

- $A\hat{\Delta}M = M\hat{\Delta}\Gamma$ αφού $\Delta M$ διχοτόμος
- $A\hat{M}\Delta = M\hat{\Delta}\Gamma$ , ως εντός εναλλάξ αφού $\Delta\Gamma // AB$ .

Άρα $A\hat{\Delta}M = A\hat{M}\Delta$ , οπότε το $\overset{\triangle}{A\Delta M}$ είναι ισοσκελές με $A\Delta = AM$ .

**β.** Έχουμε $AB = A\Delta + B\Gamma \Rightarrow AM + MB = A\Delta + B\Gamma \Rightarrow A\Delta + MB = A\Delta + B\Gamma \Rightarrow MB = B\Gamma$ .

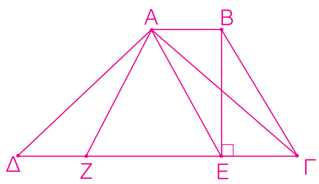
Άρα το $\overset{\triangle}{MB\Gamma}$ είναι ισοσκελές.

**γ.** Επειδή:

- $\Delta\Gamma // AB$ , είναι $\Delta\hat{\Gamma}M = \Gamma\hat{M}B$ , ως εντός εναλλάξ
- το $\overset{\triangle}{MB\Gamma}$ είναι ισοσκελές, έχουμε $\Gamma\hat{M}B = M\hat{\Gamma}B$

Άρα $\Delta\hat{\Gamma}M = M\hat{\Gamma}B$ , οπότε η $\Gamma M$ είναι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$ του τραπεζίου.

## 377 Θέμα 4 - 1860




**Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB // \Gamma\Delta$ , $\Delta\Gamma = 4AB$ και $B\Gamma = 2AB$ . Θεωρούμε σημείο $Z$ της $\Gamma\Delta$, ώστε $\Delta Z = AB$ . Αν η γωνία $\Gamma$ είναι $60^o$ και $BE$ το ύψος του τραπεζίου, να αποδείξετε ότι:**

**α. Το τετράπλευρο $AB\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο.**

**β. Το τρίγωνο $ZAE$ είναι ισόπλευρο.**

**γ. Τα τρίγωνα $\Delta AZ$ και $\Gamma AE$ είναι ίσα.**

**Λύση**

**α.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο $EB\Gamma$ $(\hat{E} = 90^o)$ είναι $E\hat{B}\Gamma + \hat{\Gamma} = 90^o \Leftrightarrow E\hat{B}\Gamma + 60^o = 90^o \Leftrightarrow E\hat{B}\Gamma = 30^o$ ,

Οπότε $E\Gamma = \dfrac{B\Gamma}{2} = \dfrac{2AB}{2} = AB$ .

Επειδή $AB // = E\Gamma$ , το $AB\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο.

**β.** Από το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma E$ έχουμε $AE = B\Gamma = 2AB$ . Είναι $ZE = \Gamma\Delta - E\Gamma - \Delta Z =$
$= 4AB - AB - AB = 2AB$ . Άρα $AE = EZ$ και $A\hat{E}Z = \hat{\Gamma} = 60^o$ , ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη, αφού $AE // B\Gamma$ .

Επομένως το $\overset{\triangle}{ZAE}$ είναι ισόπλευρο.

**γ.** Τα τρίγωνα $\Delta AZ$ και $\Gamma AE$ έχουν:

- $AZ = AE$ , αφού το $\overset{\triangle}{ZAE}$ είναι ισόπλευρο
- $\Delta Z = E\Gamma$ , αφού $\Delta Z = AB$ και $AB = E\Gamma$
- $A\hat{Z}\Delta = A\hat{E}\Gamma$ , ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $A\hat{Z}E = 60^o$ και $A\hat{E}Z = 60^o$ .

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ).

## 378 Θέμα 4 - 13519

**Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $AB > A\Delta$. Στην ΑΒ θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο, ώστε $AE = A\Delta$. Από το μέσο Μ της ΔΕ φέρουμε παράλληλη προς την ΔΓ που τέμνει την ΒΓ στο Κ.**

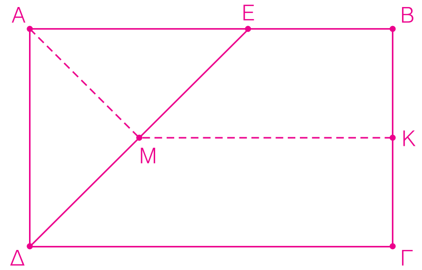
**α. Να αποδείξετε $AM \perp \Delta E$.**

**β. Να αποδείξετε ότι $2MK = 2AB - A\Delta$.**

**γ. Φέρνουμε την ΕΚ που τέμνει την προέκταση της ΔΓ στο Ζ.**
**Να αποδείξετε ότι $\Gamma Z = AB - A\Delta$.**

**Λύση**

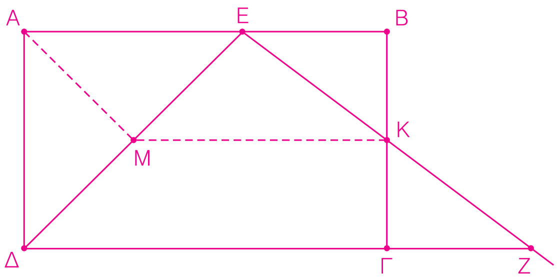
**α.** Το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές, γιατί $A\Delta = AE$.
Επομένως, η διάμεσος ΑΜ που αντιστοιχεί στην βάση θα είναι και ύψος.
Άρα, $AM \perp \Delta E$.




**β.** Το ΕΒΓΔ είναι τραπέζιο γιατί $EB // \Delta\Gamma$ και η ΔΕ δεν είναι παράλληλη με την ΒΓ.
Από το μέσο Μ της ΔΕ φέραμε $MK // \Delta\Gamma$, άρα το Κ είναι το μέσο πλευράς ΒΓ.
Η ΜΚ είναι διάμεσος του τραπεζίου ΕΒΓΔ, οπότε

$$MK = \frac{\Delta\Gamma + EB}{2} \Leftrightarrow 2MK = \Delta\Gamma + EB \Leftrightarrow 2MK = AB + AB - AE$$

$$\Leftrightarrow 2MK = 2AB - A\Delta, \quad (5).$$




**γ** Στο τρίγωνο ΔΕΖ το Μ είναι μέσο της ΔΕ και $MK // \Delta Z$, άρα η ΜΚ διέρχεται από το μέσο Κ της ΕΖ. Επομένως:

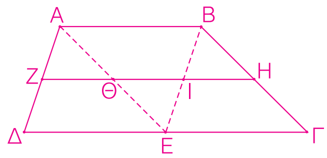
$$MK = \frac{\Delta Z}{2} \Leftrightarrow 2MK = \Delta Z \overset{\beta.}{\Leftrightarrow} 2AB - A\Delta = \Delta\Gamma + \Gamma Z \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2AB - A\Delta = AB + \Gamma Z \Leftrightarrow \Gamma Z = AB - A\Delta$$

## 379 Θέμα 4 - 1711

**Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ $(AB // \Gamma\Delta)$ είναι $\Gamma\Delta = 2AB$.**

**Επίσης τα Ζ, Η, Ε είναι τα μέσα των ΑΔ, ΒΓ και ΔΓ αντίστοιχα. Ακόμη η ΖΗ τέμνει τις ΑΕ, ΒΕ στα σημεία Θ, Ι αντίστοιχα.**




**α. Να δείξετε ότι, το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι παραλληλόγραμμο.**

**β. Να δείξετε ότι, τα σημεία Θ, Ι είναι μέσα των ΑΕ, ΒΕ αντίστοιχα.**

**γ. Να δείξετε ότι $ZH = \frac{3}{2}AB$.**

**Λύση**

**α.** Είναι $E\Gamma = \frac{\Gamma\Delta}{2} = \frac{2AB}{2} = AB$ και $E\Gamma // AB$, οπότε το ΑΒΓΕ είναι παραλληλόγραμμο.

**β.** • Στο τραπέζιο ΑΒΓΔ η ΖΗ είναι διάμεσος, οπότε $ZH // \Gamma\Delta // AB$.

• Στο $\overset{\triangle}{A\Delta E}$, το Ζ είναι το μέσο του ΑΔ και $Z\Theta // \Delta E$, οπότε το Θ μέσο του ΑΕ.

• Στο $\overset{\triangle}{BE\Gamma}$, το Η είναι το μέσο του ΒΓ και $HI // E\Gamma$, οπότε το Ι είναι το μέσο του ΒΕ.

**γ.** Είναι $ZH = \frac{\Gamma\Delta + AB}{2} = \frac{2AB + AB}{2} = \frac{3}{2}AB$.

## 380 Θέμα 4 - 1757

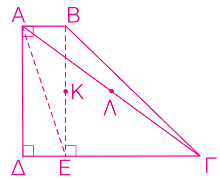
**Θεωρούμε τραπέζιο $ΑΒΓΔ$, τέτοιο ώστε $\hat{Α}=\hat{Δ}=90^\circ$, $ΑΒ=\frac{1}{4}ΔΓ$ και $ΑΒ=\frac{1}{3}ΑΔ$. Επιπλέον, φέρουμε $ΒΕ\perp ΔΓ$.**

**α.** **Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ΑΒΕΔ$ είναι ορθογώνιο.**

**β.** **Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $ΒΕΓ$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.**

**γ.** **Αν $Κ$, $Λ$ είναι τα μέσα των $ΒΕ$ και $ΑΓ$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι η $ΑΓ$ διέρχεται από το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος $ΒΚ$.**

**Λύση**




**α.** Στο τετράπλευρο $ΑΒΕΔ$ είναι $\hat{Α}=\hat{Ε}=\hat{Δ}=90^\circ$, οπότε είναι ορθογώνιο.

**β.** Επειδή το $ΑΒΕΔ$ είναι ορθογώνιο, έχουμε $ΔΕ=ΑΒ$ και $ΒΕ=ΑΔ$.

Είναι:

- $ΕΓ=ΔΓ-ΔΕ=4ΑΒ-ΑΒ=3ΑΒ$
- $ΒΕ=ΑΔ=3ΑΒ$

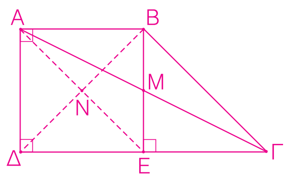
Άρα $ΕΓ=ΒΕ$, οπότε το $\overset{\Delta}{ΒΕΓ}$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

**γ.** Στο τραπέζιο $ΑΒΓΕ$, τα $Κ$, $Λ$ είναι τα μέσα των διαγωνίων του, οπότε

$$ΚΛ=\frac{ΕΓ-ΑΒ}{2}=\frac{3ΑΒ-ΑΒ}{2}=ΑΒ \text{ και } ΚΛ\,//\,ΑΒ.$$

Άρα το $ΑΒΛΚ$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε η $ΑΓ$ διέρχεται από το μέσο του $ΒΚ$.

## 381 Θέμα 4 - 1767




**Δίνεται τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ $(ΑΒ\,//\,ΓΔ)$ με $\hat{Α}=\hat{Δ}=90^\circ$, $ΔΓ=2ΑΒ$ και $\hat{Β}=3\hat{Γ}$. Φέρνουμε $ΒΕ\perp ΔΓ$ που τέμνει τη διαγώνιο $ΑΓ$ στο $Μ$. Φέρνουμε την $ΑΕ$ που τέμνει τη διαγώνιο $ΒΔ$ στο $Ν$ Να αποδείξετε ότι:**

**α.** $\hat{Γ}=45^\circ$

**β.** **Το τετράπλευρο $ΑΒΓΕ$ είναι παραλληλόγραμμο.**

**γ.** $ΑΕ\perp ΒΔ$

**Λύση**

**α.** Είναι $\hat{Β}+\hat{Γ}=180^\circ \Rightarrow 3\hat{Γ}+\hat{Γ}=180^\circ \Leftrightarrow 3\hat{Γ}=180^\circ \Leftrightarrow \hat{Γ}=45^\circ$.

**β.** Το $ΑΒΕΔ$ έχει $\hat{Α}=\hat{Δ}=\hat{Ε}=90^\circ$, οπότε είναι ορθογώνιο, άρα $ΔΕ=ΑΒ$.

Έχουμε $ΔΓ=2ΑΒ \Leftrightarrow ΔΕ+ΕΓ=2ΑΒ \Leftrightarrow ΑΒ+ΕΓ=2ΑΒ \Leftrightarrow ΕΓ=ΑΒ$.

Επειδή επιπλέον $ΑΒ\,//\,ΕΓ$, το $ΑΒΓΕ$ είναι παραλληλόγραμμο.

**γ.** Επειδή $\hat{Γ}=45^\circ$, στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΒΕΓ$ είναι $\hat{Β}=90^\circ-\hat{Γ}=90^\circ-45^\circ=45^\circ$.

Οπότε το τρίγωνο $ΒΕΓ$ είναι ισοσκελές με $ΒΕ=ΕΓ$, άρα $ΒΕ=ΕΔ$.

Επομένως το ορθογώνιο $ΑΒΕΔ$ είναι τετράγωνο, άρα οι διαγώνιοί του τέμνονται κάθετα, δηλαδή $ΑΕ\perp ΒΔ$.

## 382 Θέμα 4 - 1842

**Δίνεται παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$. Στην προέκταση της πλευράς $ΑΒ$ παίρνουμε τμήμα $ΒΕ=ΑΒ$ και στην προέκταση της πλευράς $ΑΔ$ τμήμα $ΔΖ=ΑΔ$.**

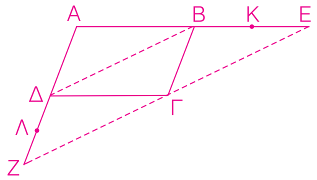
**α.** **Να αποδείξετε ότι:**

  **i.** **Τα τετράπλευρα $ΒΔΓΕ$ και $ΒΔΖΓ$ είναι παραλληλόγραμμα.**

  **ii.** **Τα σημεία $Ε$, $Γ$ και $Ζ$ είναι συνευθειακά.**

**β.** **Αν $Κ$ και $Λ$ είναι τα μέσα των $ΒΕ$ και $ΔΖ$ αντίστοιχα, τότε $ΚΛ\,//\,ΔΒ$ και $ΚΛ=\frac{3}{2}ΔΒ$.**

**Λύση**




**α. i.** Επειδή το $ΑΒΓΔ$ είναι παραλληλόγραμμο, έχουμε:

- $ΑΒ // = ΓΔ \Leftrightarrow ΒΕ // = ΓΔ$
- $ΑΔ // = ΒΓ \Leftrightarrow ΔΖ // = ΒΓ$

Άρα τα $ΒΔΓΕ$ και $ΒΔΖΓ$ είναι παραλληλόγραμμα.

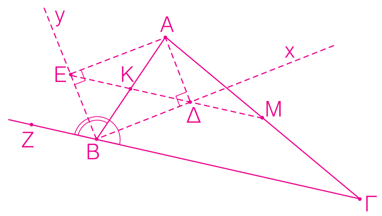
**ii.** Από τα παραλλληλόγραμμα $ΒΔΓΕ$ και $ΒΔΖΓ$, έχουμε $ΓΖ // ΔΒ$ και $ΓΕ // ΔΒ$, άρα τα $Ε$, $Γ$, $Ζ$ είναι συνευθειακά.

**β.** Στο τρίγωνο $ΑΖΕ$ τα $Δ, Β$ είναι μέσα των $ΑΖ, ΑΕ$, οπότε $ΔΒ // ΖΕ$.

Επειδή $ΔΒ // ΖΕ$, το τετράπλευρο $ΔΒΕΖ$ είναι τραπέζιο.
Η $ΚΛ$ είναι η διάμεσος του τραπεζίου $ΔΒΕΖ$, οπότε:

- $ΚΛ // ΔΒ$
- $ΚΛ = \frac{ΔΒ + ΖΕ}{2} = \frac{ΔΒ + ΖΓ + ΓΕ}{2} = \frac{ΔΒ + ΔΒ + ΔΒ}{2} = \frac{3}{2}ΔΒ$.

## 383 Θέμα 4 - 1838




**Στο διπλανό σχήμα δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$, η διχοτόμος $Βx$ της γωνίας $Β$ του τριγώνου $ΑΒΓ$ και η διχοτόμος $Βy$ της εξωτερικής γωνίας $Β$. Αν $Δ$ και $Ε$ είναι οι προβολές της κορυφής $Α$ του τριγώνου $ΑΒΓ$ στην $Βx$ και $Βy$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:**

**α. Το τετράπλευρο $ΑΔΒΕ$ είναι ορθογώνιο.**

**β. Η ευθεία $ΕΔ$ είναι παράλληλη προς τη $ΒΓ$ και διέρχεται από το μέσο $Μ$ της $ΑΓ$.**

**γ. Το τετράπλευρο $ΚΜΓΒ$ είναι τραπέζιο και η διάμεσός του είναι ίση με $\frac{3α}{4}$, όπου $α = ΒΓ$.**

**Λύση**

**α.** Οι $Βx$, $Βy$ είναι οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{Β}$ και $\hat{Β}_{εξ}$, οπότε είναι $Γ\hat{Β}Δ = Δ\hat{Β}Α$ και $Α\hat{Β}Ε = Ε\hat{Β}Ζ$

Είναι $Γ\hat{Β}Δ + Δ\hat{Β}Α + Α\hat{Β}Ε + Ε\hat{Β}Ζ = 180^\circ \Leftrightarrow 2Δ\hat{Β}Α + 2Α\hat{Β}Ε = 180^\circ \Leftrightarrow Δ\hat{Β}Α + Α\hat{Β}Ε = 180^\circ \Leftrightarrow Δ\hat{Β}Ε = 90^\circ$.

Το τετράπλευρο $ΑΔΒΕ$ έχει $\hat{Β} = \hat{Δ} = \hat{Ε} = 90^\circ$, οπότε είναι ορθογώνιο.

**β.** Επειδή το $ΑΔΒΕ$ είναι ορθογώνιο, έχουμε $ΑΒ = ΕΔ \Leftrightarrow \frac{ΑΒ}{2} = \frac{ΕΔ}{2} \Leftrightarrow ΚΒ = ΚΔ$.

Άρα το τρίγωνο $ΚΒΔ$ είναι ισοσκελές, επομένως $Κ\hat{Δ}Β = Κ\hat{Β}Δ$.

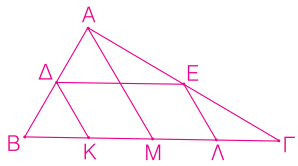
Είναι $Κ\hat{Β}Δ = Δ\hat{Β}Γ$, οπότε $Κ\hat{Δ}Β = Δ\hat{Β}Γ$
Επομένως οι $ΕΔ$ και $ΒΓ$ που τέμνονται από τη $ΒΔ$ σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες τους ίσες, άρα $ΕΔ // ΒΓ$.
Στο τρίγωνο $ΑΒΓ$ το $Κ$ είναι το μέσο της $ΑΒ$ και $ΚΜ // ΒΓ$, οπότε το $Μ$ είναι το μέσο της $ΑΓ$.

**γ.** Από το **β.** ερώτημα έχουμε $ΚΜ // ΒΓ$, οπότε το $ΚΜΓΒ$ είναι τραπέζιο και $ΚΜ = \frac{ΒΓ}{2} = \frac{α}{2}$. Η διάμεσος του τραπεζίου $ΚΜΓΒ$ είναι ίση με

$$\frac{ΒΓ + ΚΜ}{2} = \frac{α + \frac{α}{2}}{2} = \frac{3α}{4}.$$

## 384 Θέμα 4 - 1852

**Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ με $\hat{A}=90^o$. Στην πλευρά $B\Gamma$ θεωρούμε τα σημεία $K$, $M$, $\Lambda$ ώστε $BK=KM=M\Lambda=\Lambda\Gamma$. Αν τα σημεία $\Delta$ και $E$ είναι τα μέσα των πλευρών $AB$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:**




**α. Το τετράπλευρο $\Delta E\Lambda K$ είναι παραλληλόγραμμο.**

**β. Το τετράπλευρο $K\Delta AM$ είναι τραπέζιο και η διάμεσός του ισούται με $\frac{3}{8}B\Gamma$.**

**Λύση**

α. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$, τα $\Delta$, $E$ είναι τα μέσα των $AB$, $A\Gamma$, οπότε:

- $\Delta E=\frac{B\Gamma}{2}=\frac{2K\Lambda}{2}=K\Lambda$
- $\Delta E//B\Gamma$, οπότε $\Delta E//K\Lambda$

Οπότε το $\Delta E\Lambda K$ είναι παραλληλόγραμμο.

β. Στο τρίγωνο $ABM$, τα $\Delta$, $K$ είναι τα μέσα των $AB$, $BM$, οπότε $\Delta K//AM$.

Άρα το $K\Delta AM$ είναι τραπέζιο.

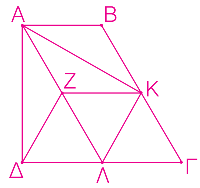
Για τη διάμεσο $\delta$ του τραπεζίου $K\Delta AM$, έχουμε $\delta=\frac{AM+\Delta K}{2}$.

- Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ $(\hat{A}=90^o)$, η $AM$ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε $AM=\frac{B\Gamma}{2}$.
- Στο τρίγωνο $ABM$ τα $\Delta$, $K$ είναι τα μέσα των $AB$, $BM$, οπότε $\Delta K=\frac{AM}{2}=\frac{B\Gamma}{4}$.

Άρα $\delta=\frac{\frac{B\Gamma}{2}+\frac{B\Gamma}{4}}{2}=\frac{\frac{3B\Gamma}{4}}{2}=\frac{3}{8}B\Gamma$.

## 385 Θέμα 4 - 1821

**Δίνεται ορθογώνιο τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ $(\hat{A}=\hat{\Delta}=90^o)$ με $B\Gamma=\Gamma\Delta=2AB$ και $K$, $\Lambda$ τα μέσα των $B\Gamma$ και $\Gamma\Delta$. Η παράλληλη από το $K$ προς την $AB$ τέμνει την $A\Lambda$ στο $Z$. Να αποδείξετε ότι:**




**α. Το $Z$ είναι μέσο του $A\Lambda$**

**β. $B\Gamma=2\Delta Z$.**

**γ. Το τετράπλευρο $ZK\Gamma\Lambda$ είναι ρόμβος.**

**δ. $A\hat{K}\Lambda=90^o$**

**Λύση**

α. Το $\Lambda$ είναι μέσο του $\Gamma\Delta$, οπότε $\Gamma\Delta=2\Gamma\Lambda \Leftrightarrow 2AB=2\Gamma\Lambda \Leftrightarrow AB=\Gamma\Lambda$.

Επομένως $AB//=\Gamma\Lambda$, άρα το $AB\Gamma\Lambda$ είναι παραλληλόγραμμο. Οπότε $A\Lambda//B\Gamma$.

Τα τετράπλευρα $ABKZ$, $ZK\Gamma\Lambda$ είναι παραλληλόγραμμα γιατί έχουν τις απέναντι πλευρές παράλληλες.

Οπότε $BK=AZ$ και $K\Gamma=Z\Lambda$.

Αφού $BK=K\Gamma$ έχουμε $AZ=Z\Lambda$.

Άρα το $Z$ θα είναι το μέσο του $A\Lambda$.

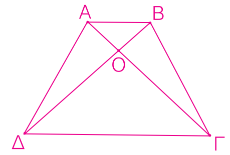
β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta A\Lambda$ $(\hat{\Delta}=90^o)$, η $\Delta Z$ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε $\Delta Z=\frac{A\Lambda}{2} \Leftrightarrow \Delta Z=\frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow B\Gamma=2\Delta Z$.

**γ.** Το ΖΚΓΛ είναι παραλληλόγραμμο και $ΚΓ = \frac{ΒΓ}{2} = \frac{2ΑΒ}{2} = ΑΒ = ΖΚ$ , άρα είναι ρόμβος.

**δ.** Στο τρίγωνο ΑΚΛ , η ΚΖ είναι διάμεσος και $ΚΖ = ΛΖ = \frac{ΑΛ}{2}$ .

Οπότε το τρίγωνο ΑΚΛ είναι ορθογώνιο με $Α\hat{Κ}Λ = 90^o$ .

## 386 Θέμα 4 - 1834




**Στο διπλανό τετράπλευρο ΑΒΓΔ ισχύουν: $ΑΔ = ΒΓ$ , $ΑΓ = ΒΔ$ , και $ΑΒ < ΓΔ$.**

**α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΔΟΓ είναι ισοσκελή.**

**β. Να αποδείξετε ότι $Δ\hat{Α}Β = Α\hat{Β}Γ$ .**

**γ. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.**

**Λύση**

**α.** Τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΒΔΓ έχουν:
- $ΑΔ = ΒΓ$
- $ΑΓ = ΒΔ$
- ΓΔ κοινή

Άρα είναι ίσα (ΠΠΠ) , επομένως $Α\hat{Γ}Δ = Β\hat{Δ}Γ$ .
Οπότε το τρίγωνο ΔΟΓ είναι ισοσκελές με $ΟΓ = ΟΔ$ .
Επειδή $ΒΔ = ΑΓ$ και $ΟΓ = ΟΔ$ έχουμε $ΟΑ = ΟΒ$ , δηλαδή το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές.

**β.** Στο τρίγωνο ΑΒΟ , είναι $ΟΑ = ΟΒ$ οπότε $Γ\hat{Α}Β = Α\hat{Β}Δ$ .

Επειδή τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΒΓΔ είναι ίσα, έχουμε $Δ\hat{Α}Γ = Δ\hat{Β}Γ$ .

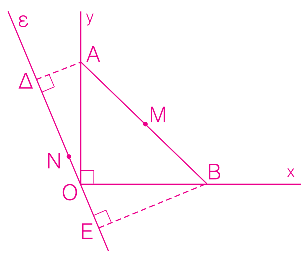
Άρα $Δ\hat{Α}Β = Δ\hat{Α}Γ + Γ\hat{Α}Β = Δ\hat{Β}Γ + Α\hat{Β}Δ = Α\hat{Β}Γ$

**γ.** Τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΒΓΔ είναι ίσα, οπότε $Α\hat{Δ}Γ = Β\hat{Γ}Δ$

Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ έχουμε:
$Δ\hat{Α}Β + Α\hat{Β}Γ + Α\hat{Δ}Γ + Β\hat{Γ}Δ = 360^o \Leftrightarrow 2Δ\hat{Α}Β + 2Α\hat{Δ}Γ = 360^o \Leftrightarrow Δ\hat{Α}Β + Α\hat{Δ}Γ = 180^o$

Οι γωνίες $Δ\hat{Α}Β$ και $Α\hat{Δ}Γ$ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των ΑΒ , ΓΔ που τέμνονται από την ΑΔ και είναι παραπληρωματικές, οπότε $ΑΒ // ΓΔ$ .
Άρα το ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο και επειδή $ΑΔ = ΒΓ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

## 387 Θέμα 4 - 1778




**Δίνεται ορθή γωνία $x\hat{O}y = 90^o$ και Α , Β σημεία των ημιευθειών Oy, Ox, με $ΟΑ = ΟΒ$. Η ε είναι ευθεία που διέρχεται από την κορυφή Ο και αφήνει τις ημιευθείες Ox , Oy στο ίδιο ημιεπίπεδο.**
**Η κάθετος από το σημείο Α στην ε την τέμνει στο Δ και η κάθετος από το σημείο Β στην ε την τέμνει στο Ε . Να αποδείξετε ότι:**

**α. Τα τρίγωνα ΟΑΔ και ΟΕΒ είναι ίσα.**

**β. $ΑΔ + ΒΕ = ΔΕ$**

**γ. $ΜΝ = \frac{ΔΕ}{2}$, όπου ΜΝ είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των ΔΕ και ΑΒ.**

**δ. Το τρίγωνο ΔΜΕ είναι ορθογώνιο ισοσκελές.**

**Λύση**

**α.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο $OEB$ έχουμε $O\hat{B}E = 90^o - B\hat{O}E$

Είναι $A\hat{O}\Delta + 90^o + B\hat{O}E = 180^o \Leftrightarrow A\hat{O}\Delta = 90^o - B\hat{O}E \Leftrightarrow A\hat{O}\Delta = B\hat{O}E$ .

Τα ορθογώνια τρίγωνα $OA\Delta$ και $OBE$ έχουν:
- $OA = OB$
- $A\hat{O}\Delta = O\hat{B}E$

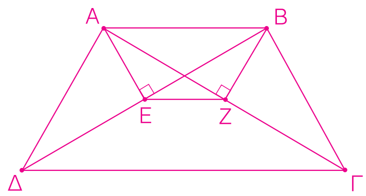
Άρα είναι ίσα.

**β.** Επειδή τα τρίγωνα $OA\Delta$ και $OBE$ είναι ίσα, έχουμε $A\Delta = OE$ και $O\Delta = BE$ .
Είναι $A\Delta + BE = OE + O\Delta = \Delta E$ .

**γ.** Είναι $A\Delta \perp \Delta E$ και $BE \perp \Delta E$ , οπότε $A\Delta // BE$ , άρα το $A\Delta EB$ είναι τραπέζιο.
Η $MN$ είναι διάμεσος του τραπεζίου, οπότε $MN = \dfrac{A\Delta + BE}{2} \overset{\beta.}{=} \dfrac{\Delta E}{2}$ .

**δ.** Είναι $MN // A\Delta$ και $A\Delta \perp \Delta E$, οπότε $MN \perp \Delta E$ . Στο $\overset{\Delta}{\Delta ME}$ η $MN$ είναι διάμεσος και ύψος, οπότε το $\overset{\Delta}{\Delta ME}$ είναι ισοσκελές. Επειδή στο $\overset{\Delta}{\Delta ME}$ η διάμεσος $MN$ είναι ίση με $\dfrac{\Delta E}{2}$ , το τρίγωνο είναι ορθογώνιο. Άρα το $\overset{\Delta}{\Delta ME}$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

## 388 Θέμα 4 - 1861




**Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB // \Gamma\Delta$ και $A\Delta = B\Gamma = AB$ . Φέρουμε τμήματα $AE$ και $BZ$ κάθετα στις διαγώνιες $B\Delta$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:**

**α. Τα σημεία $Z$ και $E$ είναι μέσα των διαγωνίων $A\Gamma$ και $B\Delta$ αντίστοιχα.**

**β. $AE = BZ$**

**γ. Το τετράπλευρο $AEZB$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.**

**δ. Η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\Delta$ .**

**Λύση**

**α.** Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $AB\Gamma$ είναι ισοσκελή και τα $AE$ , $BZ$ είναι ύψη τους, οπότε είναι και διάμεσοί τους. Άρα τα $Z$ , $E$ είναι τα μέσα των $A\Gamma$ , $B\Delta$ αντίστοιχα.

**β.** Επειδή το $AB\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο, έχουμε $A\Gamma = B\Delta$ , οπότε και $EB = ZA$ .
Τα ορθογώνια τρίγωνα $EAB$ και $ZAB$ έχουν:
- $EB = ZA$
- $AB$ κοινή

Άρα είναι ίσα, οπότε $AE = BZ$ .

**γ.** Στο τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ τα $E$ , $Z$ είναι τα μέσα των διαγωνίων του, οπότε $EZ // AB$ .
Άρα το $AEZB$ είναι τραπέζιο και επειδή $AE = BZ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

**δ.** Το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές με $AB = A\Delta$ , οπότε $A\hat{\Delta}B = A\hat{B}\Delta$ . Επειδή $AB // \Gamma\Delta$ έχουμε $A\hat{B}\Delta = B\hat{\Delta}\Gamma$, ως εντός εναλλάξ.

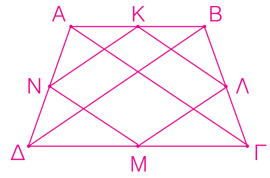
Άρα $A\hat{\Delta}B = B\hat{\Delta}\Gamma$, οπότε η $B\Delta$ είναι η διχοτόμος της $\hat{\Delta}$ .

## 389 Θέμα 4 - 1797

**α. Σε ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ θεωρούμε $K$ , $\Lambda$ , $M$ , $N$ τα μέσα των πλευρών του $AB$ , $B\Gamma$ , $\Gamma\Delta$ , $\Delta A$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $K\Lambda MN$ είναι ρόμβος.**

**β. Σε ένα τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ τα μέσα $K$ , $\Lambda$ , $M$ , $N$ των πλευρών του $AB$ , $B\Gamma$ , $\Gamma\Delta$ , $\Delta A$ αντίστοιχα είναι κορυφές ρόμβου. Για να σχηματίζεται ρόμβος το $AB\Gamma\Delta$ πρέπει να είναι ισοσκελές τραπέζιο; Να αιτιολογήσετε πλήρως τη θετική ή αρνητική απάντησή σας.**

**Λύση**




**α.** Επειδή τα $Κ$, $Λ$, $Μ$, $Ν$ είναι τα μέσα των πλευρών του τετραπλεύρου $ΑΒΓΔ$, το $ΚΛΜΝ$ είναι παραλληλόγραμμο.

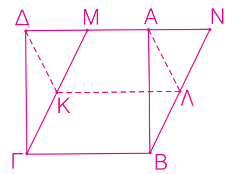
Αφού το $ΑΒΓΔ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο, έχουμε $ΑΓ = ΒΔ$.

Στο $\overset{\Delta}{ΑΒΔ}$, τα $Κ$, $Ν$ είναι τα μέσα των $ΑΒ$, $ΑΔ$, οπότε $ΚΝ = \frac{ΒΔ}{2}$.

Στο $\overset{\Delta}{ΑΒΓ}$, τα $Κ$, $Λ$ είναι τα μέσα των $ΑΒ$, $ΒΓ$, οπότε $ΚΛ = \frac{ΑΓ}{2}$. Άρα $ΚΛ = ΚΝ$, οπότε το $ΚΛΜΝ$ είναι ρόμβος.

**β.** Επειδή το $ΚΛΜΝ$ είναι ρόμβος, έχουμε $ΚΝ = ΚΛ$ και από το **α.** ερώτημα $ΑΓ = ΒΔ$.
Οπότε για να σχηματίζεται ρόμβος, αρκεί το $ΑΒΓΔ$ να έχει ίσες διαγωνίους.
Άρα δεν είναι υποχρεωτικό το $ΑΒΓΔ$ να είναι ισοσκελές τραπέζιο.

## 390 Θέμα 4 - 1854




**Έστω τετράγωνο $ΑΒΓΔ$ και $Μ$ το μέσο της πλευράς $ΔΑ$. Προεκτείνουμε το τμήμα $ΔΑ$ (προς την πλευρά του $Α$) κατά τμήμα $ΑΝ = \frac{ΑΔ}{2}$.**

**Φέρουμε τα τμήματα $ΓΜ$ και $ΒΝ$ και θεωρούμε τα μέσα τους $Κ$ και $Λ$ αντίστοιχα.**
**Να αποδείξετε ότι:**

**α.** **Το τετράπλευρο $ΜΝΒΓ$ είναι παραλληλόγραμμο.**

**β.** **Το τετράπλευρο $ΑΔΚΛ$ είναι παραλληλόγραμμο.**

**γ.** **Το τετράπλευρο $ΑΜΚΛ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.**

**Λύση**

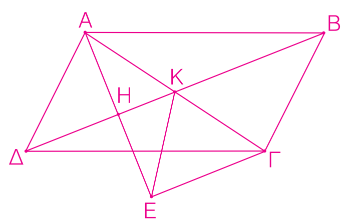
**α.** Είναι $ΜΝ = ΜΑ + ΑΝ = \frac{ΑΔ}{2} + \frac{ΑΔ}{2} = ΑΔ = ΒΓ$.
Επειδή $ΜΝ \mathbin{//=} ΒΓ$, το $ΜΝΒΓ$ είναι παραλληλόγραμμο.

**β.** Τα $Κ$, $Λ$ είναι τα μέσα των παράλληλων τμημάτων $ΜΓ$, $ΝΒ$, οπότε $ΜΚ \mathbin{//=} ΝΛ$, άρα το $ΜΝΛΚ$ είναι παραλληλόγραμμο.
Επομένως $ΚΛ \mathbin{//=} ΜΝ$, άρα $ΚΛ \mathbin{//=} ΑΔ$.
Οπότε το $ΑΔΚΛ$ είναι παραλληλόγραμμο.

**γ.** Επειδή $ΑΜ // ΚΛ$, το $ΑΜΚΛ$ είναι τραπέζιο.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΝ$ $(\hat{Α} = 90^\circ)$ η $ΑΛ$ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε $ΑΛ = \frac{ΒΝ}{2} = \frac{ΜΓ}{2} = ΜΚ$.
Επομένως το $ΑΜΚΛ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

## 391 Θέμα 4 - 1830




**Δίνεται παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ και $Κ$ το σημείο τομής των διαγωνίων του.**
**Φέρουμε $ΑΗ$ κάθετη στην $ΒΔ$ και στην προέκταση της $ΑΗ$ (προς το $Η$) θεωρούμε σημείο $Ε$ τέτοιο ώστε $ΑΗ = ΗΕ$. Να αποδείξετε ότι:**

**α.** **Το τρίγωνο $ΑΚΕ$ είναι ισοσκελές.**

**β.** **Το τρίγωνο $ΑΕΓ$ είναι ορθογώνιο.**

**γ.** **Το τετράπλευρο $ΔΒΓΕ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.**

**Λύση**

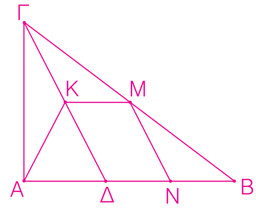
**α.** Στο τρίγωνο $ΑΚΕ$, το $ΚΗ$ είναι ύψος και διάμεσος, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

**β.** Στο τρίγωνο $ΑΕΓ$, τα $Η$, $Κ$ είναι τα μέσα των $ΑΕ$, $ΑΓ$, οπότε $ΗΚ // ΕΓ$.
Επειδή $ΗΚ \perp ΑΕ$, είναι $ΕΓ \perp ΑΕ$.
Άρα το τρίγωνο $ΑΕΓ$ είναι ορθογώνιο.

**γ.** Επειδή $\Delta B \perp AE$ και $\Gamma E \perp AE$, έχουμε $\Delta B // \Gamma E$, οπότε το $\Delta B\Gamma E$ είναι τραπέζιο.
Η $\Delta B$ είναι η μεσοκάθετος του $AE$, οπότε $\Delta E = \Delta A$.
Είναι $\Delta A = \Gamma B$, αφού το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο, άρα $\Delta E = B\Gamma$.
Οπότε το $\Delta B\Gamma E$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

## 392 Θέμα 4 - 1789

**Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με τη γωνία $A$ ορθή, και τυχαίο σημείο $\Delta$ της πλευράς $AB$. Έστω $K$, $M$, $N$ τα μέσα των $\Gamma\Delta$, $B\Gamma$, $B\Delta$ αντίστοιχα.**
**Να αποδείξετε ότι:**




**α. Το τετράπλευρο $KMN\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.**

**β. Το τετράπλευρο $AKMN$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.**

**γ. Η διάμεσος του τραπεζίου $AKMN$ είναι ίση με $\dfrac{AB}{2}$.**

**Λύση**

**α.** Στο τρίγωνο $\Gamma\Delta B$, τα $K$, $M$ είναι τα μέσα των $\Gamma\Delta$, $B\Gamma$, οπότε $KM // = \dfrac{B\Delta}{2} \Leftrightarrow KM // = \Delta N$.
Άρα το $KMN\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

**β.** Επειδή $KM // AB$, το $AKMN$ είναι τραπέζιο. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ $(\hat{A} = 90^\circ)$ η $AK$ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε $AK = \dfrac{\Gamma\Delta}{2}$.

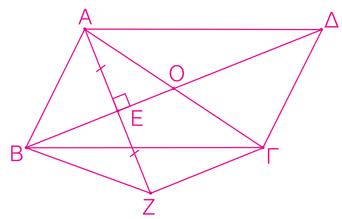
Επειδή το $KMN\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο, έχουμε $MN = K\Delta = \dfrac{\Gamma\Delta}{2}$.

Άρα $AK = MN$, οπότε το $AKMN$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

**γ.** Η διάμεσος του τραπεζίου $AKMN$ είναι $\delta = \dfrac{KM + AN}{2} = \dfrac{\Delta N + AN}{2} = \dfrac{NB + AN}{2} = \dfrac{AB}{2}$.

## 393 Θέμα 4 - 1841

**Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB < A\Delta$ και έστω $O$ το σημείο τομής των διαγωνίων $A\Gamma$ και $B\Delta$. Φέρνουμε την $AE$ κάθετη στην διαγώνιο $B\Delta$. Αν το $Z$ είναι το συμμετρικό του $A$ ως προς την διαγώνιο $B\Delta$ και δεν συμπίπτει με το σημείο $\Gamma$, τότε να αποδείξετε ότι:**




**α. Το τρίγωνο $A\Delta Z$ είναι ισοσκελές.**

**β. $Z\Gamma = 2OE$**

**γ. Το $B\Delta\Gamma Z$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.**

**Λύση**

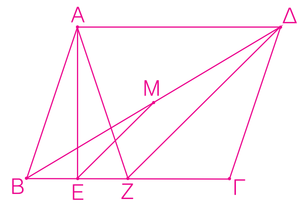
**α.** Στο τρίγωνο $A\Delta Z$, το $\Delta E$ είναι ύψος και διάμεσος, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

**β.** Στο τρίγωνο $AZ\Gamma$, τα $E$, $O$ είναι τα μέσα των $AZ$, $A\Gamma$, οπότε

$$OE // Z\Gamma \quad \text{και} \quad OE = \frac{Z\Gamma}{2} \Leftrightarrow Z\Gamma = 2OE$$

**γ.** Είναι $OE // Z\Gamma$, άρα $B\Delta // Z\Gamma$, οπότε το $B\Delta\Gamma Z$ είναι τραπέζιο.
Η $\Delta B$ είναι η μεσοκάθετος του $AZ$, οπότε $BA = BZ$
Είναι $AB = \Gamma\Delta$, αφού το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο, άρα $BZ = \Delta\Gamma$.
Οπότε το $B\Delta\Gamma Z$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

## 394 Θέμα 4 - 1790




**Δίνεται παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ με τη γωνία του $Β$ να είναι ίση με $70^o$ και το ύψος του $ΑΕ$. Έστω $Ζ$ σημείο της $ΒΓ$ ώστε $ΒΕ = ΕΖ$.**

**α. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ΑΖΓΔ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.**

**β. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τραπεζίου $ΑΖΓΔ$.**

**γ. Αν $Μ$ το μέσο του $ΒΔ$, να αποδείξετε ότι $ΕΜ = \dfrac{ΑΓ}{2}$.**

**Λύση**

**α.** Στο τρίγωνο $ΑΒΖ$, το $ΑΕ$ είναι ύψος και διάμεσος.
Άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές με $ΑΖ = ΑΒ$.
Αφού το $ΑΒΓΔ$ είναι παραλληλόγραμμο, είναι $ΑΒ = ΔΓ$, οπότε $ΑΖ = ΔΓ$.
Επειδή $ΖΓ // ΑΔ$ και $ΑΖ = ΔΓ$ το $ΑΖΓΔ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

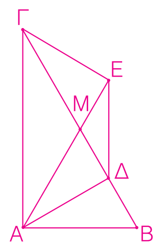
**β.** Είναι:
- $\hat{Δ} = \hat{Β} = 70^o$, ως απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου
- $Ζ\hat{Α}Δ = \hat{Δ} = 70^o$
- $\hat{Γ} = 180^o - \hat{Β} = 180^o - 70^o = 110^o$
- $Α\hat{Ζ}Γ = \hat{Γ} = 110^o$

Άρα οι γωνίες του τραπεζίου $ΑΖΓΔ$ είναι $\hat{Δ} = Ζ\hat{Α}Δ = 70^o$ και $\hat{Γ} = Α\hat{Ζ}Γ = 110^o$.

**γ.** Στο ισοσκελές τραπέζιο $ΑΔΓΖ$ είναι $ΑΓ = ΔΖ$.

Στο τρίγωνο $ΒΖΔ$ τα $Μ$, $Ε$ τα μέσα των $ΒΔ$, $ΒΖ$, οπότε $ΕΜ = \dfrac{ΔΖ}{2}$. Άρα $ΕΜ = \dfrac{ΑΓ}{2}$.

## 395 Θέμα 4 - 1791




**Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $\hat{Α} = 90^o$ και $\hat{Γ} = 30^o$. Φέρουμε το ύψος του $ΑΔ$ και τη διάμεσό του $ΑΜ$. Από το $Γ$ φέρουμε κάθετη στην ευθεία $ΑΜ$, η οποία την τέμνει στο $Ε$. Να αποδείξετε ότι:**

**α. Το τρίγωνο $ΑΜΒ$ είναι ισόπλευρο.**

**β. $ΜΕ = ΜΔ = \dfrac{ΒΓ}{4}$**

**γ. Το $ΑΔΕΓ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.**

**Λύση**

**α.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ $(\hat{Α} = 90^o)$ η $ΑΜ$ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε $ΑΜ = \dfrac{ΒΓ}{2} = ΜΒ$.

Άρα το $\overset{\triangle}{ΜΑΒ}$ είναι ισοσκελές και επειδή $\hat{Β} = 90^o - \hat{Γ} = 90^o - 30^o = 60^o$ είναι ισόπλευρο.

**β.** Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΕΜΓ$ $(\hat{Ε} = 90^o)$ και $ΔΜΑ$ $(\hat{Δ} = 90^o)$, έχουν:
- $ΜΑ = ΜΓ$
- $Α\hat{Μ}Δ = Γ\hat{Μ}Ε$

Άρα είναι ίσα, οπότε $ΜΕ = ΜΔ$.
Στο ισόπλευρο τρίγωνο $ΜΑΒ$, το ύψος $ΑΔ$ είναι και διάμεσος, οπότε

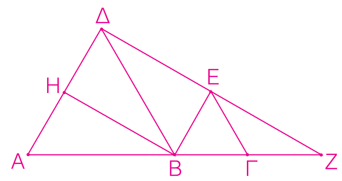
$$ΜΔ = \frac{ΜΒ}{2} = \frac{\frac{ΒΓ}{2}}{2} = \frac{ΒΓ}{4}$$

**γ.** Στο $\overset{\Delta}{\mathrm{M\Delta E}}$ έχουμε $\mathrm{M\Delta = ME}$ , άρα $\mathrm{M\hat{E}\Delta = M\hat{\Delta}E}$ .
Η γωνία $\mathrm{A\widehat{M}B}$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $\mathrm{M\Delta E}$ οπότε
$\mathrm{A\widehat{M}B = M\hat{E}\Delta + M\hat{\Delta}E} \Leftrightarrow 60^\circ = 2\mathrm{M\hat{\Delta}E} \Leftrightarrow \mathrm{M\hat{\Delta}E} = 30^\circ$ .

Επειδή $\hat{\Gamma} = \Gamma\hat{\Delta}\mathrm{E}$ $(=30^\circ)$ και είναι εντός εναλλάξ, έχουμε $\Delta\mathrm{E} // \mathrm{A}\Gamma$ , άρα το $\mathrm{A\Delta E\Gamma}$ είναι τραπέζιο.

Αφού $\Gamma\hat{\mathrm{E}}\Delta = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ = \mathrm{E}\hat{\Delta}\mathrm{A}$ το $\mathrm{A\Delta E\Gamma}$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

## 396 Θέμα 4 - 1829




**Σε μια ευθεία ε θεωρούμε διαδοχικά τα σημεία Α , Β , Γ έτσι ώστε $\mathrm{AB} = 2\mathrm{B}\Gamma$ και στο ίδιο ημιεπίπεδο θεωρούμε ισόπλευρα τρίγωνα $\mathrm{AB\Delta}$ και $\mathrm{B\Gamma E}$ Αν Η είναι το μέσο του $\mathrm{A\Delta}$ και η ευθεία $\Delta\mathrm{E}$ τέμνει την ευθεία ε στο σημείο Ζ να αποδείξετε ότι:**

**α. Το τετράπλευρο ΒΗΔΕ είναι ορθογώνιο.**

**β. Το τρίγωνο ΓΖΕ είναι ισοσκελές.**

**γ. Το τετράπλευρο ΗΕΓΑ είναι ισοσκελές τραπέζιο.**

**Λύση**

**α.** Στο ισόπλευρο τρίγωνο $\mathrm{AB\Delta}$ το ΒΗ είναι διάμεσος οπότε είναι ύψος και διχοτόμος.

Άρα $\mathrm{BH} \perp \mathrm{A\Delta}$ και $\mathrm{H\hat{B}\Delta = H\hat{B}A} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$ .

Είναι $\mathrm{H\hat{B}E} = 180^\circ - \mathrm{H\hat{B}A} - \mathrm{E\hat{B}\Gamma} = 180^\circ - 30^\circ - 60^\circ = 90^\circ$ .
Οπότε $\mathrm{BH} \perp \Delta\mathrm{H}$ και $\mathrm{BH} \perp \mathrm{EB}$ , άρα $\mathrm{EB} // \Delta\mathrm{H}$ .
Έχουμε $\mathrm{EB} = \mathrm{B}\Gamma = \frac{\mathrm{AB}}{2} = \frac{\mathrm{A\Delta}}{2} = \mathrm{H\Delta}$ .

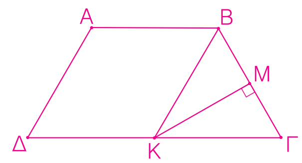
Επειδή $\mathrm{EB} // = \Delta\mathrm{H}$ το ΒΗΔΕ είναι παραλληλόγραμμο και αφού επιπλέον είναι $\hat{\mathrm{H}} = 90^\circ$ , είναι ορθογώνιο.

**β.** Είναι $\mathrm{A\hat{\Delta}Z} = 90^\circ$ , αφού το ΒΗΔΕ είναι ορθογώνιο.
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΖ το Η είναι το μέσο της ΑΔ και $\mathrm{HB} // \Delta\mathrm{Z}$ , οπότε το Β είναι το μέσο της ΑΖ .
Επομένως $\mathrm{AB} = \mathrm{BZ} \Rightarrow \mathrm{AB} = \mathrm{B}\Gamma + \Gamma\mathrm{Z} \Rightarrow 2\mathrm{B}\Gamma = \mathrm{B}\Gamma + \Gamma\mathrm{Z} \Rightarrow \mathrm{B}\Gamma = \Gamma\mathrm{Z}$ .

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΕΖ $(\hat{\mathrm{E}} = 90^\circ)$ η ΕΓ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε
$\mathrm{E}\Gamma = \frac{\mathrm{BZ}}{2} \Leftrightarrow \mathrm{E}\Gamma = \Gamma\mathrm{Z}$ .
Άρα το τρίγωνο ΓΖΕ είναι ισοσκελές.

**γ.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΖ το Β είναι το μέσο του ΑΖ και $\mathrm{BE} // \mathrm{A\Delta}$ , οπότε το Ε είναι το μέσο της ΑΖ. Στο $\overset{\Delta}{\mathrm{A\Delta Z}}$ τα Η , Ε είναι τα μέσα των ΑΔ , ΔΖ , οπότε $\mathrm{HE} // \mathrm{AZ}$ .
Άρα το ΗΕΓΑ είναι τραπέζιο και επειδή $\hat{\mathrm{A}} = \mathrm{E}\widehat{\Gamma}\mathrm{B} = 60^\circ$ , είναι ισοσκελές τραπέζιο.

## 397 Θέμα 4 - 1853




**Έστω ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ $(\mathrm{AB} // \Delta\Gamma)$ με $\hat{\mathrm{B}} = 2\hat{\Gamma}$ και $\mathrm{AB} = \mathrm{B}\Gamma = \mathrm{A\Delta} = \frac{\Gamma\Delta}{2}$. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας $\hat{\mathrm{B}}$ , η οποία τέμνει το ΔΓ στο Κ και η κάθετη από το Κ προς το ΒΓ το τέμνει στο Μ .**

**α. Να υπολογίσετε τις γωνίες του ΑΒΓΔ .**

**β. Να αποδείξετε ότι:**

- **i. Το τετράπλευρο ΑΒΚΔ είναι ρόμβος.**
- **ii. Το σημείο Μ είναι το μέσο του ΒΓ .**

**Λύση**

**α.** Επειδή το τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο, έχουμε $\hat{Α} = \hat{Β}$ και $\hat{Γ} = \hat{Δ}$.
Είναι $ΑΒ // ΓΔ$, οπότε

$\hat{Β} + \hat{Γ} = 180^o \Leftrightarrow 2\hat{Γ} + \hat{Γ} = 180^o \Leftrightarrow \hat{Γ} = 60^o$.

Άρα $\hat{Β} = 2\hat{Γ} = 120^o$, $\hat{Α} = \hat{Β} = 120^o$ και $\hat{Δ} = \hat{Γ} = 60^o$.

**β. i.** Στο τρίγωνο $ΒΚΓ$ είναι $Κ\hat{Β}Γ = \frac{\hat{Β}}{2} = \frac{120^o}{2} = 60^o$, $\hat{Γ} = 60^o$ και $Β\hat{Κ}Γ = 180^o - 60^o - 60^o = 60^o$.

Άρα είναι ισόπλευρο, οπότε $ΚΒ = ΒΓ = ΚΓ$.

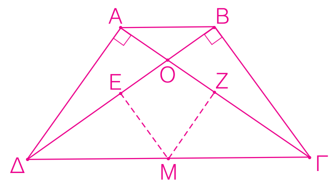
Έχουμε $ΒΓ = \frac{ΓΔ}{2} \Leftrightarrow 2ΒΓ = ΔΓ \Leftrightarrow 2ΚΓ = ΔΚ + ΚΓ \Leftrightarrow ΚΓ = ΔΚ \Leftrightarrow ΒΚ = ΔΚ$.

Επειδή $ΑΒ = ΒΚ = ΚΔ = ΑΔ$ το $ΑΒΚΔ$ είναι ρόμβος.

**ii.** Επειδή το τρίγωνο $ΒΚΓ$ είναι ισόπλευρο και το $ΚΜ$ είναι ύψος, θα είναι και διάμεσος, οπότε το $Μ$ είναι το μέσο του $ΒΓ$.

## 398 Θέμα 4 - 1867

**Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ $(ΑΒ // ΓΔ)$ και $Ο$ το σημείο τομής των διαγωνίων του. Η $ΑΓ$ είναι κάθετη στην $ΑΔ$ και η $ΒΔ$ είναι κάθετη στην $ΒΓ$. Θεωρούμε τα μέσα $Μ$, $Ε$ και $Ζ$ των $ΓΔ$, $ΒΔ$ και $ΑΓ$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:**




**α.** $ΜΕ = ΜΖ$

**β.** **Η $ΜΖ$ είναι κάθετη στην $ΑΓ$.**

**γ.** **Τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{ΜΔΕ}$ και $\overset{\Delta}{ΜΖΓ}$ είναι ίσα.**

**δ.** **Η $ΟΜ$ είναι μεσοκάθετος του $ΕΖ$.**

**Λύση**

**α.** Επειδή το τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο, έχουμε $ΑΔ = ΒΓ$.

- Στο τρίγωνο $ΔΒΓ$ τα $Μ$, $Ε$ είναι τα μέσα των $ΔΓ$, $ΔΒ$, οπότε $ΜΕ = \frac{ΒΓ}{2}$.
- Στο τρίγωνο $ΓΔΑ$, τα $Μ$, $Ζ$ είναι τα μέσα των $ΓΔ$, $ΓΑ$ οπότε $ΜΖ = \frac{ΑΔ}{2}$

Άρα $ΜΕ = ΜΖ$.

**β.** Στο τρίγωνο $ΓΔΑ$, τα $Μ$, $Ζ$ είναι τα μέσα των $ΓΔ$, $ΓΑ$, οπότε $ΜΖ // ΑΔ$ και επειδή $ΑΔ \perp ΑΓ$ είναι και $ΜΖ \perp ΑΓ$.

**γ.** Τα τρίγωνα $ΜΔΕ$ και $ΜΖΓ$ έχουν:
- $ΜΔ = ΜΓ$
- $ΜΕ = ΜΖ$
- $ΔΕ = ΖΓ$ ως μισά ίσων τμημάτων

Άρα είναι ίσα (ΠΠΠ).

**δ.** Επειδή τα τρίγωνα $ΜΔΕ$ και $ΜΓΖ$ είναι ίσα έχουμε $Ε\hat{Δ}Μ = Μ\hat{Γ}Ζ$.

Άρα το τρίγωνο $ΟΔΓ$ είναι ισοσκελές με $ΟΔ = ΟΓ$.

Οπότε $ΟΕ = ΟΔ - ΔΕ = ΟΓ - ΓΖ = ΟΖ$.

Επειδή $ΟΕ = ΟΖ$ και $ΜΕ = ΜΖ$, η $ΟΜ$ είναι η μεσοκάθετος του $ΕΖ$.

## 399 Θέμα 4 - 1893

**Έστω $ΑΒΓΔ$ ορθογώνιο με $ΑΒ > ΒΓ$ τέτοιο ώστε οι διαγώνιοί του να σχηματίζουν γωνία $60^o$. Από το $Δ$ φέρουμε $ΔΜ$ κάθετη στην $ΑΓ$.**

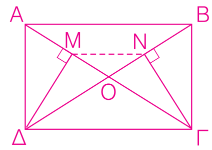
**α. Να αποδείξετε ότι:**

**i. το σημείο $Μ$ είναι μέσο του $ΑΟ$ όπου $Ο$ το κέντρο του ορθογωνίου.**

**ii. $ΑΜ = \frac{1}{4}ΑΓ$**

**β. Αν από το $Γ$ φέρουμε $ΓΝ$ κάθετη στη $ΒΔ$, να αποδείξετε ότι το $ΜΝΓΔ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.**

**Λύση**




**α. i.** Επειδή το $Ο$ είναι το κέντρο του ορθογωνίου, έχουμε $ΟΑ = ΟΔ$.

Αφού επιπλέον $\hat{ΑΟΔ} = 60^o$, το τρίγωνο $ΑΟΔ$ είναι ισόπλευρο.
Επειδή το $ΔΜ$ είναι ύψος του ισόπλευρου τριγώνου $ΟΑΔ$, θα είναι και διάμεσος.
Άρα το $Μ$ είναι το μέσο του $ΟΑ$.

**ii.** Είναι $ΑΜ = \frac{1}{2}ΟΑ = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}ΑΓ = \frac{1}{4}ΑΓ$.

**β.** Στο τρίγωνο $ΟΓΒ$ είναι $ΟΒ = ΟΓ$ και $\widehat{ΒΟΓ} = 60^o$, οπότε είναι ισόπλευρο.
Επειδή το $ΓΝ$ είναι ύψος του, θα είναι και διάμεσος, οπότε το $Ν$ είναι το μέσο του $ΟΒ$.
Στο τρίγωνο $ΟΑΒ$, τα $Μ$, $Ν$ είναι τα μέσα των $ΟΑ$, $ΟΒ$, οπότε $ΜΝ // ΑΒ$.
Επειδή $ΑΒ // ΓΔ$ έχουμε $ΜΝ // ΓΔ$, άρα το τετράπλευρο $ΜΝΓΔ$ είναι τραπέζιο.

Είναι:
- $ΟΜ = \frac{ΟΑ}{2} = \frac{ΟΒ}{2} = ΟΝ$
- $ΟΓ = ΟΔ$

Οπότε $ΟΜ + ΟΓ = ΟΝ + ΟΔ \Leftrightarrow ΜΓ = ΝΔ$. Άρα το $ΜΝΓΔ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

## 400 Θέμα 4 - 1722

**Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ $(\hat{Α} = 90^o)$ και η διχοτόμος του $ΒΔ$. Από το $Δ$ φέρουμε $ΔΕ \perp ΒΓ$ και ονομάζουμε $Ζ$ το σημείο στο οποίο η ευθεία $ΕΔ$ τέμνει την προέκταση της $ΒΑ$. Να αποδείξετε ότι:**

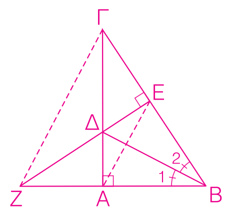
**α. Το τρίγωνο $ΑΒΕ$ είναι ισοσκελές.**

**β. Τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΒΕΖ$ είναι ίσα.**

**γ. Η ευθεία $ΒΔ$ είναι μεσοκάθετη των τμημάτων $ΑΕ$ και $ΖΓ$.**

**δ. Το τετράπλευρο $ΑΕΓΖ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.**

**Λύση**




**α.** Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΑΒΔ$ και $ΕΒΔ$ έχουν:
- $ΒΔ$ κοινή
- $\hat{Β}_1 = \hat{Β}_2$

Άρα είναι ίσα, οπότε $ΒΑ = ΒΕ$.
Επομένως το τρίγωνο $ΑΒΕ$ είναι ισοσκελές.

**β.** Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΒΕΖ$ έχουν:
- $ΑΒ = ΒΕ$
- $\hat{Β}$ κοινή

Άρα είναι ίσα.

**γ.** Επειδή τα τρίγωνα $ΑΒΔ$ και $ΕΒΔ$ είναι ίσα, έχουμε $ΔΑ = ΔΕ$ και $ΒΑ = ΒΕ$.
Οπότε η $ΒΔ$ είναι η μεσοκάθετος του $ΑΕ$.

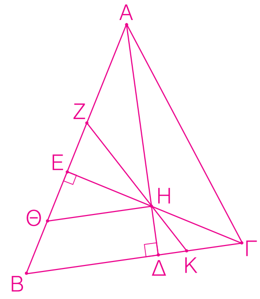
Επειδή τα $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$ και $\overset{\triangle}{ΒΕΖ}$ είναι ίσα, έχουμε $ΒΓ = ΒΖ$ και $ΑΓ = ΖΕ$.

Οπότε $ΔΓ = ΑΓ - ΑΔ = ΖΕ - ΔΕ = ΔΖ$.

Αφού $ΒΓ = ΒΖ$ και $ΔΓ = ΔΖ$, η $ΒΔ$ είναι η μεσοκάθετος του $ΖΓ$.

**δ.** Επειδή $ΑΕ \perp ΒΔ$ και $ΓΖ \perp ΒΔ$ είναι $ΑΕ // ΓΖ$.
Επομένως το $ΑΕΓΖ$ είναι τραπέζιο. Αφού επιπλέον $ΑΓ = ΖΕ$, το $ΑΕΓΖ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

## 401 Θέμα 4 - 1845




**Δίνεται το τρίγωνο $ΑΒΓ$ με γωνία $Β=60^o$. Φέρνουμε τα ύψη $ΑΔ$ και $ΓΕ$ που τέμνονται στο $Η$. Φέρνουμε $ΚΖ$ διχοτόμο της γωνίας $ΕΗΑ$ και $ΘΗ$ κάθετο στο ύψος $ΑΔ$. Να αποδείξετε ότι:**

**α. Για το τμήμα $ΖΕ$ ισχύει $ΖΗ=2ΕΖ$.**

**β. Το τρίγωνο $ΘΖΗ$ είναι ισόπλευρο.**

**γ. Το τετράπλευρο $ΘΗΚΒ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.**

**Λύση**

α. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΔ$ είναι $Β\widehat{Α}Δ+\widehat{Β}=90^o \Leftrightarrow Β\widehat{Α}Δ+60^o=90^o \Leftrightarrow Β\widehat{Α}Δ=30^o$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΕΗ$ είναι $Ε\widehat{Η}Α+Ε\widehat{Α}Η=90^o \Leftrightarrow Ε\widehat{Η}Α+30^o=90^o \Leftrightarrow Ε\widehat{Η}Α=60^o$.

Άρα $Ε\widehat{Η}Ζ=\dfrac{Ε\widehat{Η}Α}{2}=\dfrac{60^o}{2}=30^o$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΖΗΕ$ $(\hat{Ε}=90^o)$, έχουμε $Ε\hat{Η}Ζ=30^o$, άρα $ΕΖ=\dfrac{ΖΗ}{2} \Leftrightarrow ΖΗ=2ΕΖ$.

β. Είναι $Ε\hat{Η}Θ=Α\widehat{Η}Θ-Ε\widehat{Η}Α=90^o-60^o=30^o$, άρα $Ε\widehat{Η}Θ=Ε\widehat{Η}Ζ$.
Οπότε στο τρίγωνο $ΘΖΗ$ το $ΗΕ$ είναι ύψος και διχοτόμος.

Άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές και αφού επιπλέον είναι $Ζ\hat{Η}Θ=60^o$, είναι ισόπλευρο.

γ. Επειδή $ΘΗ \perp ΑΔ$ και $ΒΓ \perp ΑΔ$, έχουμε $ΘΗ // ΒΚ$, οπότε το $ΘΗΚΒ$ είναι τραπέζιο.
Είναι $\widehat{Κ}=Θ\widehat{Η}Ζ=60^o$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη.

Αφού το $ΘΗΚΒ$ είναι τραπέζιο και ισχύει $\hat{Β}=\hat{Κ}=60^o$, το $ΘΗΚΒ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

## 402 Θέμα 4 - 1755

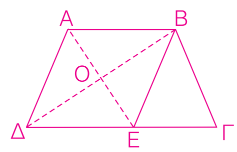
**Σε ισοσκελές τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ $(ΑΒ // ΓΔ)$ είναι $ΑΒ=ΑΔ$.**

**α. Να αποδείξετε ότι η $ΒΔ$ είναι διχοτόμος της γωνίας $Δ$.**

**β. Να προσδιορίσετε τη θέση ενός σημείου $Ε$, ώστε το τετράπλευρο $ΑΒΕΔ$ να είναι ρόμβος.**

**γ. Αν επιπλέον είναι γωνία $Β\widehat{Α}Δ=120^o$ και οι διαγώνιοι του ρόμβου τέμνονται στο σημείο $Ο$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου $ΕΟΒΓ$.**

**Λύση**




α. Επειδή $ΑΒ=ΑΔ$, είναι $Α\hat{Β}Δ=Α\hat{Δ}Β$.

Αφού $ΑΒ // ΓΔ$, έχουμε $Α\hat{Β}Δ=Β\hat{Δ}Γ$, ως εντός εναλλάξ.

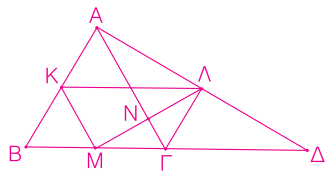
Άρα $Α\hat{Δ}Β=Β\hat{Δ}Γ$, επομένως η $ΔΒ$ είναι η διχοτόμος της $\hat{Δ}$.

β. Από το $Β$ φέρουμε παράλληλη στην $ΑΔ$ που τέμνει την $ΓΔ$ στο $Ε$.
Το τετράπλευρο $ΑΒΕΔ$ έχει τις απέναντι πλευρές παράλληλες και δύο διαδοχικές πλευρές ίσες $(ΑΒ=ΑΔ)$, οπότε είναι ρόμβος.

γ. Επειδή το $ΑΒΕΔ$ είναι ρόμβος, οι διαγώνιοί του $ΑΕ$ και $ΒΔ$ διχοτομούν τις γωνίες του και τέμνονται κάθετα.
Είναι:

- $Β\hat{Ο}Ε=90^o$
- $Α\widehat{Β}Γ=Β\widehat{Α}Δ=120^o$
- $Α\widehat{Β}Γ+\widehat{Γ}=180^o \Leftrightarrow 120^o+\widehat{Γ}=180^o \Leftrightarrow \hat{Γ}=60^o$
- $Ο\hat{Β}Γ=Α\hat{Β}Γ-Α\hat{Β}Ο=120^o-30^o=90^o$
- $Ο\hat{Ε}Γ=360^o-(Β\hat{Ο}Ε+\hat{Γ}+Ο\hat{Β}Γ)=360^o-(90^o+60^o+90^o)=360^o-240^o=120^o$

## 403 Θέμα 4 - 1863




**Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Στην προέκταση του ΒΓ (προς το Γ) θεωρούμε τμήμα ΓΔ = ΒΓ. Αν Μ, Κ και Λ είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ, ΑΒ και ΑΔ αντίστοιχα τότε:**

**α. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΒΑΔ.**

**β. Να αποδείξετε ότι:**

**i. Το τετράπλευρο ΚΛΓΜ είναι ισοσκελές τραπέζιο με τη μεγάλη βάση διπλάσια από τη μικρή.**

**ii. Το τρίγωνο ΚΜΛ είναι ορθογώνιο.**

**Λύση**

**α.** Στο τρίγωνο ΑΒΔ, η ΑΓ είναι διάμεσος και $\mathrm{A\Gamma} = \mathrm{B\Gamma} = \dfrac{\mathrm{B\Delta}}{2}$, οπότε $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Delta = 90^\circ$.

Είναι $\hat{\mathrm{B}} = 60^\circ$, οπότε $\hat{\Delta} = 90^\circ - \hat{\mathrm{B}} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

**β. i.** Στο τρίγωνο ΑΒΔ, τα Κ, Λ είναι τα μέσα των ΑΒ, ΑΔ, οπότε

- $\mathrm{K\Lambda} \parallel \mathrm{B\Delta}$, άρα το ΚΛΓΜ είναι τραπέζιο
- $\mathrm{K\Lambda} = \dfrac{\mathrm{B\Delta}}{2} = \dfrac{2\mathrm{B\Gamma}}{2} = \mathrm{B\Gamma} = 2\mathrm{M\Gamma}$.

Στα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΔ τα Κ, Μ και Γ, Λ είναι τα μέσα των πλευρών τους, οπότε $\mathrm{KM} = \dfrac{\mathrm{A\Gamma}}{2}$ και $\Gamma\Lambda = \dfrac{\mathrm{AB}}{2}$.

Αφού $\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma}$ έχουμε $\mathrm{KM} = \Gamma\Lambda$.

Άρα το τραπέζιο ΚΛΓΜ είναι ισοσκελές.

**ii.** Είναι:

- $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{K}}\Lambda = \widehat{\mathrm{B}} = 60^\circ$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη
- $\Lambda\widehat{\mathrm{K}}\mathrm{M} = \mathrm{K}\widehat{\mathrm{M}}\mathrm{B}$, ως εντός εναλλάξ
- $\mathrm{K}\widehat{\mathrm{M}}\mathrm{B} = \mathrm{A}\widehat{\Gamma}\mathrm{B} = 60^\circ$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη

Οπότε $\Lambda\widehat{\mathrm{K}}\mathrm{M} = 60^\circ = \mathrm{A}\widehat{\mathrm{K}}\Lambda$.

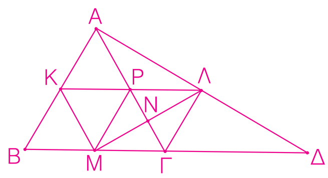
Τα τρίγωνα ΚΛΜ και ΑΚΛ έχουν:

- ΚΛ κοινή
- $\mathrm{AK} = \mathrm{KM}$, αφού $\mathrm{AK} = \dfrac{\mathrm{AB}}{2} = \dfrac{\mathrm{A\Gamma}}{2} = \mathrm{KM}$
- $\Lambda\widehat{\mathrm{K}}\mathrm{M} = \mathrm{A}\widehat{\mathrm{K}}\Lambda$

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ), οπότε $\mathrm{K}\widehat{\mathrm{M}}\Lambda = \widehat{\mathrm{A}} = 90^\circ$.

Επομένως το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ορθογώνιο.

2ος τρόπος




Έστω Ρ το σημείο τομής των ΚΛ, ΑΓ.

Αφού το Λ είναι το μέσο του ΑΔ και $\mathrm{P\Lambda} \parallel \Gamma\Delta$, το Ρ είναι το μέσο του ΑΓ.

Είναι $\mathrm{PM} = \dfrac{\mathrm{AB}}{2} = \mathrm{AK} = \dfrac{\mathrm{K\Lambda}}{2}$.

Επειδή επιπλέον η ΡΜ είναι διάμεσος στο τρίγωνο ΚΜΛ έχουμε $\mathrm{K}\hat{\mathrm{M}}\Lambda = 90^\circ$, άρα το τρίγωνο ΚΜΛ είναι ορθογώνιο.

## 404 Θέμα 4 - 1884

**Έστω ισοσκελές τρίγωνο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ $(AB = A\Gamma)$ και $A\Delta$ διάμεσος. Στο τμήμα $A\Delta$ θεωρούμε τυχαίο σημείο $K$ από το οποίο φέρνουμε τα τμήματα $KZ$ και $KE$ κάθετα στις $AB$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα.**

**α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $KB\Gamma$ και $KZE$ είναι ισοσκελή.**

**β. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ZE\Gamma B$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.**

**γ. Ένας μαθητής στην πορεία της λύσης του έδωσε το εξής επιχείρημα:**

**«Το τμήμα ΑΔ είναι διάμεσος στη βάση ισοσκελούς άρα ύψος και διχοτόμος του τριγώνου $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ και μεσοκάθετος του $B\Gamma$. Οπότε και το τρίγωνο $\overset{\Delta}{BK\Gamma}$ είναι ισοσκελές.**

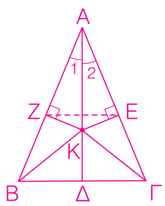
**Τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{ABK}$, $\overset{\Delta}{A\Gamma K}$ έχουν**

1. **$BK = K\Gamma$**
2. **$B\hat{A}K = \Gamma\hat{A}K$ επειδή $AK$ διχοτόμος της $\hat{A}$**
3. **$A\hat{B}K = A\hat{\Gamma}K$ ως διαφορές ίσων γωνιών ισοσκελών τριγώνων.**

**Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα βάση του κριτηρίου Γωνία Πλευρά Γωνία.»**

**Ο καθηγητής είπε ότι η απάντηση του είναι ελλιπής. Να συμπληρώσετε την απάντηση του μαθητή ώστε να ικανοποιεί το κριτήριο Γωνία – Πλευρά – Γωνία διατηρώντας τις πλευρές $BK$ και $K\Gamma$.**

### Λύση




**α.** Στο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ η διάμεσος $A\Delta$ είναι ύψος και διχοτόμος.
Επειδή το $K$ ανήκει στη μεσοκάθετο $A\Delta$ του $B\Gamma$ έχουμε $KB = K\Gamma$.
Οπότε το τρίγωνο $KB\Gamma$ είναι ισοσκελές.
Επειδή Το $K$ ανήκει στην $A\Delta$ διχοτόμο της γωνίας $\hat{A}$ έχουμε $KZ = KE$, οπότε το τρίγωνο $ZKE$ είναι ισοσκελές.

**β.** Τα ορθογώνια τρίγωνα $ZAK$ και $EAK$ έχουν:
- $AK$ κοινή
- $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$

Άρα είναι ίσα, οπότε $AZ = AE$.
Επομένως το τρίγωνο $AZE$ είναι ισοσκελές, με $A\hat{Z}E = A\hat{E}Z$

Είναι $A\hat{Z}E + A\hat{E}Z + \hat{A} = 180^\circ \Leftrightarrow 2A\hat{Z}E = 180^\circ - \hat{A} \Leftrightarrow A\hat{Z}E = 90^\circ - \dfrac{\hat{A}}{2}$.

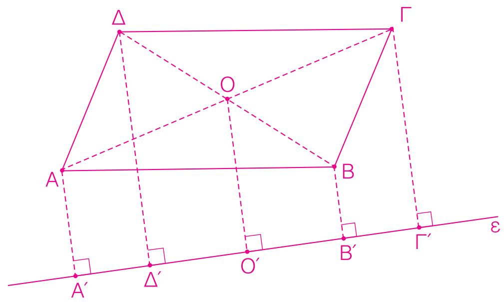
Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές, με $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ και έχουμε

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{B} = 180^\circ - A \Leftrightarrow \hat{B} = 90^\circ - \dfrac{\hat{A}}{2}$.

Άρα $\hat{B} = A\hat{Z}E$, οι οποίες είναι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη, οπότε $ZE \parallel B\Gamma$.
Επομένως το $ZE\Gamma B$ είναι τραπέζιο και επειδή $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

**γ.** Η απάντηση είναι ελλιπής διότι ο μαθητής έλαβε υπόψη του γωνίες που δεν είναι προσκείμενες σε κάθε πλευρά. Έπρεπε να αναφέρει ότι αφού τα δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες, θα έχουν και τις τρίτες τους γωνίες ίσες, δηλαδή $A\hat{K}B = A\hat{K}\Gamma$.
Οπότε τα τρίγωνα είναι ίσα με το κριτήριο ΓΠΓ.

## 405 Θέμα 4 - 1718



**Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τις προβολές Α΄, Β΄, Γ΄, Δ΄ των κορυφών του Α, Β, Γ, Δ αντίστοιχα, σε μια ευθεία ε.**

**α. Αν η ευθεία ε αφήνει τις κορυφές του παραλληλογράμμου στο ίδιο ημιεπίπεδο και είναι $AA'=3$, $BB'=2$, $\Gamma\Gamma'=5$, τότε:**

**i. Να αποδείξετε ότι η απόσταση του κέντρου του παραλληλογράμμου από την ε είναι ίση με 4.**

**ii. Να βρείτε την απόσταση $\Delta\Delta'$.**

**β. Αν η ευθεία ε διέρχεται από το κέντρο του παραλληλογράμμου και είναι παράλληλη προς δύο απέναντι πλευρές του, τι παρατηρείτε για τις αποστάσεις ΑΑ΄, ΒΒ΄, ΓΓ΄, ΔΔ΄; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.**

**Λύση**

**α. i.** Είναι $AA'\perp\varepsilon$ και $\Gamma\Gamma'\perp\varepsilon$, οπότε $AA'//\Gamma'\Gamma$. Άρα το $AA'\Gamma'\Gamma$ είναι τραπέζιο.

Είναι $AA'//OO'//\Gamma\Gamma'$ και $OA=O\Gamma$, οπότε $O'A'=O'\Gamma'$.

Άρα η $OO'$ είναι διάμεσος του τραπεζίου $AA'\Gamma'\Gamma$.

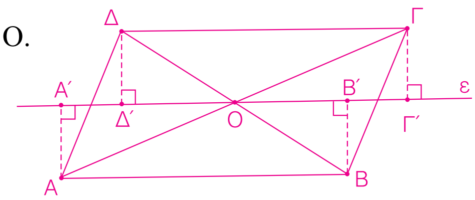
Οπότε $OO'=\dfrac{AA'+\Gamma\Gamma'}{2}=\dfrac{3+5}{2}=4$.

**ii.** Είναι $BB'\perp\varepsilon$ και $\Delta\Delta'\perp\varepsilon$, οπότε $BB'\perp\Delta\Delta'$.

Άρα το $BB'\Delta'\Delta$ είναι τραπέζιο.

Βρίσκουμε ότι η $OO'$ είναι διάμεσος και του τραπεζίου $BB'\Delta'\Delta$.

Οπότε $OO'=\dfrac{BB'+\Delta\Delta'}{2}\Leftrightarrow 4=\dfrac{2+\Delta\Delta'}{2}\Leftrightarrow \Delta\Delta'=6$.

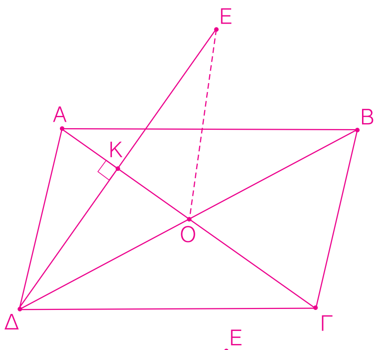


**β.** Η ευθεία ε είναι παράλληλη στις ΑΒ, ΓΔ και διέρχεται από το κέντρο Ο.

Επομένως η ευθεία ε είναι μεσοπαράλληλος των ΑΒ και ΓΔ.

Τα σημεία Α, Β, Γ και Δ των ΑΒ, ΓΔ ισαπέχουν από τη μεσοπαράλληλό τους, οπότε $AA'=BB'=\Gamma\Gamma'=\Delta\Delta'$.

## 406 Θέμα 4 - 1770

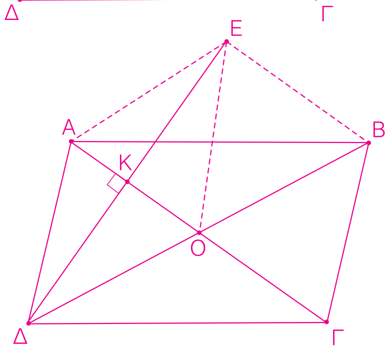


**Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με Ο το κέντρο του. Από την κορυφή Δ φέρουμε το τμήμα ΔΚ κάθετο στην ΑΓ και στην προέκτασή του προς το Κ θεωρούμε σημείο Ε, ώστε $KE=\Delta K$. Να αποδείξετε ότι:**

**α. $EO=\dfrac{B\Delta}{2}$** **β. Η γωνία $\Delta\hat{E}B$ είναι ορθή.**

**γ. Το τετράπλευρο ΑΕΒΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο.**

**Λύση**



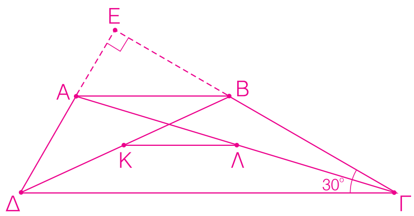
**α.** Η ΑΓ είναι μεσοκάθετος του ΔΕ, οπότε $OE=O\Delta\Leftrightarrow OE=\dfrac{B\Delta}{2}$.

**β.** Στο $\overset{\triangle}{\Delta BE}$ η ΕΟ είναι διάμεσος και ίση με $\dfrac{B\Delta}{2}$, οπότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με $\Delta\hat{E}B=90^\circ$.

**γ.** Είναι $BE\perp\Delta E$ και $A\Gamma\perp\Delta E$, οπότε $BE//A\Gamma$. Επειδή η ΑΓ είναι μεσοκάθετος του ΔΕ, έχουμε $AE=A\Delta\Leftrightarrow AE=B\Gamma$.

Οπότε το ΑΕΒΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

## 407 Θέμα 4 - 1736




**Δίνεται τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ $(ΑΒ // ΓΔ)$ με τη γωνία $Γ$ ίση με $30^o$ και έστω $Κ$, $Λ$ τα μέσα των διαγωνίων του. Οι μη παράλληλες πλευρές του $ΔΑ$ και $ΓΒ$ προεκτεινόμενες τέμνονται κάθετα στο σημείο $Ε$. Να αποδείξετε ότι:**

**α.** $ΑΒ = 2ΑΕ$

**β.** $ΚΛ = ΑΔ$

**γ. Σε ποια περίπτωση το $ΑΒΛΚ$ είναι παραλληλόγραμμο;**
**Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.**

**Λύση**

**α.** Επειδή $ΑΒ // ΓΔ$ είναι $Α\hat{Β}Ε = \hat{Γ} = 30^o$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΕΑΒ$ είναι $\hat{Β} = 30^o$, οπότε $ΑΕ = \frac{ΑΒ}{2} \Rightarrow ΑΒ = 2ΑΕ$.

**β.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΕΔΓ$ είναι $\hat{Γ} = 30^o$, οπότε $ΕΔ = \frac{ΓΔ}{2} \Leftrightarrow ΓΔ = 2ΕΔ$.

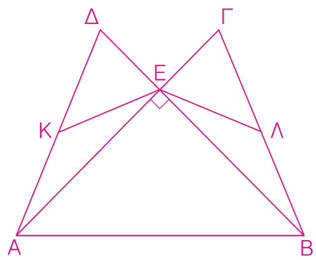
Τα $Κ$, $Λ$ είναι μέσα των διαγώνιων του τραπεζίου $ΑΒΓΔ$, οπότε

$$ΚΛ = \frac{ΓΔ - ΑΒ}{2} \Leftrightarrow ΚΛ = \frac{2ΕΔ - 2ΑΕ}{2} \Leftrightarrow ΚΛ = \frac{2(ΕΔ - ΑΕ)}{2} \Leftrightarrow ΚΛ = ΕΔ - ΑΕ \Leftrightarrow ΚΛ = ΑΔ.$$

**γ.** Είναι $ΚΛ // ΑΒ$, οπότε για να είναι το $ΑΒΛΚ$ παραλληλόγραμμο αρκεί $ΚΛ = ΑΒ$.

Είναι $ΚΛ = ΑΔ$, οπότε αρκεί $ΑΔ = ΑΒ$, δηλαδή το τρίγωνο $ΑΒΔ$ είναι ισοσκελές.

## 408 Θέμα 4 - 1876




**Δίνονται δυο ίσα ισοσκελή τρίγωνα $ΑΒΓ$ $(ΑΒ = ΑΓ)$ και $ΑΒΔ$ $(ΒΑ = ΒΔ)$, τέτοια ώστε οι πλευρές τους $ΑΓ$ και $ΒΔ$ να τέμνονται κάθετα στο σημείο $Ε$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.**
**Τα σημεία $Κ$ και $Λ$ είναι τα μέσα των τμημάτων $ΑΔ$ και $ΒΓ$ αντίστοιχα.**
**Να αποδείξετε ότι:**

**α.** $ΕΔ = ΕΓ$

**β.** $ΔΓ // ΑΒ$

**γ. Το τρίγωνο $ΕΚΛ$ είναι ισοσκελές και $ΚΛ // ΑΒ$.**

**Λύση**

**α.** Επειδή τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΒΑΔ$, είναι ίσα, θα έχουν τις γωνίες της κορυφής ίσες, οπότε έχουμε $\hat{Α} = \hat{Β}$.
Άρα το τρίγωνο $ΕΑΒ$ είναι ισοσκελές με $ΕΑ = ΕΒ$.
Επειδή $ΑΓ = ΒΔ$, έχουμε $ΕΔ = ΕΓ$, ως διαφορές ίσων τμημάτων.

**β.** Τα τρίγωνα $ΕΓΔ$ και $ΕΑΒ$ είναι ορθογώνια και ισοσκελή, οπότε:

- $Ε\hat{Δ}Γ = Ε\hat{Γ}Δ = 45^o$
- $Ε\hat{Α}Β = Ε\hat{Β}Α = 45^o$

Επομένως $Ε\hat{Δ}Γ = Δ\hat{Β}Α$, οι οποίες είναι εντός εναλλάξ, άρα $ΔΓ // ΑΒ$.

**γ.** • Στα ορθογώνια τρίγωνα $ΕΑΔ$ και $ΕΒΓ$ οι $ΕΚ$, $ΕΛ$ είναι διάμεσοι προς την υποτείνουσα, επομένως $ΕΚ = \frac{ΑΔ}{2}$ και $ΕΛ = \frac{ΒΓ}{2}$.

Οπότε $ΕΚ = ΕΛ$, άρα το τρίγωνο $ΕΚΛ$ είναι ισοσκελές.

• Είναι $ΔΓ // ΑΒ$ οπότε το $ΔΓΒΑ$ είναι τραπέζιο και επειδή η $ΚΛ$ είναι διάμεσος, έχουμε $ΚΛ // ΑΒ$.

## 409 Θέμα 4 - 1856

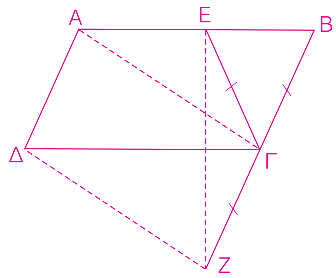
**Σε παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ με $ΑΒ > ΒΓ$ και $Β < 90^o$ θεωρούμε σημείο $Ζ$ στην προέκταση της $ΒΓ$ (προς το $Γ$) τέτοιο ώστε $ΓΖ = ΒΓ$. Αν $Ε$ είναι σημείο της $ΑΒ$, τέτοιο ώστε $ΕΓ = ΓΒ$, να αποδείξετε ότι:**

**α. Η γωνία $ΒΕΖ$ είναι ορθή.**

**β. Το τετράπλευρο $ΑΕΓΔ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.**

**γ. Το τετράπλευρο $ΑΓΖΔ$ είναι παραλληλόγραμμο.**

**Λύση**




**α.** Στο τρίγωνο $ΕΒΖ$ η $ΕΓ$ είναι διάμεσος και $ΕΓ = ΓΒ = \frac{ΒΖ}{2}$, οπότε

$Β\hat{Ε}Ζ = 90^o$.

**β.** Επειδή $ΑΕ // ΓΔ$, το $ΑΕΓΔ$ είναι τραπέζιο.
Έχουμε $ΓΕ = ΓΒ$ και $ΓΒ = ΑΔ$, οπότε $ΓΕ = ΑΔ$, άρα το $ΑΕΓΔ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

**γ.** Είναι $ΒΓ // = ΑΔ$, οπότε $ΓΖ // = ΑΔ$, άρα το $ΑΓΖΔ$ είναι παραλληλόγραμμο.

## 410 Θέμα 4 - 1786

**Δίνεται παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ με $ΑΒ = 2ΒΓ$ και τη γωνία $Β$ αμβλεία. Από την κορυφή $Α$ φέρουμε την $ΑΕ$ κάθετη στην ευθεία $ΒΓ$ και έστω $Μ$, $Ν$ τα μέσα των $ΑΒ$, $ΔΓ$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:**

**α. Το τετράπλευρο $ΜΒΓΝ$ είναι ρόμβος.**

**β. Το τετράπλευρο $ΜΕΓΝ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.**

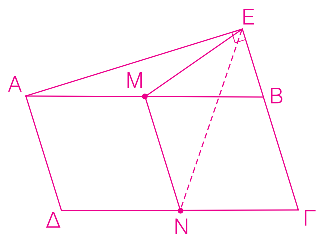
**γ. Η $ΕΝ$ είναι διχοτόμος της γωνίας $Μ\hat{Ε}Γ$.**

**Λύση**

**α.** Είναι $ΜΒ // ΓΝ$ και $ΜΒ = ΓΝ$, ως μισά ίσων τμημάτων.

Επειδή $ΜΒ // = ΓΝ$, το $ΜΒΓΝ$ είναι παραλληλόγραμμο.

Είναι $ΜΒ = \frac{ΑΒ}{2} = \frac{2ΒΓ}{2} = ΒΓ$. Άρα το $ΜΒΓΝ$ είναι ρόμβος.

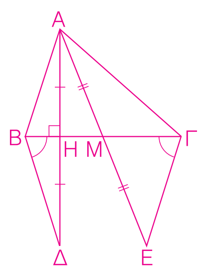



**β.** Επειδή το $ΜΒΓΝ$ είναι ρόμβος έχουμε $ΜΝ // ΒΓ$, οπότε το $ΜΕΓΝ$ είναι τραπέζιο. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΕΑΒ$, το $ΕΜ$ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε $ΕΜ = \frac{ΑΒ}{2} = ΜΒ = ΝΓ$.

Οπότε το $ΜΕΓΝ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

**γ.** Επειδή $ΜΕ = ΜΝ$ έχουμε $Μ\hat{Ε}Ν = Μ\hat{Ν}Ε$. Αφού $ΜΝ // ΕΓ$, έχουμε $Μ\hat{Ν}Ε = Ν\hat{Ε}Γ$, ως εντός εναλλάξ.
Άρα $Μ\hat{Ε}Ν = Ν\hat{Ε}Γ$, οπότε η $ΕΝ$ είναι διχοτόμος της $Μ\hat{Ε}Γ$.

## 411 Θέμα 4 - 1732




**Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$. Προεκτείνουμε το ύψος του $ΑΗ$ κατά τμήμα $ΗΔ = ΑΗ$ και τη διάμεσό του $ΑΜ$ κατά τμήμα $ΜΕ = ΑΜ$. Να αποδείξετε ότι:**

**α. $ΑΒ = ΒΔ = ΓΕ$**

**β. $Γ\hat{Β}Δ = Β\hat{Γ}Ε$**

**γ. Το τετράπλευρο $ΒΓΕΔ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.**

**Λύση**

**α.** • Επειδή η ΒΓ είναι μεσοκάθετος του ΑΔ έχουμε $AB = B\Delta$ .
• Αφού $MB = M\Gamma$ και $MA = ME$ το ΑΒΕΓ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε $\Gamma E = AB$ .

Άρα $AB = B\Delta = \Gamma E$ .

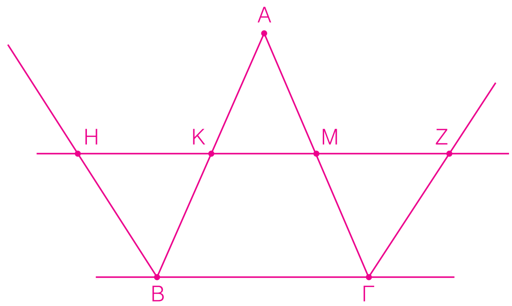
**β.** Είναι $A\hat{B}\Gamma = B\hat{\Gamma}E$ , ως εντός εναλλάξ. Το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές, άρα το ύψος ΒΗ είναι και διχοτόμος, οπότε $A\hat{B}\Gamma = \Delta\hat{B}\Gamma$ .

Επομένως $\Gamma\hat{B}\Delta = B\hat{\Gamma}E$ .

**γ.** Στο τρίγωνο ΑΔΕ τα Η και Μ είναι μέσα των πλευρών του, οπότε $HM // \Delta E$ .

Επομένως $B\Gamma // \Delta E$ , άρα το ΒΓΕΔ είναι τραπέζιο. Αφού επιπλέον έχουμε $\Gamma\hat{B}\Delta = B\hat{\Gamma}E$ το ΒΓΕΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

## 412 Θέμα 4 - 13838

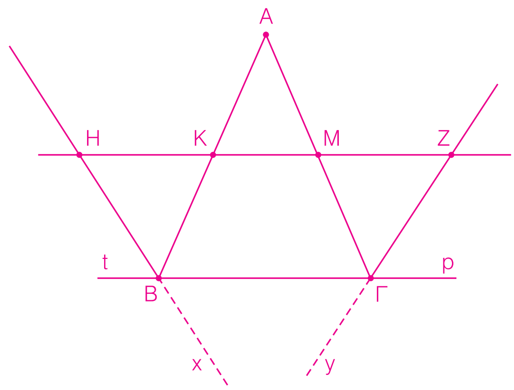



**Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB = A\Gamma)$, με Κ, Μ τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Κ και Μ τέμνει τις εξωτερικές διχοτόμους των γωνιών Β και Γ στα σημεία Η και Ζ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.**

**α. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΚΜΓΒ είναι ισοσκελές τραπέζιο.**

**β. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΓΖΗ είναι ισοσκελές τραπέζιο.**

**Λύση**




**α.** Στο τρίγωνο ΑΒΓ τα Κ και Μ είναι τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, άρα ΚΜ//ΒΓ. Το ΚΜΓΒ είναι τραπέζιο αφού ΚΜ//ΒΓ. Είναι ΚΒ = ΜΓ, ως μισά των ίσων τμημάτων ΑΒ και ΑΓ.

Άρα το ΚΜΓΒ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

**β.** Είναι: • ΚΜ//ΒΓ, άρα και ΗΖ//ΒΓ. Επιπλέον οι ΒΗ και ΓΖ τεμνόμενες από τη ΒΓ σχηματίζουν τις εντός και επί τα αυτά γωνίες τους ( $\Gamma\hat{B}x$ και $B\hat{\Gamma}y$ ) με άθροισμα μικρότερο από 2 ορθές, αφού:

• $\Gamma\hat{B}x = H\hat{B}t = \dfrac{\hat{B}\varepsilon\xi}{2}$

• $B\hat{\Gamma}y = Z\hat{\Gamma}p = \dfrac{\hat{\Gamma}\varepsilon\xi}{2}$

Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, οπότε οι ίσες γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ είναι οξείες άρα οι εξωτερικές τους $\hat{B}\varepsilon\xi$ και $\hat{\Gamma}\varepsilon\xi$ είναι αμβλείες επομένως:

$$\hat{B}\varepsilon\xi < 180^\circ \Leftrightarrow \frac{\hat{B}\varepsilon\xi}{2} < 90^\circ \quad \text{και} \quad \hat{\Gamma}\varepsilon\xi < 180^\circ \Leftrightarrow \frac{\hat{\Gamma}\varepsilon\xi}{2} < 90^\circ$$

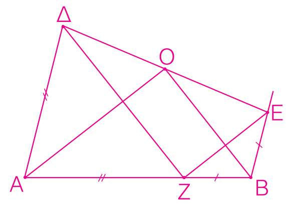
Άρα $\dfrac{\hat{B}\varepsilon\xi}{2} + \dfrac{\hat{\Gamma}\varepsilon\xi}{2} < 180^\circ \Leftrightarrow H\hat{B}t + Z\hat{\Gamma}p < 180^\circ \Leftrightarrow \Gamma\hat{B}x + B\hat{\Gamma}y < 180^\circ$ . Οι ΒΗ και ΓΖ τέμνονται, άρα το τετράπλευρο ΒΓΖΗ είναι τραπέζιο με βάσεις ΒΓ και ΖΗ.

Έχουμε: • $\hat{B} = \hat{\Gamma} \Leftrightarrow \hat{B}\varepsilon\xi = \hat{\Gamma}\varepsilon\xi \Leftrightarrow \dfrac{\hat{B}\varepsilon\xi}{2} = \dfrac{\hat{\Gamma}\varepsilon\xi}{2} \Leftrightarrow K\hat{B}H = M\hat{\Gamma}Z$

• $\Gamma\hat{B}H = B\hat{\Gamma}Z$ ως άθροισμα ίσων γωνιών $\hat{B} + K\hat{B}H$ και $\hat{\Gamma} + M\hat{\Gamma}Z$ .

Άρα το τραπέζιο ΒΓΖΗ είναι ισοσκελές, αφού έχει τις προσκείμενες στη βάση ΒΓ γωνίες του $\Gamma\hat{B}H$ και $B\hat{\Gamma}Z$ ίσες.

## 413 Θέμα 4 - 1784




**Δίνεται τραπέζιο $ΑΔΕΒ$, με $ΑΔ // ΒΕ$, στο οποίο ισχύει ότι $ΑΒ = ΑΔ + ΒΕ$, και $Ο$ το μέσον της $ΔΕ$. Θεωρούμε σημείο $Ζ$ στην $ΑΒ$ τέτοιο ώστε $ΑΖ = ΑΔ$ και $ΒΖ = ΒΕ$. Αν γωνία $Δ\hat{Α}Ζ = φ$,**

**α. να εκφράσετε τη γωνία $ΑΖΔ$ σε συνάρτηση με τη $φ$**

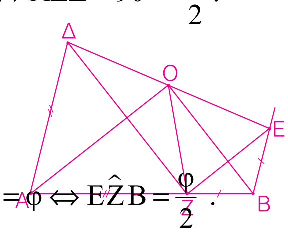
**β. να εκφράσετε τη γωνία $ΕΖΒ$ σε συνάρτηση με τη $φ$**

**γ. να αποδείξετε ότι οι $ΟΑ$ και $ΟΒ$ είναι μεσοκάθετοι των τμημάτων $ΔΖ$ και $ΖΕ$ αντίστοιχα.**

**Λύση**

**α.** Επειδή $ΑΖ = ΑΔ$, το $\overset{\triangle}{ΑΔΖ}$ είναι ισοσκελές, οπότε $Α\hat{Ζ}Δ = Α\hat{Δ}Ζ$.

Στο $\overset{\triangle}{ΑΔΖ}$ είναι $Α\hat{Δ}Ζ + Α\hat{Ζ}Δ + Δ\hat{Α}Ζ = 180^o \Leftrightarrow 2Α\hat{Ζ}Δ + φ = 180^o \Leftrightarrow 2Α\hat{Δ}Ζ = 180^o - φ \Leftrightarrow Α\hat{Ζ}Δ = 90^o - \frac{φ}{2}$.




**β.** Επειδή $ΑΔ // ΒΕ$, έχουμε $Ζ\hat{Β}Ε + φ = 180^o \Leftrightarrow Ζ\hat{Β}Ε = 180^o - φ$.

Αφού το $\overset{\triangle}{ΒΖΕ}$ είναι ισοσκελές, έχουμε $Ε\hat{Ζ}Β = Ζ\hat{Ε}Β$.

Στο $\overset{\triangle}{ΒΖΕ}$ είναι $Ε\hat{Ζ}Β + Ζ\hat{Ε}Β + Ζ\hat{Β}Ε = 180^o \Leftrightarrow Ε\hat{Ζ}Β + Ε\hat{Ζ}Β + 180^o - φ = 180^o \Leftrightarrow 2Ε\hat{Ζ}Β = φ \Leftrightarrow Ε\hat{Ζ}Β = \frac{φ}{2}$.

**γ.** Είναι $Δ\hat{Ζ}Ε = 180^o - Α\hat{Ζ}Δ - Ε\hat{Ζ}Β = 180^o - \left(90^o - \frac{φ}{2}\right) - \frac{φ}{2} = 180^o - 90^o + \frac{φ}{2} - \frac{φ}{2} = 90^o$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΔΖΕ$ η $ΖΟ$ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε $ΖΟ = \frac{ΔΕ}{2} = ΟΔ = ΟΕ$.

Επειδή:

- $ΑΖ = ΑΔ$ και $ΟΖ = ΟΔ$, η $ΑΟ$ είναι η μεσοκάθετος του $ΔΖ$.
- $ΒΖ = ΒΕ$ και $ΟΖ = ΟΕ$, η $ΒΟ$ είναι η μεσοκάθετος του $ΖΕ$.

## 414 Θέμα 4 - 1715

**Δίνεται ευθεία $ε$ και δυο σημεία $Α$, $Β$ εκτός αυτής έτσι ώστε η ευθεία $ΑΒ$ να μην είναι κάθετη στην $ε$. Φέρουμε $ΑΔ$, $ΒΓ$ κάθετες στην $ε$ και $Μ$, $Ν$ μέσα των $ΑΒ$ και $ΓΔ$ αντίστοιχα.**

**α. Αν τα $Α$, $Β$ είναι στο ίδιο ημιεπίπεδο σε σχέση με την $ε$**

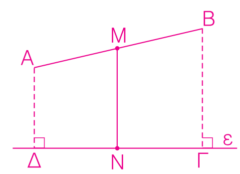
**i. να εξετάσετε αν το τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ είναι, παραλληλόγραμμο, τραπέζιο ή ορθογώνιο σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις, αιτιολογώντας την απάντησή σας:**

**1. $ΑΔ < ΒΓ$ 2. $ΑΔ = ΒΓ$**

**ii. να εκφράσετε το τμήμα $ΜΝ$ σε σχέση με τα τμήματα $ΑΔ$, $ΒΓ$ στις δυο προηγούμενες περιπτώσεις.**

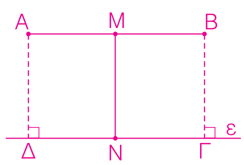
**β. Αν η ευθεία $ε$ τέμνει το τμήμα $ΑΒ$ στο μέσο του $Μ$ να βρείτε το είδος του τετραπλεύρου $ΑΓΒΔ$ (παραλληλόγραμμο, τραπέζιο, ορθογώνιο) και να δείξετε ότι τα $Μ$, $Ν$ ταυτίζονται.**
**Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.**

**Λύση**




**α. i. 1.** Αν $ΑΔ < ΒΓ$, τότε $ΑΔ \neq ΒΓ$ άρα το τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ δεν είναι παραλληλόγραμμο οπότε έχει μόνο δύο πλευρές παράλληλες και είναι τραπέζιο.

**2.** Αν $ΑΔ = ΒΓ$, τότε $ΑΔ // = ΒΓ$.

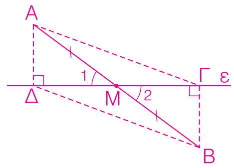



Οπότε το $ΑΒΓΔ$ είναι παραλληλόγραμμο και επειδή $\hat{Δ} = 90^o$ είναι ορθογώνιο.

**ii.** • Αν $ΑΔ < ΒΓ$, τότε το $ΜΝ$ είναι η διάμεσος του τραπεζίου $ΑΒΓΔ$, οπότε $ΜΝ = \frac{ΑΔ + ΒΓ}{2}$.

• Αν $ΑΔ = ΒΓ$, τότε $ΜΝ = ΑΔ = ΒΓ$.

**β.** Τα ορθογώνια τρίγωνα $\Delta AM$ και $\Gamma BM$ έχουν:
- $MA = MB$
- $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$




Οπότε είναι ίσα, άρα $M\Delta = M\Gamma$

Επομένως το Μ είναι μέσο και του $\Gamma\Delta$, οπότε τα $M$, $N$ ταυτίζονται.

Επειδή $MA = MB$ και $M\Delta = M\Gamma$ το $A\Gamma B\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

Επειδή $AM > M\Delta$ και $MB > M\Gamma$ θα είναι $AM + MB > M\Delta + M\Gamma \Leftrightarrow AB > \Gamma\Delta$ .

Άρα το $A\Gamma B\Delta$ δεν έχει ίσες διαγώνιες οπότε δεν είναι ορθογώνιο.

## 415 Θέμα 4 - 1735

**Θεωρούμε ευθεία $(\varepsilon)$ και δυο σημεία $A$ και $B$ εκτός αυτής, τα οποία βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο σε σχέση με την $(\varepsilon)$ έτσι ώστε, η ευθεία $AB$ να μην είναι κάθετη στην $(\varepsilon)$. Έστω $A'$ και $B'$ τα συμμετρικά σημεία των $A$ και $B$ αντίστοιχα ως προς την ευθεία $(\varepsilon)$.**

**α.** **Να αποδείξετε ότι $AA' // BB'$ .**

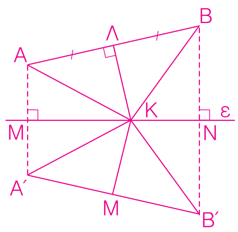
**β.** **Αν η μεσοκάθετος του $AB$ τέμνει την ευθεία $(\varepsilon)$ στο σημείο $K$, να αποδείξετε ότι το $K$ ανήκει και στη μεσοκάθετο του $A'B'$.**

**γ.** **Να βρείτε τη σχέση των ευθειών $AB$ και της ευθείας $(\varepsilon)$ ώστε το τετράπλευρο $ABB'A'$ να είναι ορθογώνιο. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.**

**Λύση**

**α.** Επειδή $AA' \perp \varepsilon$ και $BB' \perp \varepsilon$ , είναι $AA' // BB'$ .

**β.** Επειδή η $K\Lambda$ είναι η μεσοκάθετος του $AB$, έχουμε $KA = KB$ .




Αφού η ευθεία ε είναι η μεσοκάθετος των $AA'$ και $BB'$ έχουμε

$KA = KA'$ και $KB = KB'$.

Οπότε $KA' = KB'$ , άρα το $K$ ανήκει στη μεσοκάθετο του $A'B'$ .

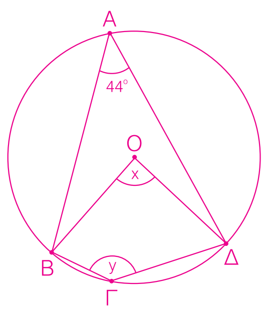
**γ.** Για να είναι το τετράπλευρο $ABB'A'$ ορθογώνιο, πρέπει $\hat{A} = 90^\circ$ .

Οπότε $AB \perp AA'$ και αφού $\varepsilon \perp AA'$, θα έχουμε $AB // \varepsilon$ .

# 25. Εγγεγραμμένη γωνία

## 416 Θέμα 2 - 1581

**Σε κύκλο κέντρου $O$ δίνονται οι χορδές $AB$ και $A\Delta$ τέτοιες ώστε η γωνία $B\hat{A}\Delta$ να είναι $44^\circ$ . Θεωρούμε τυχαίο σημείο $\Gamma$ του κύκλου και σχηματίζουμε το τετράπλευρο $B\Gamma\Delta O$ .**




**α.** **Να υπολογίσετε τη γωνία $x$ .**

**β.** **Να αποδείξετε ότι η γωνία $y$ είναι $136^\circ$ .**

**Λύση**

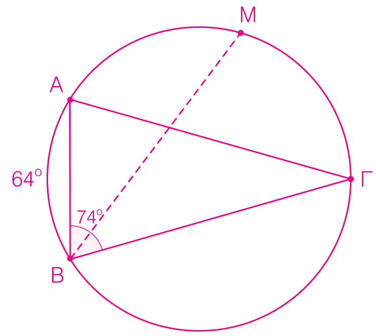
**α.** Η επίκεντρη γωνία x και η εγγεγραμμένη γωνία $\hat{A}$ βαίνουν στο ίδιο τόξο, οπότε

$x = 2\hat{A} = 2 \cdot 44^\circ = 88^\circ$ .

**β.** Επειδή $B\hat{O}\Delta = 88^\circ$ , είναι $\overset{\frown}{B\Gamma\Delta} = 88^\circ$ , άρα $\overset{\frown}{BA\Delta} = 360^\circ - 88^\circ = 272^\circ$ .

Οπότε $y = \dfrac{272^\circ}{2} = 136^\circ$ .

## 417 Θέμα 2 - 13441




**Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο με $\hat{B}=74^o$. Το μέτρο του τόξου ΑΒ που δεν περιέχει το σημείο Γ ισούται με $64^o$ και Μ είναι το μέσο του τόξου ΑΓ.**

**α. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{\Gamma}$ και $\hat{A}$ του τριγώνου ΑΒΓ.**

**β. Ποιο είναι το είδος του τριγώνου ΑΒΓ ως προς τις πλευρές του; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.**

**γ. Να αποδείξετε ότι η ΒΜ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$.**

**Λύση**

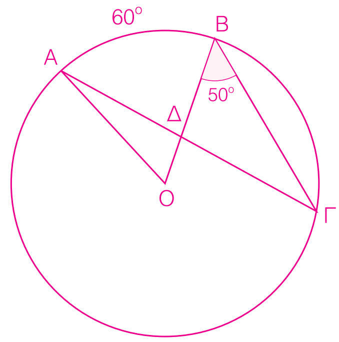
**α.** Η $\hat{\Gamma}$ είναι εγγεγραμμένη γωνία του κύκλου που βαίνει στο τόξο ΑΒ, άρα $\hat{\Gamma}=\frac{64^o}{2}=32^o$.

Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^o \Leftrightarrow \hat{A}+74^o+32^o=180^o \Leftrightarrow \hat{A}=74^o$.

**β.** Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, γιατί έχει δύο ίσες γωνίες, τις $\hat{A}=\hat{B}=74^o$.

**γ.** Το σημείο Μ είναι το μέσο του τόξου ΑΓ, άρα $\overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{M\Gamma}$ είναι ίσα, οπότε $A\hat{B}M=\Gamma\hat{B}M$, γιατί είναι εγγεγραμμένες που βαίνουν σε ίσα τόξα.
Άρα η ΒΜ είναι διχοτόμος της γωνίας Β.

## 418 Θέμα 2 - 12638




**Στον κύκλο του σχήματος, το Ο είναι το κέντρο του, το τόξο ΑΒ ισούται με $60^o$ και η γωνία Β ισούται με $50^o$. Αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας, να υπολογίσετε:**

**α. πόσες μοίρες είναι η γωνία Γ.**

**β. πόσες μοίρες είναι η γωνία ΑΔΟ**

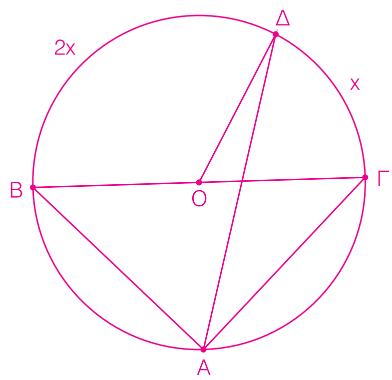
**Λύση**

**α.** Η γωνία $\hat{\Gamma}$ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο, που βαίνει στο τόξο ΑΒ άρα $\hat{\Gamma}=\frac{AB}{2}-\frac{60^o}{2}=30^o$.

**β.** Στο τρίγωνο ΒΓΔ είναι: $\hat{B}+\hat{\Gamma}+B\hat{\Delta}\Gamma=180^o \Leftrightarrow 50^o+30^o+B\hat{\Delta}\Gamma=180^o \Leftrightarrow B\hat{\Delta}\Gamma=100^o$.

Επομένως η $A\hat{\Delta}O=100^o$, ως κατά κορυφήν της.

## 419 Θέμα 2 - 13753




**Δίνεται κύκλος (Ο , ρ) με διάμετρο ΒΓ. Έστω Α και Δ σημεία του κύκλου τα οποία βρίσκονται σε διαφορετικά ημικύκλια ως προς τη διάμετρο ΒΓ. Τα μέτρα των τόξων ΒΔ και ΔΓ είναι 2x και x αντίστοιχα. Να υπολογίσετε το μέτρο:**

**α. της γωνίας ΒΑΓ.**

**β. x του τόξου ΓΔ.**

**γ. της γωνίας ΒΟΔ.**

**Λύση**

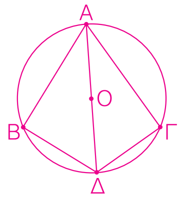
**α.** Η γωνία ΒΑΓ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο οπότε $B\hat{A}\Gamma=90^o$.

**β.** Η ΒΓ είναι διάμετρος του κύκλου, επομένως $\overset{\frown}{B\Delta}+\overset{\frown}{\Gamma\Delta}=180^o \Leftrightarrow 2x+x=180^o \Leftrightarrow 3x=180^o \Leftrightarrow x=60^o$.

**γ.** Η γωνία $B\hat{O}\Delta$ είναι επίκεντρη η οποία βαίνει στο τόξο $\overset{\frown}{B\Delta}$. Άρα $B\hat{O}\Delta=2x=120^o$

## 420 Θέμα 2 - 1663

**Έστω κύκλος με κέντρο $O$ και ακτίνα $\rho$. Αν η διάμετρος $Α\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $B\hat{A}\Gamma$, να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $ΑΒ\Delta$ και $Α\Gamma\Delta$ είναι ίσα.**




**Λύση**

Επειδή $B\hat{A}\Delta = \Gamma\hat{A}\Delta$, είναι $\overset{\frown}{B\Delta} = \overset{\frown}{\Delta\Gamma}$, οπότε $B\Delta = \Gamma\Delta$.

Είναι $A\hat{B}\Delta = A\hat{\Gamma}\Delta = 90^o$, διότι είναι εγγεγραμμένες και βαίνουν σε ημικύκλια.

Τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Delta\Gamma$ έχουν:
- $B\Delta = \Delta\Gamma$
- $A\Delta$ κοινή

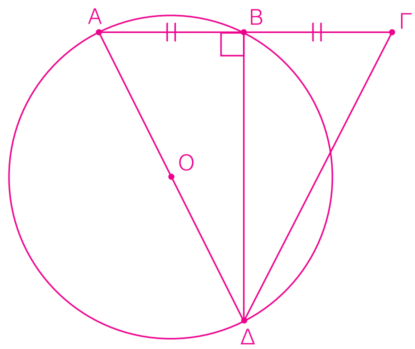
Άρα είναι ίσα.

## 421 Θέμα 2 - 13740

**Σε κύκλο κέντρου Ο φέρουμε μια τυχαία χορδή του ΑΒ, την οποία προεκτείνουμε προς το μέρος του Β κατά ίσο τμήμα ΒΓ. Φέρουμε κάθετη στην ΑΓ στο σημείο της Β που τέμνει τον κύκλο στο σημείο Δ. Να αποδείξετε ότι:**

**α. $\Delta A = \Delta\Gamma$.**

**β. Η ΑΔ είναι διάμετρος του κύκλου.**




**Λύση**

**α.** Στο τρίγωνο $\Delta A\Gamma$ το τμήμα $\Delta B$ είναι διάμεσος και ύψος, άρα το $\Delta A\Gamma$ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΓ, επομένως $\Delta A = \Delta\Gamma$.

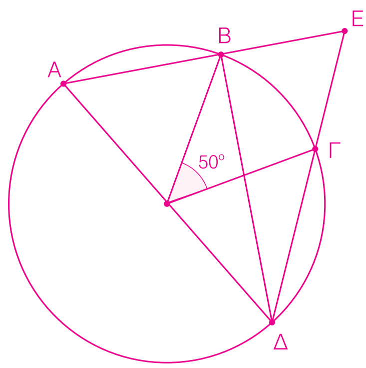
**β.** Η γωνία $A\hat{B}\Delta$ είναι εγγεγραμμένη και επειδή είναι ορθή, θα βαίνει σε ημικύκλιο. Δηλαδή η $A\Delta$ είναι διάμετρος του κύκλου.

## 422 Θέμα 2 - 12642

**Σε κύκλο με κέντρο το Ο, παίρνουμε διαδοχικά τα σημεία Α, Β, Γ και Δ, ώστε η ΑΔ να είναι διάμετρος και η γωνία ΒΟΓ να ισούται με $50^o$. Αν η προέκταση της ΑΒ προς το Β, τέμνει την προέκταση της ΔΓ προς το Γ στο Ε, αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας, να υπολογίσετε:**

**α. το μέτρο της γωνίας ΒΔΓ.**

**β. το μέτρο της γωνία ΑΕΔ.**




**Λύση**

**α.** Η γωνία $B\Delta\Gamma$ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο και βαίνει στο τόξο ΒΓ, οπότε θα ισούται με το μισό της αντίστοιχης επίκεντρης. Άρα $B\hat{\Delta}\Gamma = \frac{B\hat{O}\Gamma}{2} = \frac{50^o}{2} = 25^o$.

**β.** Επειδή η $A\Delta$ είναι διάμετρος, η γωνία ΑΒΔ ως εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο, θα είναι ορθή.

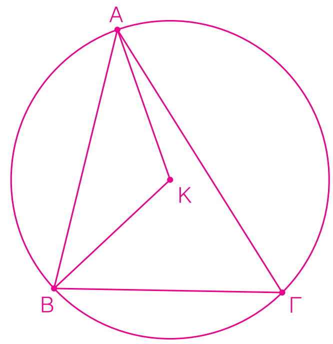
Άρα $A\hat{B}\Delta = 90^o \Rightarrow \Delta\hat{B}E = 90^o$.

Είναι $B\hat{\Delta}\Gamma = 25^o$.

Οι γωνίες $B\Delta E$ και $BE\Delta$ είναι συμπληρωματικές, οπότε $B\hat{E}\Delta = 90^o - 25^o = 65^o$.

Άρα $A\hat{E}\Delta = 65^o$.

## 423 Θέμα 2 - 13756




**Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο $(K\ ,\ \rho)$. Να αποδείξετε ότι:**

**α.** $\mathbf{A\hat{K}B = 2A\hat{\Gamma}B}$ **.**

**β. το τρίγωνο ΑΚΒ είναι ισοσκελές.**

**γ.** $\mathbf{K\hat{A}B + A\hat{\Gamma}B = 90^o}$ **.**

**Λύση**

**α.** Η γωνία $A\hat{K}B$ είναι επίκεντρη και η γωνία $A\hat{\Gamma}B$ είναι εγγεγραμμένη που βαίνουν στο ίδιο τόξο ΑΒ.

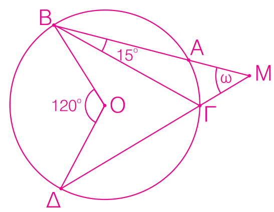
Άρα $A\hat{K}B = 2A\hat{\Gamma}B$.

**β.** Είναι $KA = KB = \rho$ , άρα το τρίγωνο ΑΚΒ είναι ισοσκελές.

**γ.** Στο τρίγωνο ΚΑΒ :

$$K\hat{A}B + A\hat{B}K + A\hat{K}B = 180^o \Leftrightarrow K\hat{A}B + K\hat{A}B + 2A\hat{\Gamma}B = 180^o \Leftrightarrow 2K\hat{A}B + 2A\hat{\Gamma}B = 180^o \Leftrightarrow K\hat{A}B + A\hat{\Gamma}B = 90^o$$

## 424 Θέμα 2 - 1580




**Στο διπλανό σχήμα η επίκεντρη γωνία $\mathbf{B\hat{O}\Delta}$ είναι $\mathbf{120^o}$ και η γωνία $\mathbf{\Gamma\hat{B}A}$ είναι $\mathbf{15^o}$ .**

**α. Να υπολογίσετε τη γωνία $\mathbf{B\hat{\Gamma}\Delta}$ .**

**β. Να αποδείξετε ότι η γωνία $\omega$ είναι $\mathbf{45^o}$ .**

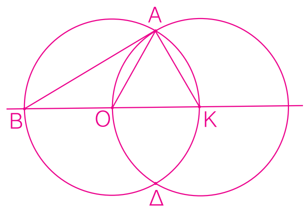
**Λύση**

**α.** Η εγγεγραμμένη γωνία $B\hat{\Gamma}\Delta$ και η επίκεντρη $B\hat{O}\Delta$ βαίνουν στο ίδιο τόξο, οπότε

$$B\hat{\Gamma}\Delta = \frac{B\hat{O}\Delta}{2} = \frac{120^o}{2} = 60^o \ .$$

**β.** Στο τρίγωνο ΒΜΓ η $B\hat{\Gamma}\Delta$ είναι εξωτερική, οπότε $B\hat{\Gamma}\Delta = \Gamma\hat{B}M + \omega \Leftrightarrow 60^o = 15^o + \omega \Leftrightarrow \omega = 45^o$ .

## 425 Θέμα 2 - 1673




**Δίνονται δυο ίσοι κύκλοι $(O, \rho)$ και $(K, \rho)$ με $OK = \rho$ , οι οποίοι τέμνονται στα σημεία Α και Δ.**

**α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΟΑΚ είναι ισόπλευρο.**

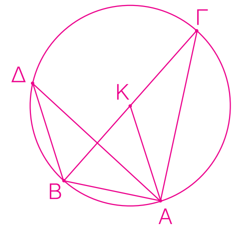
**β. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΒΑΚ .**

**Λύση**

**α.** Επειδή $OA = KA = OK = \rho$ , το τρίγωνο ΟΑΚ είναι ισόπλευρο.

**β.** Είναι:
- $B\hat{A}K = 90^o$ , ως εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο.
- $\hat{K} = 60^o$ , αφού το τρίγωνο ΟΑΚ είναι ισόπλευρο
- $B\hat{A}K + \hat{K} + \hat{B} = 180^o \Leftrightarrow 90^o + 60^o + \hat{B} = 180^o \Leftrightarrow \hat{B} = 30^o$

## 426 Θέμα 2 - 1696




**Έστω κύκλος κέντρου Κ, μια διάμετρός του ΒΓ και σημείο Α του κύκλου τέτοιο ώστε ΒΑ = ΚΓ. Αν Δ τυχαίο σημείο του κύκλου διαφορετικό των Β και Γ,**

**α. να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΚΑ είναι ισόπλευρο**

**β. να υπολογίσετε την γωνία $B\hat{\Delta}A$**

**γ. να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.**

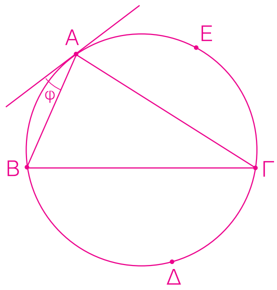
**Λύση**

**α.** Είναι $BA = K\Gamma = KA = KB = \rho$, άρα το τρίγωνο ΒΚΑ είναι ισόπλευρο.

**β.** Είναι:
- $B\hat{K}A = 60^o$, αφού το $\overset{\Delta}{BKA}$ είναι ισόπλευρο
- $B\hat{\Delta}A = \dfrac{B\hat{K}A}{2} = 30^o$

**γ.** Είναι:
- $B\hat{A}\Gamma = 90^o$, ως εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο
- $A\hat{B}\Gamma = 60^o$, αφού το $\overset{\Delta}{BKA}$ είναι ισόπλευρο
- $B\hat{\Gamma}A = B\hat{\Delta}A = 30^o$.

## 427 Θέμα 2 - 1561




**Στο διπλανό σχήμα, η εφαπτομένη του κύκλου στην κορυφή Α του τριγώνου ΑΒΓ σχηματίζει γωνία $\varphi = 30^o$ με την πλευρά ΑΒ. Αν το μέτρο του τόξου $\overset{\frown}{B\Delta\Gamma}$ είναι $160^o$,**

**α. να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ**

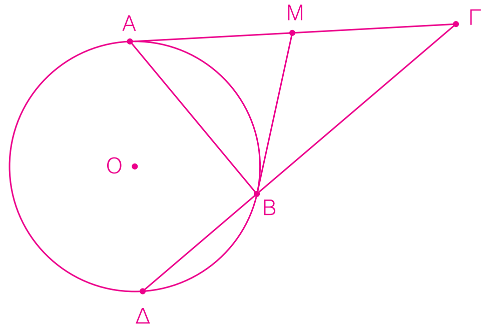
**β. να βρείτε το μέτρο του τόξου $\overset{\frown}{AE\Gamma}$.**

**Λύση**

**α.** Είναι:
- $B\hat{A}\Gamma = \dfrac{\overset{\frown}{B\Delta\Gamma}}{2} = \dfrac{160^o}{2} = 80^o$
- $\hat{\Gamma} = \hat{\varphi} = 30^o$, ως γωνία χορδής και εφαπτομένης
- $\hat{B} = 180^o - B\hat{A}\Gamma - \hat{\Gamma} = 180^o - 80^o - 30^o = 70^o$.

**β.** Είναι $\hat{B} = 70^o$, οπότε $\dfrac{\overset{\frown}{AE\Gamma}}{2} = 70^o \Leftrightarrow \overset{\frown}{AE\Gamma} = 140^o$.

## 428 Θέμα 2 - 13747

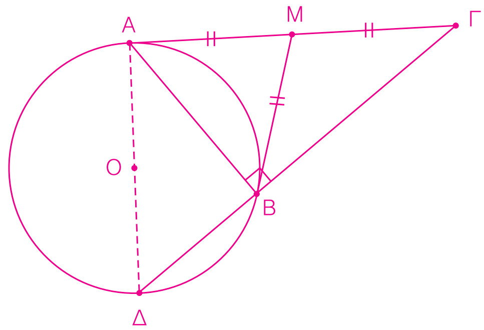



**Από σημείο Μ εξωτερικό ενός κύκλου κέντρου Ο φερουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΜΑ και ΜΒ. Προεκτείνουμε το τμήμα ΑΜ προς το μέρος του Μ και παίρνουμε τμήμα ΜΓ = ΑΜ. Από το σημείο Γ φέρουμε την τέμνουσα ΓΒΔ του κύκλου. Να αποδείξετε ότι:**

**α. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.**

**β. Τα σημεία Α και Δ είναι αντιδιαμετρικά.**

**Λύση**




**α.** Είναι: • $MA = MB$ , ως εφαπτόμενα τμήματα

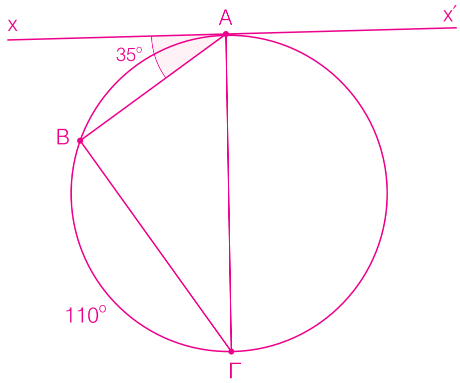
• $M\Gamma = AM$ , άρα $MA = MB = M\Gamma$

Δηλαδή η $BM$ , που είναι διάμεσος προς την πλευρά $A\Gamma$ στο τρίγωνο $BA\Gamma$ , ισούται με το μισό της $A\Gamma$.

Οπότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά $A\Gamma$ και $A\hat{B}\Gamma = 90^o$.

**β.** Είναι $A\hat{B}\Gamma = 90^o$ , οπότε και $A\hat{B}\Delta = 90^o$ , η οποία είναι εγγεγραμμένη γωνία και επειδή είναι ορθή θα βαίνει σε ημικύκλιο. Δηλαδή η $A\Delta$ είναι διάμετρος επομένως τα σημεία $A$ , $\Delta$ είναι αντιδιαμετρικά.

## 429 Θέμα 2 - 12637




**Στο παρακάτω σχήμα η $xx'$ είναι εφαπτομένη του κύκλου στο Α και επιπλέον ισχύουν: $B\hat{A}x = 35^o$ και $\overset{\frown}{B\Gamma} = 110^o$.**

**α. Ποιό είναι το μέτρο της γωνίας Γ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.**

**β. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι οξυγώνιο, ορθογώνιο ή αμβλυγώνιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.**

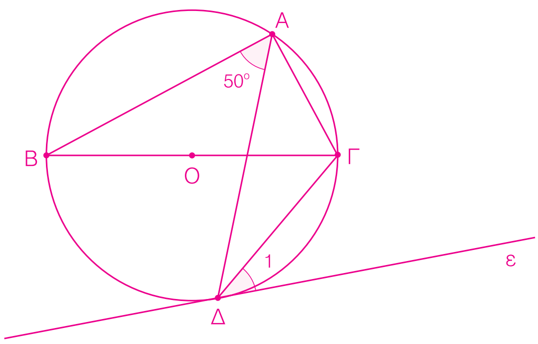
**Λύση**

**α.** Η $B\hat{A}x$ είναι γωνία χορδής και εφαπτομένης και η $\hat{\Gamma}$ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο της χορδής, επομένως $\hat{\Gamma} + B\hat{A}x = 35^o$.

**β.** Στο τρίγωνο $AB\Gamma$, η γωνία του $\hat{A}$ είναι εγγεγραμμένη, που βαίνει στο τόξο $B\Gamma$, άρα $\hat{A} = \dfrac{110^o}{2} = 55^o$.

Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 55^o + 35^o = 90^o$ , οπότε και $\hat{B} = 90^o$ , επομένως το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

## 430 Θέμα 2 - 13754




**Δίνεται κύκλος $(O , \rho)$ με διάμετρο ΒΓ και τα σημεία Α, Δ του κύκλου εκατέρωθεν της διαμέτρου ΒΓ έτσι ώστε $B\hat{A}\Delta = 50^o$. Φέρουμε εφαπτόμενη ευθεία (ε) στον κύκλο στο σημείο Δ.**

**Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας :**

**α. ΒΑΓ.**

**β. ΒΓΔ.**

**γ. $\Delta_1$.**

**Λύση**

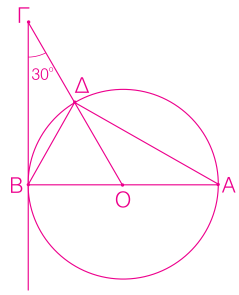
**α.** Η γωνία $BA\Gamma$ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο, επομένως $B\hat{A}\Gamma = 90^o$.

**β.** Είναι $B\hat{A}\Delta = B\hat{\Gamma}\Delta = 50^o$ , ως εγγεγραμμένες και βαίνουν στο ίδιο τόξο $B\Delta$.

**γ.** Η γωνία $\hat{\Delta}_1$ σχηματίζεται από τη χορδή $\Delta\Gamma$ του κύκλου και την εφαπτομένη του στο σημείο Δ.

Επομένως $\hat{\Delta}_1 = \Delta\hat{A}\Gamma = B\hat{A}\Gamma - B\hat{A}\Delta = 90^o - 50^o = 40^o$ . Άρα $\hat{\Delta}_1 = 40^o$.

## 431 Θέμα 2 - 1665




**Θεωρούμε κύκλο $(O, \rho)$ και διάμετρό του $AB$. Στην εφαπτομένη του κύκλου στο $B$ θεωρούμε σημείο $\Gamma$ τέτοιο ώστε, η γωνία $B\Gamma O$ να είναι ίση με $30^o$. Αν η $O\Gamma$ τέμνει τον κύκλο στο $\Delta$ να αποδείξετε ότι:**

**α.** $O\Gamma = 2OA$

**β.** $B\Gamma = A\Delta$

**Λύση**

**α.** Η εφαπτόμενη $B\Gamma$ είναι κάθετη στην ακτίνα $OB$ στο σημείο επαφής, άρα $\Gamma\hat{B}O = 90^o$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $B\Gamma O$ $(\hat{B} = 90^o)$, έχουμε $\hat{\Gamma} = 30^o$, οπότε $OB = \frac{O\Gamma}{2} \Rightarrow OA = \frac{O\Gamma}{2} \Rightarrow O\Gamma = 2OA$.

**β.** Είναι $B\hat{\Delta}A = 90^o$, ως εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $B\Gamma O$ είναι $B\hat{O}\Gamma + \hat{\Gamma} = 90^o \Leftrightarrow B\hat{O}\Gamma + 30^o = 90^o \Leftrightarrow B\hat{O}\Gamma = 60^o$.

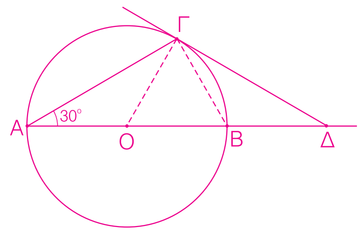
Είναι $OB = O\Delta$ και $B\hat{O}\Delta = 60^o$, οπότε το τρίγωνο $OB\Delta$ είναι ισόπλευρο, άρα $B\Delta = OB$.

Έχουμε $\hat{A} = \frac{B\hat{O}\Delta}{2} = 30^o$, ως εγγεγραμμένη γωνία και επίκεντρη που βαίνουν στο ίδιο τόξο.

Τα ορθογώνια τρίγωνα $B\Gamma O$ και $B\Delta A$ έχουν:
- $OB = B\Delta$
- $\hat{\Gamma} = \hat{A}$

Άρα είναι ίσα, οπότε $B\Gamma = A\Delta$.

## 432 Θέμα 2 - 1626




**Δίνεται κύκλος $(O, R)$ διαμέτρου $AB$, και χορδή $A\Gamma$ τέτοια ώστε $B\hat{A}\Gamma = 30^o$. Στο σημείο $\Gamma$ φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου, η οποία τέμνει την προέκταση της διαμέτρου $AB$ (προς το $B$) στο σημείο $\Delta$.**

**α.** **Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $O\Gamma\Delta$.**

**β.** **Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές.**

**Λύση**

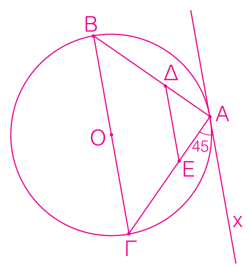
**α.** Είναι:
- $O\Gamma \perp \Gamma\Delta$, άρα $O\hat{\Gamma}\Delta = 90^o$
- $\Gamma\hat{O}\Delta = 2\hat{A} = 60^o$, ως εγγεγραμμένη γωνία και επίκεντρη που βαίνουν στο ίδιο τόξο
- $O\hat{\Gamma}\Delta + \Gamma\hat{O}\Delta + \hat{\Delta} = 180^o \Leftrightarrow 90^o + 60^o + \hat{\Delta} = 180^o \Leftrightarrow \hat{\Delta} = 30^o$

**β.** Επειδή $\hat{A} = \hat{\Delta}$ είναι $\Gamma A = \Gamma\Delta$.

Είναι $B\hat{\Gamma}\Delta = \hat{A} = 30^o$, ως γωνία χορδής και εφαπτομένης

Οπότε $B\hat{\Gamma}\Delta = \hat{\Delta} = 30^o$, άρα το τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές.

## 433 Θέμα 2 - 1672




**Σε σημείο $A$ ενός κύκλου, φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου $Ax$ και τη χορδή $A\Gamma$ που σχηματίζει με την εφαπτομένη γωνία $45^o$. Φέρουμε τη διάμετρο $\Gamma B$ και μία παράλληλη ευθεία στη $B\Gamma$ που τέμνει την $AB$ στο $\Delta$ και την $A\Gamma$ στο $E$.**

**α.** **Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $BA\Gamma$.**

**β.** **Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $B\Gamma E\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.**

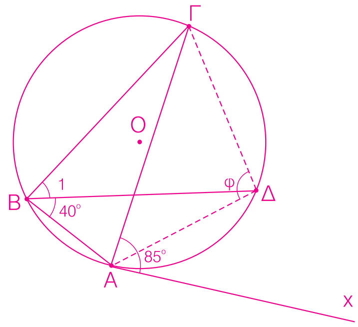
**Λύση**

**α.** Είναι:

- $B\hat{A}\Gamma = 90^o$ , ως εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο
- $\hat{B} = \Gamma\hat{A}x = 45^o$ , ως γωνία χορδής και εφαπτομένης
- $\hat{\Gamma} = 180^o - \hat{B} - B\hat{A}\Gamma = 180^o - 45^o - 90^o = 45^o$

**β.** Έχουμε $B\Gamma // \Delta E$ , οπότε το $B\Gamma E\Delta$ είναι τραπέζιο. Επειδή επιπλέον είναι $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ $(= 45^o)$ , το $B\Gamma E\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

## 434 Θέμα 2 - 1530




**Στο διπλανό σχήμα, η $Ax$ είναι εφαπτομένη του κύκλου $(O, \rho)$ σε σημείο του $A$ και επιπλέον ισχύουν $\Gamma\hat{A}x = 85^o$ και $\Delta\hat{B}A = 40^o$ .**

**α. Να αποδείξετε ότι $\hat{B}_1 = 45^o$ .**

**β. Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\varphi}$ .**

**Λύση**

**α.** Η $x\hat{A}\Delta$ σχηματίζεται από τη χορδή $A\Delta$ και την εφαπτομένη $Ax$ , οπότε $x\hat{A}\Delta = A\hat{B}\Delta = 40^o$ .

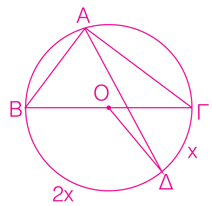
Είναι:
- $\Delta\hat{A}\Gamma = \Gamma\hat{A}X - X\hat{A}\Delta = 85^o - 40^o = 45^o$
- $\hat{B}_1 = \Delta\hat{A}\Gamma = 45^o$ , ως εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο

**β.** Είναι $A\hat{B}\Gamma = 40^o + 45^o = 85^o$

Στο εγγεγραμμένο τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ έχουμε

$\hat{\varphi} + A\hat{B}\Gamma = 180^o \Leftrightarrow \varphi = 180^o - A\hat{B}\Gamma \Leftrightarrow \varphi = 180^o - 85^o \Leftrightarrow \varphi = 95^o$ .

## 435 Θέμα 2 - 1703




**Έστω κύκλος κέντρου $O$ και διαμέτρου $B\Gamma$ . Θεωρούμε τα σημεία $A$ και $\Delta$ του κύκλου εκατέρωθεν της $B\Gamma$ , τέτοια ώστε το τόξο $B\Delta$ να είναι διπλάσιο του τόξου $\Delta\Gamma$ . Να υπολογίσετε:**

**α. το μέτρο $x$ του τόξου $\Gamma\Delta$ ,**

**β. τη γωνία $B\hat{O}\Delta$ ,**

**γ. τη γωνία $B\hat{A}\Delta$ .**

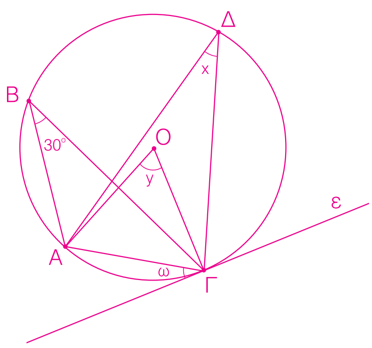
**Λύση**

**α.** Είναι $\overset{\frown}{B\Delta} + \overset{\frown}{\Delta\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow 2x + x = 180^o \Leftrightarrow 3x = 180^o \Leftrightarrow x = 60^o$ .

**β.** Επειδή $\overset{\frown}{B\Delta} = 2 \cdot 60^o = 120^o$ , έχουμε $B\hat{O}\Delta = 120^o$ .

**γ.** Είναι $B\hat{A}\Delta = \dfrac{B\hat{O}\Delta}{2} = \dfrac{120^o}{2} = 60^o$ .

## 436 Θέμα 2 - 1695




**Στο διπλανό σχήμα η ευθεία $\varepsilon$ εφάπτεται του κύκλου $(O, \rho)$ στο σημείο $\Gamma$ .**

**α. Να υπολογίσετε τις γωνίες $x$ , $y$ και $\omega$ δικαιολογώντας σε κάθε περίπτωση την απάντησή σας.**

**β. Να βρείτε το είδος του τριγώνου $OA\Gamma$ ως προς τις πλευρές.**

**Λύση**

**α.** Είναι: • $x = A\hat{B}\Gamma = 30^\circ$ , ως εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο $\overset{\frown}{A\Gamma}$ .

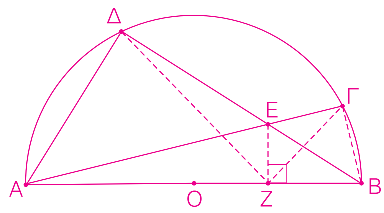
• $y = 2x = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$ , αφού η $y$ είναι επίκεντρη και η $x$ εγγεγραμμένη που βαίνουν στο ίδιο τόξο $\overset{\frown}{A\Gamma}$.

• $\omega = A\hat{B}\Gamma = 30^\circ$ , αφού η $\omega$ σχηματίζεται από τη χορδή $A\Gamma$ και την εφαπτομένη $\varepsilon$ στο $\Gamma$ που στο αντίστοιχο τόξο βαίνει η εγγεγραμμένη $A\hat{B}\Gamma$ .

**β.** Επειδή $OA = O\Gamma = \rho$ και $A\hat{O}\Gamma = 60^\circ$, το $\overset{\triangle}{OA\Gamma}$ είναι ισόπλευρο.

## 437 Θέμα 2 - 1769

**Δίνεται ημικύκλιο διαμέτρου $AB$ και δύο χορδές του $A\Gamma$ και $B\Delta$ , οι οποίες τέμνονται στο σημείο $E$ . Φέρουμε $EZ \perp AB$ . Να αποδείξετε ότι:**




**α. Οι γωνίες $\Delta\hat{A}\Gamma$ και $\Delta\hat{B}\Gamma$ είναι ίσες.**

**β. Τα τετράπλευρα $A\Delta EZ$ και $EZB\Gamma$ είναι εγγράψιμα.**

**γ. Η $EZ$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\Delta\hat{Z}\Gamma$ .**

**Λύση**

**α.** Οι $\Delta\hat{A}\Gamma$ , $\Delta\hat{B}\Gamma$ είναι ίσες ως εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο $\overset{\frown}{\Delta\Gamma}$ .

**β.** Είναι $A\hat{\Delta}B = A\hat{\Gamma}B = 90^\circ$ , ως εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν σε ημικύκλιο.

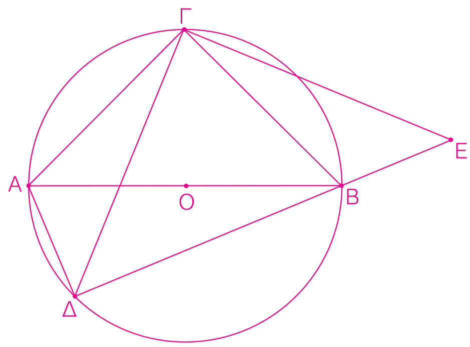
Τα $A\Delta EZ$ και $EZB\Gamma$ είναι εγγράψιμα διότι:
- $\hat{\Delta} + \hat{Z} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$
- $\hat{\Gamma} + \hat{Z} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

**γ.** Είναι:
- $\Delta\hat{Z}E = \Delta\hat{A}E$, αφού το $A\Delta EZ$ είναι εγγράψιμο
- $E\hat{Z}\Gamma = E\hat{B}\Gamma$ , αφού το $EZB\Gamma$ είναι εγγράψιμο
- $\Delta\hat{A}E = E\hat{B}\Gamma$ , από το **α.** ερώτημα

Άρα $\Delta\hat{Z}E = E\hat{Z}\Gamma$, οπότε η $EZ$ είναι η διχοτόμος της $\Delta\hat{Z}\Gamma$ .

## 438 Θέμα 2 - 1712

**Δίνεται κύκλος με κέντρο $O$ , και έστω $AB$ μια διάμετρος του, $\Gamma$ το μέσο του ενός ημικυκλίου του και $\Delta$ τυχαίο σημείο του άλλου. Στην προέκταση της $\Delta B$ (προς το $B$ ) θεωρούμε σημείο $E$ ώστε $BE = A\Delta$ .**




**α. Να αποδείξετε ότι:**

**i. Τα τρίγωνα $A\Delta\Gamma$ και $BE\Gamma$ είναι ίσα.**

**ii. Η $\Gamma\Delta$ είναι κάθετη στην $\Gamma E$ .**

**β. Να αιτιολογήσετε γιατί, στην περίπτωση που το σημείο $\Delta$ είναι το αντιδιαμετρικό του $\Gamma$ , η $\Gamma E$ είναι εφαπτομένη του κύκλου.**

**Λύση**

**α. i.** Το $\Gamma$ είναι μέσο του $\overset{\frown}{AB}$ , άρα $\overset{\frown}{A\Gamma} = \overset{\frown}{\Gamma B}$ , οπότε $A\Gamma = B\Gamma$ . Αφού το $A\Gamma B\Delta$ είναι εγγεγραμμένο, έχουμε $\Gamma\hat{A}\Delta = \Gamma\hat{B}E$ .

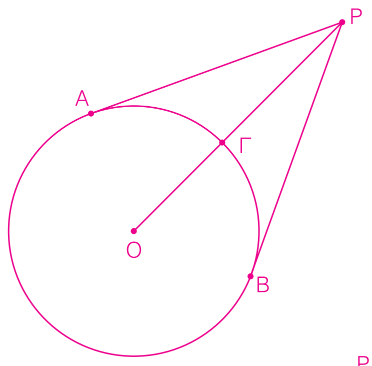
Τα τρίγωνα $A\Delta\Gamma$ και $BE\Gamma$ έχουν:
- $A\Gamma = \Gamma B$
- $A\Delta = BE$
- $\Gamma\hat{A}\Delta = \Gamma\hat{B}E$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ).

**ii.** Είναι $\hat{\Delta\Gamma E} = \hat{\Delta\Gamma B} + \hat{B\Gamma E} \overset{\alpha.i.}{=} \hat{\Delta\Gamma B} + \hat{A\Gamma\Delta} = \hat{A\Gamma B} = 90^o$ , αφού η $A\hat{\Gamma}B$ είναι εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο. Οπότε $\Gamma\Delta \perp \Gamma E$ .

**β.** Αν $\Gamma\Delta$ διάμετρος, τότε $O\Gamma \perp \Gamma E$ , οπότε η $\Gamma E$ είναι εφαπτομένη του κύκλου.

## 439 Θέμα 4 - 13520



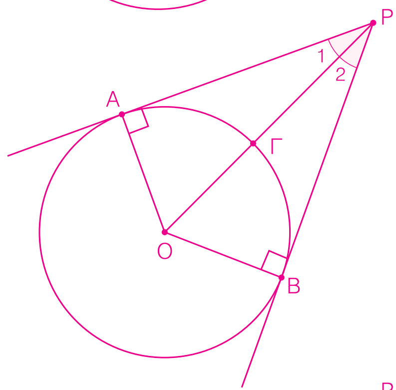

**Δίνεται κύκλος (Ο , ρ) και σημείο Ρ εκτός του κύκλου. Από το Ρ φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ. Η ΡΟ τέμνει το μικρότερο του ημικυκλίου τόξο ΑΒ στο Γ και $A\hat{P}B = 60^o$. Να αποδείξετε ότι:**

**α. $OP = 2\rho$ .**

**β. $A\hat{\Gamma}B = 120^o$ .**

**γ. Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι το τετράπλευρο ΟΑΓΒ είναι ρόμβος. Συμφωνείτε μαζί του; Να δικαιολογήσετε την απάντηση σας.**

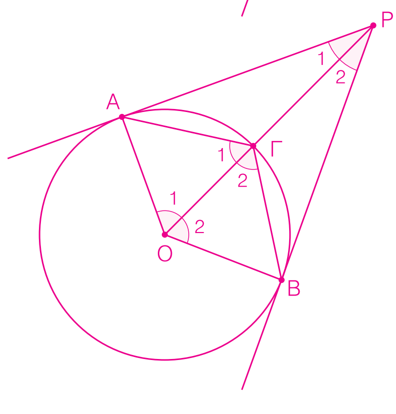
**Λύση**




**α.** • Οι ακτίνες ΟΑ και ΟΒ είναι κάθετες στα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ , οπότε τα τρίγωνα ΟΑΡ και ΟΒΡ είναι ορθογώνια.

• Η ΡΟ είναι διχοτόμος της $A\hat{P}B = 60^o$ , οπότε $\hat{P}_1 = \hat{P}_2 = 30^o$ .

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΡ είναι $\hat{P}_1 = 30^o$ , οπότε $OA = \dfrac{OP}{2} \Leftrightarrow PO = 2\rho$




**β.** • Στο τρίγωνο ΟΡΑ έχουμε:

$\hat{O}_1 + O\hat{A}P + O\hat{P}A = 180^o \Leftrightarrow \hat{O}_1 = 180^o - 90^o - 30^o \Leftrightarrow \hat{O}_1 = 60^o$ .

• Είναι $OA = O\Gamma = \rho$ , οπότε το τρίγωνο ΟΓΑ είναι ισοσκελές με μία γωνία $60^o$ , άρα είναι ισόπλευρο. Επομένως $\hat{\Gamma}_1 = 60^o$ (1).

• Στο τρίγωνο ΟΡΒ έχουμε:

$\hat{O}_2 + O\hat{B}P + O\hat{P}B = 180^o \Leftrightarrow \hat{O}_2 = 180^o - 90^o - 30^o \Leftrightarrow \hat{O}_2 = 60^o$ .

• Είναι $OB = O\Gamma = \rho$ , οπότε το τρίγωνο ΟΓΒ είναι ισοσκελές με μία γωνία $60^o$ , άρα ισόπλευρο.

Επομένως, $\hat{\Gamma}_2 = 60^o$ (2).

Από (1) και (2) έχουμε ότι $A\hat{\Gamma}B = 60^o + 60^o = 120^o$ .

**γ.** Τα τρίγωνα ΟΓΑ και ΟΓΒ είναι ισόπλευρα, οπότε $A\Gamma = OA = O\Gamma = OB$ .

Το τετράπλευρο ΟΑΓΒ είναι ρόμβος γιατί έχει όλες τις πλευρές του ίσες. Επομένως, ο ισχυρισμός του μαθητή είναι σωστός.

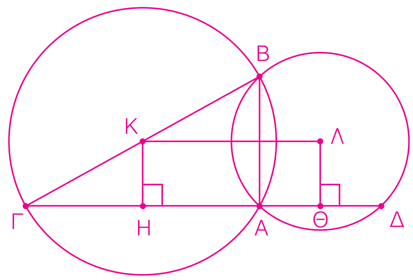
## 440 Θέμα 4 - 12419

**Δύο κύκλοι $(K, R)$ και $(\Lambda, r)$ , με $R > r$ , τέμνονται στα σημεία Α και Β. Από το σημείο Α φέρουμε ευθεία παράλληλη προς τη διάκεντρο των κύκλων, η οποία τέμνει τους κύκλους $(K, R)$ και $(\Lambda, r)$ στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:**

**α. $\Gamma\Delta = 2K\Lambda$**

**β. Τα σημεία Β και Γ είναι αντιδιαμετρικά.**

**Λύση**

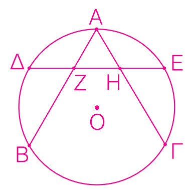



**α.** Έστω οι κύκλοι $(K\,,R)$ και $(\Lambda\,,r)$ με $R>r$, οι οποίοι τέμνονται στα σημεία $A\,,B$ και η τέμνουσα $\Gamma A\Delta$ παράλληλη στη διάκεντρο $K\Lambda$.
Φέρουμε τα αποστήματα $KH$ και $\Lambda\Theta$ των χορδών $A\Gamma$ και $A\Delta$ αντίστοιχα.
Το τετράπλευρο $K\Lambda\Theta H$ είναι παραλληλόγραμμο, διότι οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες ($K\Lambda//H\Theta$ από υπόθεση και $KH//H\Theta$ αφού $KH$, $\Lambda\Theta$ είναι κάθετα στη $\Gamma\Delta$). Οπότε $K\Lambda=H\Theta$.
Επίσης, τα σημεία $H, \Theta$ είναι μέσα των χορδών $A\Gamma$ και $A\Delta$ αντίστοιχα.
Οπότε έχουμε: $\Gamma\Delta=\Gamma A+A\Delta=2HA+2A\Theta=2(HA+A\Theta)=2H\Theta=2K\Lambda$

**β.** Η διάκεντρος $K\Lambda$ των δύο τεμνόμενων κύκλων είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής τους $AB$, οπότε $AB\perp K\Lambda$. Αφού, $K\Lambda//\Gamma\Delta$ έχουμε, $AB\perp K\Lambda$.

Επομένως, η γωνία $B\hat{A}\Gamma$ είναι ορθή και εγγεγραμμένη στον κύκλο $(K\,,R)$, οπότε η $B\Gamma$ είναι διάμετρος.
Άρα, τα σημεία Β και Γ είναι αντιδιαμετρικά.

## 441 Θέμα 4 - 1739




**Σε κύκλο κέντρου $O$ θεωρούμε τα ίσα τόξα $AB$ και $A\Gamma$, το καθένα ίσο με $120^o$. Έστω $\Delta$ και $E$ τα μέσα των τόξων $AB$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:**

**α. Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο.**

**β. Τα τρίγωνα $AZ\Delta$ και $AHE$ είναι ίσα και να υπολογίσετε τις γωνίες τους.**

**γ. Η χορδή $\Delta E$ τριχοτομείται από τις χορδές $AB$ και $A\Gamma$.**

**Λύση**

**α.** Είναι:
- $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{A\Gamma}=120^o$
- $\overset{\frown}{B\Gamma}=360^o-120^o-120^o=120^o$

Οπότε $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{B\Gamma}=\overset{\frown}{\Gamma A}$, άρα $AB=B\Gamma=\Gamma A$
Επομένως το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο.

**β.** Είναι $\overset{\frown}{A\Delta}=\overset{\frown}{AE}=\dfrac{120^o}{2}=60^o$, οπότε $A\Delta=AE$.

Είναι $\Delta\hat{A}B=\dfrac{\overset{\frown}{B\Delta}}{2}=30^o$ και $A\hat{\Delta}E=\dfrac{\overset{\frown}{AE}}{2}=30^o$.

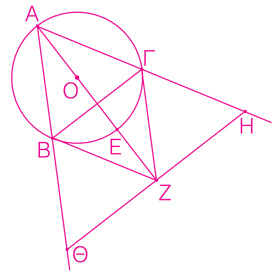
Όμοια $E\hat{A}H=A\hat{E}H=30^o$, οπότε $A\hat{Z}\Delta=A\hat{H}E=180^o-2\cdot30^o=180^o-60^o=120^o$.
Τα τρίγωνα $AZ\Delta$ και $AHE$ έχουν:
- $A\Delta=AE$
- $\Delta\hat{A}Z=H\hat{A}E$
- $A\hat{\Delta}Z=A\hat{E}H$

Οπότε είναι ίσα (ΓΠΓ).

**γ.** Στο τρίγωνο $AZH$, είναι:
- $\hat{A}=\dfrac{\overset{\frown}{B\Gamma}}{2}=\dfrac{120^o}{2}=60^o$
- $\hat{Z}=180^o-A\hat{Z}\Delta=180^o-120^o=60^o$
- $\hat{H}=180^o-A\hat{H}E=180^o-120^o=60^o$
- $\hat{A}=\hat{Z}=\hat{H}=60^o$

Οπότε είναι ισόπλευρο, άρα $AZ=ZH=AH$.
Αφού $\Delta Z=AZ$, $HE=AH$ έχουμε $\Delta Z=ZH=HE$.
Οπότε η $\Delta E$ τριχοτομείται από τις $AB$ και $A\Gamma$.

## 442 Θέμα 4 - 1720




**Δίνεται το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ που είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Τα τμήματα ΓΖ και ΒΖ είναι τα εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου στα σημεία Γ και Β αντίστοιχα. Αν το τμήμα ΘΗ είναι κάθετο στο τμήμα ΑΖ στο Ζ, να αποδείξετε ότι:**

**α.** **Το τρίγωνο ΖΒΓ είναι ισόπλευρο.**

**β.** **Το τετράπλευρο ΑΓΖΒ είναι ρόμβος.**

**γ.** **Το τετράπλευρο ΒΓΗΘ είναι ισοσκελές τραπέζιο.**

**Λύση**

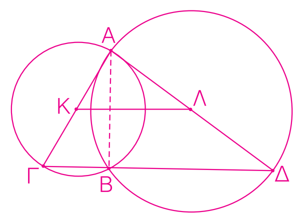
**α.** Είναι:
- $ZB = Z\Gamma$ , οπότε το τρίγωνο ΖΒΓ είναι ισοσκελές.
- $Z\hat{B}\Gamma = B\hat{A}\Gamma = 60^o$ ως γωνία χορδής και εφαπτομένης.

Επομένως το τρίγωνο ΖΒΓ είναι ισόπλευρο.

**β.** Είναι $AB = A\Gamma = B\Gamma$ και $ZB = Z\Gamma = B\Gamma$ . Οπότε $AB = A\Gamma = ZB = Z\Gamma$ , άρα το ΑΓΖΒ είναι ρόμβος.

**γ.** Επειδή το ΑΓΖΒ είναι ρόμβος, έχουμε $B\Gamma \perp AZ$ και αφού έχουμε $\Theta H \perp AZ$ , είναι $B\Gamma // \Theta H$ .
Άρα το ΒΓΗΘ είναι τραπέζιο.
Είναι $\hat{\Theta} = \hat{B} = 60^o$ και $\hat{H} = \hat{\Gamma} = 60^o$ , ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη.
Οπότε $\hat{\Theta} = \hat{H}$ , άρα το ΒΓΗΘ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

## 443 Θέμα 4 - 1717




**Δύο κύκλοι $(K, \rho)$ , $(\Lambda, R)$ τέμνονται σε δύο σημεία Α , Β . Αν Γ και Δ είναι τα αντιδιαμετρικά σημεία του Α στους δύο κύκλους, τότε να αποδείξετε ότι:**

**α.** $\mathbf{A\hat{B}\Gamma = 90^o}$

**β.** **τα σημεία Γ , Β , Δ είναι συνευθειακά.**

**γ.** **το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία Κ , Λ , Γ , Δ είναι τραπέζιο.**

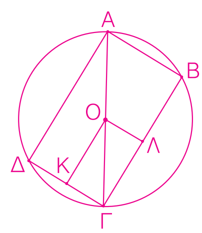
**Λύση**

**α.** Επειδή η γωνία $A\hat{B}\Gamma$ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο $(K, \rho)$ και βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή.
Άρα $A\hat{B}\Gamma = 90^o$ .

**β.** Η γωνία $A\hat{B}\Delta$ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο $(\Lambda, R)$ και βαίνει σε ημικύκλιο, οπότε $A\hat{B}\Delta = 90^o$ .
Είναι $\Gamma\hat{B}\Delta = A\hat{B}\Gamma + A\hat{B}\Delta = 90^o + 90^o = 180^o$ . Άρα τα Γ , Β , Δ είναι συνευθειακά.

**γ.** Τα Κ , Λ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΓ , ΑΔ στο τρίγωνο ΑΓΔ οπότε $K\Lambda // \Gamma\Delta$ .
Άρα το ΚΛΔΓ είναι τραπέζιο.

## 444 Θέμα 4 - 1848




**Δίνεται κύκλος $(O, \rho)$ και ΑΓ μια διάμετρός του. Θεωρούμε τις χορδές $A\Delta = B\Gamma$ .
Έστω Κ και Λ τα μέσα των χορδών ΔΓ και ΒΓ αντίστοιχα.
Να αποδείξετε ότι:**

**α.** **Οι χορδές ΑΒ και ΔΓ είναι παράλληλες.**

**β.** **Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.**

**γ.** **Η ΒΔ είναι διάμετρος του κύκλου.**

**δ.** **Το τετράπλευρο ΟΛΓΚ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.**

**Λύση**

**α.** Έχουμε $ΑΔ = ΒΓ$, οπότε $\overset{\frown}{ΑΔ} = \overset{\frown}{ΒΓ}$. Άρα $Α\hat{Γ}Δ = Γ\hat{Α}Β$ οι οποίες είναι εντός εναλλάξ, οπότε $ΑΒ \,//\, ΔΓ$.

**β.** Επειδή $\overset{\frown}{ΑΔΓ} = \overset{\frown}{ΑΒΓ}$ και $\overset{\frown}{ΑΔ} = \overset{\frown}{ΒΓ}$, έχουμε $\overset{\frown}{ΔΓ} = \overset{\frown}{ΑΒ}$, οπότε $ΑΔ \,//\, ΒΓ$.

Είναι $ΑΒ \,//\, ΔΓ$ και $ΑΔ \,//\, ΒΓ$, οπότε το $ΑΒΓΔ$ είναι παραλληλόγραμμο.

Επειδή $\hat{Β} = 90^{\circ}$, ως εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο, έχουμε ότι το $ΑΒΓΔ$ είναι ορθογώνιο.

**γ.** Επειδή το $ΑΒΓΔ$ είναι ορθογώνιο, έχουμε $Δ\hat{Α}Β = 90^{\circ}$, οπότε $\overset{\frown}{ΔΓΒ} = 180^{\circ}$.
Άρα η $ΒΔ$ είναι διάμετρος του κύκλου.

**δ.** Επειδή τα $Κ$, $Λ$ είναι τα μέσα των χορδών $ΓΔ$, $ΓΒ$, έχουμε ότι $ΟΚ \perp ΓΔ$ και $ΟΛ \perp ΒΓ$.

Το $ΟΛΓΚ$ έχει τρεις ορθές γωνίες $\hat{Κ} = \hat{Λ} = \hat{Γ} = 90^{\circ}$, οπότε είναι ορθογώνιο.

## 445 Θέμα 4 - 1897

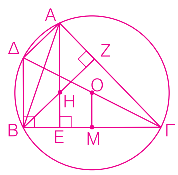
**Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ εγγεγραμμένο σε κύκλο $(Ο, R)$. Έστω σημείο $Δ$ του τόξου $ΑΒ$ τέτοιο ώστε $ΔΒ \perp ΒΓ$.**

**α. Να αποδείξετε ότι $ΑΔ \perp ΑΓ$.**

**β. Έστω $Η$ το ορθόκεντρο του τριγώνου $ΑΒΓ$. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ΑΔΒΗ$ είναι παραλληλόγραμμο.**

**γ. Αν $Μ$ το μέσον της $ΒΓ$, να αποδείξετε ότι $ΟΜ = \dfrac{ΑΗ}{2}$.**

**Λύση**




**α.** Επειδή η γωνία $Δ\hat{Β}Γ$ είναι εγγεγραμμένη και $Δ\hat{Β}Γ = 90^{\circ}$, η $ΔΓ$ είναι διάμετρος.

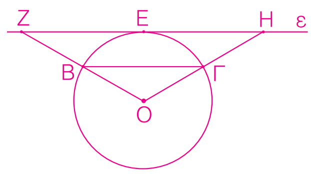
Οπότε και $Δ\hat{Α}Γ = 90^{\circ}$, άρα $ΔΑ \perp ΑΓ$.

**β.** Είναι:
- $ΑΗ \perp ΒΓ$ και $ΔΒ \perp ΒΓ$, άρα $ΑΗ \,//\, ΔΒ$
- $ΒΗ \perp ΑΓ$ και $ΑΔ \perp ΑΓ$, άρα $ΒΗ \,//\, ΑΔ$

Οπότε το $ΑΔΒΗ$ είναι παραλληλόγραμμο.

**γ.** Στο τρίγωνο $ΒΓΔ$ τα $Ο$, $Μ$ είναι τα μέσα των $ΓΔ$ και $ΒΓ$, οπότε $ΟΜ = \dfrac{ΒΔ}{2} = \dfrac{ΑΗ}{2}$, αφού το $ΑΔΒΗ$ είναι παραλληλόγραμμο.

## 446 Θέμα 4 - 1772




**Έστω κύκλος $(Ο, ρ)$ και $Ε$ το μέσον του τόξου του $ΒΓ$. Μια ευθεία $ε$ εφάπτεται στο κύκλο στο $Ε$. Οι προεκτάσεις των $ΟΒ$, $ΟΓ$ τέμνουν την ευθεία $ε$ στα σημεία $Ζ$ και $Η$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:**

**α. $ΒΓ \,//\, ΖΗ$**

**β. $ΟΖ = ΟΗ$**

**γ. Αν $Β$ μέσον της $ΟΖ$**

**i. να αποδείξετε ότι $Β\hat{Ε}Ζ = \dfrac{Ζ\hat{Ο}Η}{4}$**

**ii. να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $ΖΟΗ$.**

**Λύση**

**α.** Είναι $ΟΕ \perp ΖΗ$, αφού η ακτίνα είναι κάθετη στην εφαπτομένη στο σημείο επαφής.

Επειδή το $Ε$ είναι το μέσο του $\overset{\frown}{ΒΓ}$, έχουμε $\overset{\frown}{ΕΒ} = \overset{\frown}{ΕΓ}$, οπότε $ΕΒ = ΕΓ$.
Αφού επιπλέον $ΟΒ = ΟΓ = ρ$, το $ΟΕ$ είναι μεσοκάθετος του $ΒΓ$.

Άρα $ΟΕ \perp ΒΓ$, επομένως $ΒΓ \,//\, ΖΗ$.

**β.** Είναι $\overset{\frown}{EB}=\overset{\frown}{E\Gamma}$ , άρα $B\hat{O}E=\Gamma\hat{O}E$ .
Στο τρίγωνο $OZH$ , το $OE$ είναι ύψος και διχοτόμος.
Οπότε το τρίγωνο $OZH$ είναι ισοσκελές με κορυφή το $O$ , άρα $OZ=OH$ .

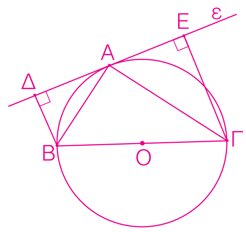
**γ. i.** Είναι:
- $B\hat{E}Z=B\hat{\Gamma}E$ , ως γωνία χορδής και εφαπτομένης
- $B\hat{\Gamma}E=\dfrac{B\hat{O}E}{2}$ , ως εγγεγραμμένη γωνία και επίκεντρη που βαίνουν στο ίδιο τόξο

Οπότε $B\hat{E}Z=\dfrac{B\hat{O}E}{2}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{Z\hat{O}H}{2}=\dfrac{Z\hat{O}H}{4}$ .

**ii.** Το τρίγωνο $OEZ$ είναι ορθογώνιο $(\hat{E}=90^o)$ με $OE=OB=\dfrac{OZ}{2}$ .

Άρα $\hat{Z}=30^o$ , οπότε $\hat{H}=\hat{Z}=30^o$ και $\hat{O}=180^o-\hat{Z}-\hat{H}=180^o-30^o-30^o=120^o$ .

## 447 Θέμα 4 - 1809



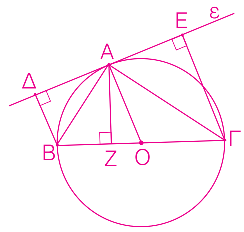
**Θεωρούμε κύκλο κέντρου $O$ , με διάμετρο $B\Gamma$ . Από σημείο $A$ του κύκλου φέρουμε την εφαπτομένη $\varepsilon$ του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ . Από τα σημεία $B$ και $\Gamma$ φέρουμε τα τμήματα $B\Delta$ και $\Gamma E$ κάθετα στην ευθεία $\varepsilon$ .**

**α. Να αποδείξετε ότι $BA$ και $\Gamma A$ είναι διχοτόμοι των γωνιών $\Delta\hat{B}\Gamma$ και $E\hat{\Gamma}B$ αντίστοιχα.**

**β. Αν $AZ$ είναι ύψος του τριγώνου $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ , να αποδείξετε ότι $A\Delta=AE=AZ$ .**

**γ. Να αποδείξετε ότι $B\Delta+\Gamma E=B\Gamma$ .**

**Λύση**



**α.** Είναι:
- $B\hat{A}\Gamma=90^o$ , ως εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο
- $\Delta\hat{A}B=A\hat{\Gamma}B$ και $E\hat{A}\Gamma=A\hat{B}\Gamma$ , ως γωνίες χορδής και εφαπτομένης

Οπότε:
- $\Delta\hat{B}A=90^o-\Delta\hat{A}B=90^o-A\hat{\Gamma}B=A\hat{B}\Gamma$ .
- $E\hat{\Gamma}A=90^o-E\hat{A}\Gamma=90^o-A\hat{B}\Gamma=A\hat{\Gamma}B$

Επομένως η $BA$ είναι η διχοτόμος της γωνίας $\Delta\hat{B}\Gamma$ , και η $\Gamma A$ είναι η διχοτόμος της γωνίας $E\hat{\Gamma}B$ .

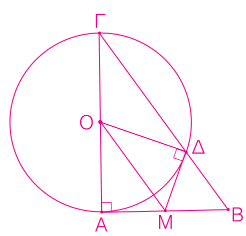
**β.** Η $BA$ είναι η διχοτόμος της γωνίας $\Delta\hat{B}\Gamma$ , οπότε $A\Delta=AZ$ .
Η $\Gamma A$ είναι η διχοτόμος της γωνίας $E\hat{\Gamma}B$ , οπότε $AZ=AE$ .
Άρα $A\Delta=AE=AZ$ .

**γ.** Επειδή $B\Delta\perp\varepsilon$ και $\Gamma E\perp\varepsilon$ , έχουμε $B\Delta\,//\,\Gamma E$ , οπότε το $B\Delta E\Gamma$ είναι τραπέζιο.

Επειδή το $O$ είναι το μέσο του $B\Gamma$ και $OA\perp\varepsilon$ , έχουμε $OA\,//\,B\Delta$ .
Επομένως η $OA$ είναι η διάμεσος του τραπεζίου.

Άρα $OA=\dfrac{B\Delta+\Gamma E}{2}\Rightarrow B\Delta+\Gamma E=2OA\Rightarrow\Rightarrow B\Delta+\Gamma E=2OB\Rightarrow B\Delta+\Gamma E=B\Gamma$ .

## 448 Θέμα 4 - 1883



**Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $\Gamma AB$ $(\hat{A}=90^o)$. Με διάμετρο την πλευρά του $A\Gamma$ φέρουμε κύκλο που τέμνει την υποτείνουσα $B\Gamma$ στο $\Delta$ . Από το $\Delta$ φέρουμε εφαπτόμενο τμήμα το οποίο τέμνει την $AB$ στο $M$ . Να αποδείξετε ότι:**

**α. $\Gamma\hat{A}\Delta=\hat{B}$**

**β. Το τρίγωνο $\overset{\Delta}{\Delta MB}$ είναι ισοσκελές.**

**γ. Το $M$ είναι το μέσο του $AB$ .**

**Λύση**

**α.** Είναι $\Gamma\hat{\Delta}A = 90^\circ$ , ως εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ είναι $\Delta\hat{A}\Gamma = 90^\circ - \hat{\Gamma} \Leftrightarrow \Delta\hat{A}\Gamma = \hat{B}$ , αφού $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^\circ$ στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\overset{\Delta}{B}\Gamma$ .

Οπότε $\Gamma\hat{A}\Delta = \hat{B}$ .

**β.** Είναι: • $\hat{B} = 90^\circ - \hat{\Gamma}$

• $M\hat{\Delta}B = 180^\circ - 90^\circ - O\hat{\Delta}\Gamma = 90^\circ - \hat{\Gamma}$ , αφού το τρίγωνο $O\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές

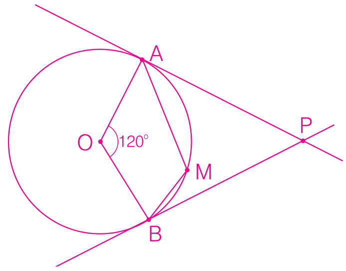
Άρα $\hat{B} = M\hat{\Delta}B$ , οπότε το τρίγωνο $\Delta MB$ είναι ισοσκελές.

**γ.** Είναι: • $MA = M\Delta$ , ως εφαπτόμενα τμήματα

• $MB = M\Delta$ , αφού το τρίγωνο $\Delta MB$ είναι ισοσκελές

Οπότε $MA = MB$ , άρα το $M$ είναι το μέσο του $AB$ .

## 449 Θέμα 4 - 1768



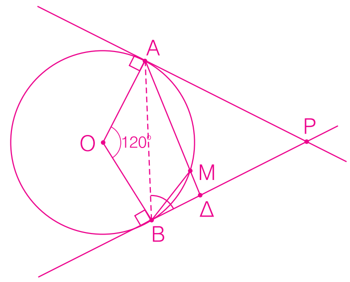

**Δίνεται κύκλος $(O, R)$ και μια επίκεντρη γωνία του $A\hat{O}B$ ίση με $120^\circ$ .**
**Οι εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία $A$ και $B$ τέμνονται στο σημείο $P$ .**
**Θεωρούμε σημείο $M$ του τόξου $AB$ και φέρουμε τις χορδές $AM$ και $BM$ .**
**Να αποδείξετε ότι:**

**α. Το τρίγωνο $APB$ είναι ισόπλευρο.**

**β. $M\hat{A}B + M\hat{B}A = 60^\circ$**

**γ. Για ποια θέση του $M$ είναι $AM \perp BP$ ;**

**Λύση**




**α.** Στο τετράπλευρο $PAOB$ είναι $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$. Οπότε
$\hat{P} = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ . Επιπλέον $PA = PB$ ως εφαπτόμενα τμήματα.
Άρα, το τρίγωνο $PAB$ είναι ισόπλευρο.

**β.** Είναι $A\hat{O}B = 120^\circ$ ή $\overset{\frown}{AMB} = 120^\circ$ .
Άρα το μη κυρτογώνιο τόξο $\overset{\frown}{AB}$ είναι ίσο με $240^\circ$ .
Η γωνία $A\hat{M}B$ είναι εγγεγραμμένη στο μη κυρτογώνιο τόξο $\overset{\frown}{AB}$ .
Τότε $A\hat{M}B = \dfrac{240^\circ}{2} = 120^\circ$ .

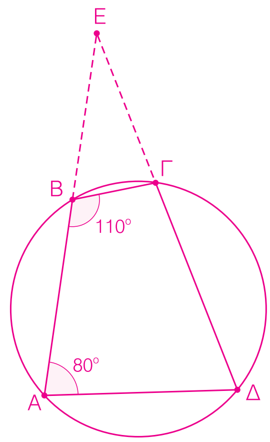
Στο τρίγωνο $MAB$ έχουμε $M\hat{A}B + M\hat{B}A + A\hat{M}B = 180^\circ \Leftrightarrow M\hat{A}B + M\hat{B}A + 120^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow M\hat{A}B + M\hat{B}A = 60^\circ$ .

**γ.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta B$ είναι $\hat{B} = 60^\circ$ οπότε $M\hat{A}B = 30^\circ$ .
Από το ερώτημα **β.** προκύπτει ότι $M\hat{B}A = 30^\circ$ . Άρα $MA = MB$ .

Επομένως $AM \perp BP$ στην περίπτωση που το $M$ είναι μέσο του τόξου $\overset{\frown}{AB}$ .

## 26. Εγγεγραμένα και Εγγράψιμα τετράπλευρα

## 450 Θέμα 2 - 12643




**Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο και οι πλευρές του ΑΒ και ΔΓ προεκτεινόμενες τέμνονται στο σημείο Ε. Αν η γωνία Α του τετραπλεύρου ισούται με $80^\circ$ και η γωνία Β ισούται με $110^\circ$, να υπολογίσετε αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας:**

**α. το μέτρο της γωνία ΕΓΒ.**

**β. το μέτρο της γωνία ΒΕΓ.**

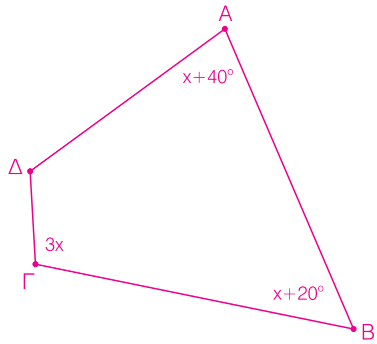
**Λύση**

**α.** Η γωνία $E\hat{\Gamma}B$ είναι εξωτερική στο εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΑΒΓΔ, άρα θα ισούται με την απέναντι εσωτερική. Δηλαδή η $E\hat{\Gamma}B = \hat{A} = 80^\circ$.

**β.** Η γωνία $E\hat{B}\Gamma$ είναι παραπληρωματική της $\hat{B}$ του τετραπλεύρου, οπότε $E\hat{B}\Gamma = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$.
Στο τρίγωνο ΕΒΓ έχουμε:

$B\hat{E}\Gamma + E\hat{B}\Gamma + E\hat{\Gamma}B = 180^\circ \Leftrightarrow B\hat{E}\Gamma + 70^\circ + 80^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow B\hat{E}\Gamma = 30^\circ$.

## 451 Θέμα 2 - 13818




**Δίνεται το τετράπλευρο ΑΒΓΔ το οποίο είναι εγγράψιμο. Οι γωνίες Α, Β, Γ έχουν αντίστοιχα μέτρα $x+40^0$ , $x+20^0$ , 3x. Να υπολογίσετε :**

**α. πόσες μοίρες είναι το x.**

**β. τα μέτρα των γωνιών του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.**

**Λύση**

**α.** Επειδή το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι εγγράψιμο, οι απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές.

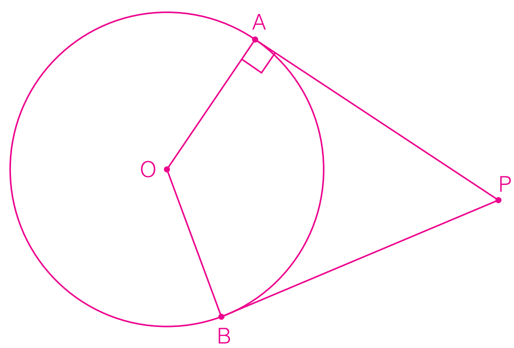
Άρα $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow x + 40^\circ + 3x = 180^\circ \Leftrightarrow 4x = 140^\circ \Leftrightarrow x = 35^\circ$.

**β.** Εχουμε $\hat{A} = 35^\circ + 40^\circ = 75^\circ$ , $\hat{B} = 35^\circ + 20^\circ = 55^\circ$ , $\hat{\Gamma} = 3 \cdot 35^\circ = 105^\circ$.

Οι γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Delta}$ είναι απέναντι γωνίες του εγγράψιμου τετραπλεύρου ΑΒΓΔ , άρα είναι παραπληρωματικές.

Οπότε $\hat{B} + \hat{\Delta} = 180^\circ \Leftrightarrow 55^\circ + \hat{\Delta} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Delta} = 125^\circ$.

## 452 Θέμα 2 - 12641




**Δίνεται κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα 4 cm. Από σημείο Ρ εκτός του κύκλου φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ προς τον κύκλο. Επίσης η γωνία ΑΡΒ ισούται με $60^\circ$.**

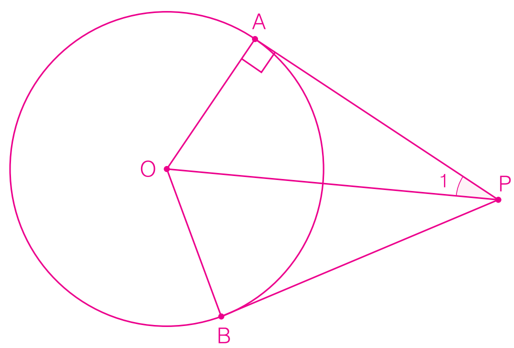
**α. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΡΑΟΒ είναι εγγράψιμο.**

**β. Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας ΑΡΟ.**

**γ. Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΟΡ.**

**Λύση**

**α.** Τα εφαπτόμενα τμήματα από σημείο εκτός κύκλου είναι κάθετα στις ακτίνες που αντιστοιχούν στα σημεία επαφής, οπότε $P\hat{A}O + P\hat{B}O = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$.
Επομένως το τετράπλευρο ΡΑΟΒ είναι εγγράψιμο.



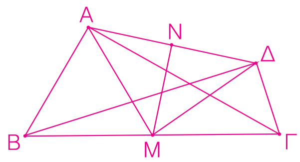

**β.** Η διακεντρική ευθεία διχοτομεί τη γωνία των εφαπτόμενων τμημάτων, άρα $A\hat{P}O = \dfrac{A\hat{P}B}{2} = \dfrac{60^\circ}{2} = 30^\circ$.

**γ.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΡ η γωνία $\hat{P}_1 = 30^\circ$ , οπότε η απέναντι κάθετη πλευρά ισούται με το μισό της υποτείνουσας.

Άρα $OA = \dfrac{OP}{2} \Leftrightarrow OP = 2 \cdot OA \Leftrightarrow OP = 2 \cdot 4 \Leftrightarrow OP = 8\text{cm}$.

## 453 Θέμα 4 - 1807

**Δίνονται ορθογώνια τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΔΒΓ$ με $\hat{Α}=90^o$ , $\hat{Δ}=90^o$ και $Μ$, $Ν$ τα μέσα των $ΒΓ$ και $ΑΔ$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:**




α. **$ΑΜ=ΜΔ$**

β. **Η $ΜΝ$ είναι κάθετη στην $ΑΔ$.**

γ. **$Γ\hat{Β}Δ=Γ\hat{Α}Δ$**

**Λύση**

**α.** Στα ορθογώνια τρίγωνα $ΑΒΓ$ $(\hat{Α}=90^o)$, $ΔΒΓ$ $(\hat{Δ}=90^o)$ οι $ΑΜ$, $ΔΜ$ είναι διάμεσοι, οπότε $ΑΜ=\frac{ΒΓ}{2}$ και $ΔΜ=\frac{ΒΓ}{2}$.

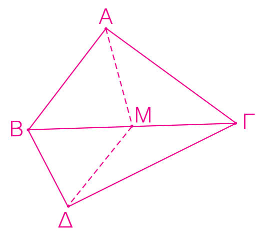
Άρα $ΑΜ=ΜΔ$.

**β.** Στο ισοσκελές τρίγωνο $ΜΑΔ$, η $ΜΝ$ είναι διάμεσος, άρα είναι και ύψος, οπότε $ΜΝ \perp ΑΔ$.

**γ.** Το $ΑΒΓΔ$ είναι εγγράψιμο, αφού $Β\hat{Α}Γ=Β\hat{Δ}Γ=90^o$, οπότε η $ΒΓ$ φαίνεται από τις κορυφές $Α$ και $Δ$, υπό ίσες γωνίες. Άρα $Γ\hat{Β}Δ=Γ\hat{Α}Δ$.

## 454 Θέμα 4 - 1886

**Δίνονται τα ορθογώνια τρίγωνα $ΑΒΓ$ $(\hat{Α}=90^o)$ και $ΔΒΓ$ $(\hat{Δ}=90^o)$ (όπου $Α$ και $Δ$ εκατέρωθεν της $ΒΓ$) και το μέσο $Μ$ της $ΒΓ$. Να αποδείξετε ότι:**




α. **το τρίγωνο $ΑΜΔ$ είναι ισοσκελές**

β. **$Α\hat{Μ}Δ=2\cdot Α\hat{Γ}Δ$**

γ. **$Γ\hat{Β}Δ=Γ\hat{Α}Δ$**

**Λύση**

**α.** Στα ορθογώνια τρίγωνα $ΑΒΓ$ $(\hat{Α}=90^o)$ και $ΔΒΓ$ $(\hat{Δ}=90^o)$ οι $ΑΜ$, $ΔΜ$ είναι διάμεσοι, οπότε $ΑΜ=\frac{ΒΓ}{2}$ και $ΔΜ=\frac{ΒΓ}{2}$. Άρα $ΑΜ=ΜΔ$, οπότε το τρίγωνο $ΑΜΔ$ είναι ισοσκελές.

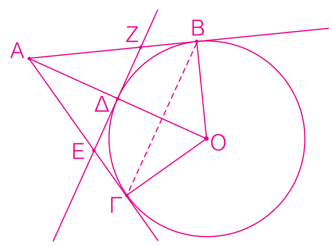
**β.** Επειδή $\hat{Α}+\hat{Δ}=90^o+90^o=180^o$, το τετράπλευρο $ΑΓΔΒ$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο με κέντρο $Μ$. Οπότε $Α\hat{Μ}Δ=2Α\hat{Γ}Δ$, αφού η $Α\hat{Μ}Δ$ είναι επίκεντρη και η $Α\hat{Γ}Δ$ εγγεγραμμένη που βαίνει στο ίδιο τόξο με την $Α\hat{Μ}Δ$.

**γ.** Επειδή το τετράπλευρο $ΑΓΔΒ$ είναι εγγράψιμο η πλευρά του $ΓΔ$ φαίνεται από τις κορυφές $Α$ και $Β$ υπό ίσες γωνίες.

Άρα $Γ\hat{Β}Δ=Γ\hat{Α}Δ$.

## 455 Θέμα 4 - 1847

**Δίνεται κύκλος με κέντρο $Ο$ και ακτίνα $ρ$. Έστω σημείο $Α$ εξωτερικό του κύκλου και τα εφαπτόμενα τμήματα $ΑΒ$ και $ΑΓ$ ώστε να ισχύει $Β\hat{Α}Γ=60^o$. Το $ΟΑ$ τέμνει τον κύκλο στο σημείο $Δ$. Η εφαπτομένη του κύκλου στο $Δ$, τέμνει τις $ΑΒ$ και $ΑΓ$ στα $Ε$ και $Ζ$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:**




α. **Το τετράπλευρο $ΑΒΟΓ$ είναι εγγράψιμο με $ΟΑ=2ΟΒ$.**

β. **Το τρίγωνο $ΑΕΖ$ είναι ισόπλευρο.**

γ. **$2ΖΒ=ΑΖ$**

δ. **Το τετράπλευρο $ΕΖΒΓ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.**

**Λύση**

**α.** Είναι $OB \perp AB$ και $O\Gamma \perp A\Gamma$ .

Επειδή $A\hat{B}O + A\hat{\Gamma}O = 90^o + 90^o = 180^o$ , το $ABO\Gamma$ είναι εγγράψιμο. Η διακεντρική ευθεία $AO$ είναι η διχοτόμος της γωνίας $B\hat{A}\Gamma$ , οπότε $B\hat{A}O = \frac{B\hat{A}\Gamma}{2} = \frac{60^o}{2} = 30^o$ .

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ABO$ είναι $B\hat{A}O = 30^o$ , άρα $OB = \frac{OA}{2} \Rightarrow OA = 2OB$ .

**β.** Η $ZE$ είναι εφαπτομένη του κύκλου στο $\Delta$ , άρα $ZE \perp O\Delta$ .

Στο τρίγωνο $AEZ$ η $A\Delta$ είναι διχοτόμος και ύψος.

Οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές και επειδή $\hat{A} = 60^o$ είναι ισόπλευρο.

**γ.** Είναι $ZB = Z\Delta$ , ως εφαπτόμενα τμήματα.

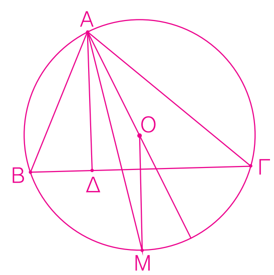
Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AZ\Delta$ είναι $Z\hat{A}\Delta = 30^o$ , οπότε $Z\Delta = \frac{AZ}{2} \Rightarrow ZB = \frac{AZ}{2} \Rightarrow 2ZB = AZ$ .

**δ.** Η διακεντρική ευθεία $AO$ είναι κάθετη στη χορδή $B\Gamma$ , άρα $A\Delta \perp B\Gamma$ .
Είναι $A\Delta \perp ZE$ και $A\Delta \perp B\Gamma$ , οπότε $ZE // B\Gamma$ .
Άρα το $EZB\Gamma$ είναι τραπέζιο.

Είναι:
- $E\Gamma = E\Delta$ , ως εφαπτόμενα τμήματα
- $E\Delta = \Delta Z$ , αφού το ύψος $A\Delta$ στο ισοσκελές τρίγωνο $AEZ$ είναι και διάμεσος.
- $\Delta Z = ZB$ , ως εφαπτόμενα τμήματα

Άρα $ZB = E\Gamma$ , οπότε το $EZB\Gamma$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

## 456 Θέμα 4 - 1892




**Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ , εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο $O$ . Θεωρούμε το μέσο $M$ του κυρτογώνιου τόξου $B\Gamma$ και το ύψος $A\Delta$ του τριγώνου $AB\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι:**

**α. $AM$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\Delta AO$ .**

**β. $O\hat{A}\Gamma = \Delta\hat{A}B$**

**γ. $\Delta\hat{A}O = \hat{B} - \hat{\Gamma}$**

**Λύση**

**α.** Είναι $A\Delta \perp B\Gamma$ και $OM \perp B\Gamma$ , οπότε $A\Delta // OM$ .

Άρα $\Delta\hat{A}M = A\hat{M}O$ , ως εντός εναλλάξ.

Επειδή $OA = OM$ , είναι $A\hat{M}O = M\hat{A}O$ .

Οπότε $\Delta\hat{A}M = M\hat{A}O$ , άρα η $AM$ είναι η διχοτόμος της $\Delta\hat{A}O$ .

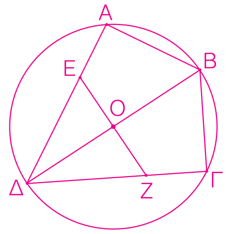
**β.** Επειδή το $M$ είναι το μέσο του $\overset{\frown}{B\Gamma}$ έχουμε $B\hat{A}M = M\hat{A}\Gamma$ . Από το **α.** ερώτημα είναι $\Delta\hat{A}M = M\hat{A}O$ , οπότε $B\hat{A}M - \Delta\hat{A}M = M\hat{A}\Gamma - M\hat{A}O \Rightarrow \Delta\hat{A}B = O\hat{A}\Gamma$ .

**γ.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta A\Gamma$ είναι $\Delta\hat{A}\Gamma = 90^o - \hat{\Gamma}$ .

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta AB$ είναι $\Delta\hat{A}B = 90^o - \hat{B}$ .

Είναι $\Delta\hat{A}O = \Delta\hat{A}\Gamma - O\hat{A}\Gamma = 90^o - \hat{\Gamma} - \Delta\hat{A}B = 90^o - \hat{\Gamma} - (90^o - \hat{B}) = \hat{B} - \hat{\Gamma}$ .

## 457 Θέμα 4 - 1864




**Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ και ο περιγεγραμμένος του κύκλος (Ο, ρ) ώστε η διαγώνιος του ΔΒ να είναι διάμετρος του κύκλου. Η γωνία Β είναι διπλάσια της γωνίας Δ και οι πλευρές ΑΒ και ΒΓ είναι ίσες. Φέρουμε κάθετη στη ΒΔ στο Ο, η οποία τέμνει τις πλευρές ΑΔ και ΓΔ στα Ε και Ζ αντίστοιχα.**

**α. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.**

**β. Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΔΑΒ και ΔΓΒ.**

**γ. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΟ είναι ρόμβος.**

**δ Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΟΕ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.**

**Λύση**

**α.** Είναι:
- $\hat{A} = \hat{\Gamma} = 90^o$, ως εγγεγραμμένες που βαίνουν σε ημικύκλιο.
- $\hat{B} + \hat{\Delta} = 180^o \Leftrightarrow 2\hat{\Delta} + \hat{\Delta} = 180^o \Leftrightarrow 3\hat{\Delta} = 180^o \Leftrightarrow \hat{\Delta} = 60^o$, οπότε $\hat{B} = 2 \cdot 60^o = 120^o$.

**β.** Τα ορθογώνια τρίγωνα ΔΑΒ $(\hat{A} = 90^o)$ και ΔΓΒ $(\hat{\Gamma} = 90^o)$ έχουν:
- $AB = B\Gamma$
- ΒΔ κοινή

Άρα είναι ίσα.

**γ.** Επειδή $AB = B\Gamma$, έχουμε $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{B\Gamma}$, οπότε $A\hat{\Delta}B = \Gamma\hat{\Delta}B$.

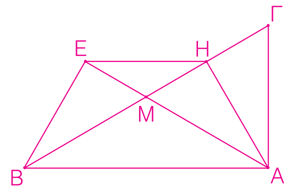
Επομένως η ΔΒ είναι η διχοτόμος της $\hat{\Delta}$, άρα $A\hat{\Delta}B = 30^o$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ $(\hat{A} = 90^o)$ είναι $A\hat{\Delta}B = 30^o$, οπότε $AB = \frac{B\Delta}{2} = \rho$.

Άρα $OA = AB = B\Gamma = O\Gamma$, οπότε το ΑΒΓΟ είναι ρόμβος.

**δ.** Στο τετράπλευρο ΑΒΟΕ είναι $\hat{A} + \hat{O} = 90^o + 90^o = 180^o$, οπότε το ΑΒΟΕ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

## 458 Θέμα 4 - 1896




**Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $(\hat{A} = 90^o)$ έχουμε ότι $\hat{B} = 30^o$. Φέρουμε το ύψος ΑΗ και τη διάμεσο ΑΜ του τριγώνου ΑΒΓ.**

**Από την κορυφή Β φέρνουμε κάθετη στη διάμεσο ΑΜ, η οποία την τέμνει στο σημείο Ε όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να αποδείξετε ότι:**

**α.** $BE = \frac{AB}{2}$ **β.** $AH = BE$

**γ. το τετράπλευρο ΑΗΕΒ είναι εγγράψιμο**

**δ.** $EH \,//\, AB$

**Λύση**

**α.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $(\hat{A} = 90^o)$ η ΑΜ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε $AM = \frac{B\Gamma}{2} = MB$.

Επομένως $M\hat{A}B = M\hat{B}A = 30^o$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΕΑΒ $(\hat{E} = 90^o)$, είναι $E\hat{A}B = 30^o$, οπότε $BE = \frac{AB}{2}$ (1).

**β.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΗΒΑ $(\hat{H} = 90^o)$, είναι $\hat{B} = 30^o$, οπότε $AH = \frac{AB}{2}$ (2).

Από (1), (2) έχουμε $AH = BE$.

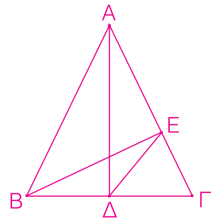
**γ.** Στο τετράπλευρο ΑΗΕΒ είναι $B\hat{E}A = 90^o = B\hat{H}A$, οπότε είναι εγγράψιμο.

**δ.** Είναι: • $H\hat{E}A = H\hat{B}A$ , αφού ΑΗΕΒ εγγράψιμο

• $H\hat{B}A = E\hat{A}B$ , αφού $MA = MB$ .

Οπότε $H\hat{E}A = E\hat{A}B$, οι οποίες είναι εντός εναλλάξ, άρα $EH // AB$ .

## 459 Θέμα 4 - 1799




**Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$ και ΑΔ, ΒΕ τα ύψη του. Να αποδείξετε ότι:**

**α.** $B\Gamma = 2E\Delta$

**β.** $B\hat{E}\Delta = \dfrac{\hat{A}}{2}$

**γ.** **Το τετράπλευρο ΑΕΔΒ είναι εγγράψιμο.**

**δ.** $A\hat{B}E = A\hat{\Delta}E$

**Λύση**

**α.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΕΓ ($\hat{E} = 90^\circ$) , η ΕΔ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα.

Οπότε $E\Delta = \dfrac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow B\Gamma = 2E\Delta$ .

**β.** Είναι $E\Delta = \dfrac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow E\Delta = \Delta B$ .

Το τρίγωνο ΕΔΒ είναι ισοσκελές με $B\hat{E}\Delta = E\hat{B}\Delta$ .

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΕΒΓ, έχουμε $E\hat{B}\Gamma + \hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow E\hat{B}\Delta + \hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow B\hat{E}\Delta = 90^\circ - \hat{\Gamma}$ .

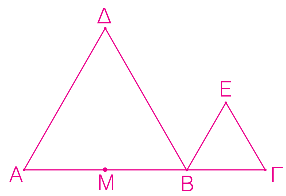
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ, έχουμε $\Delta\hat{A}\Gamma + \hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow \dfrac{\hat{A}}{2} + \hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow \dfrac{\hat{A}}{2} = 90^\circ - \hat{\Gamma}$ .

Άρα $B\hat{E}\Delta = \dfrac{\hat{A}}{2}$ .

**γ.** Το τετράπλευρο ΑΕΔΒ είναι εγγράψιμο, αφού $A\hat{E}B = 90^\circ = A\hat{\Delta}B$.

**δ.** Επειδή το τετράπλευρο ΑΕΔΒ είναι εγγράψιμο, έχουμε $A\hat{B}E = A\hat{\Delta}E$ .

## 460 Θέμα 4 - 1774




**Έστω Α, Β, Γ συνευθειακά σημεία με $AB = 2B\Gamma$ . Θεωρούμε το μέσο Μ της ΑΒ. Προς το ίδιο ημιεπίπεδο κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΔΒ, ΒΕΓ. Να αποδείξετε ότι:**

**α.** **Το τετράπλευρο ΑΔΕΒ είναι τραπέζιο ($A\Delta // BE$) .**

**β.** **Τα τρίγωνα ΔΜΒ, ΔΕΒ είναι ίσα.**

**γ.** **Το τετράπλευρο ΔΜΒΕ είναι εγγράψιμο.**

**Λύση**

**α.** Έχουμε $\Delta\hat{A}B = E\hat{B}\Gamma = 60^\circ$ , οι οποίες είναι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη, άρα $A\Delta // BE$ .
Οπότε το ΑΔΕΒ είναι τραπέζιο.

**β.** Είναι $\Delta\hat{B}M = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$ .

Τα τρίγωνα ΔΜΒ και ΔΕΒ έχουν: • $MB = BE$

• ΔΒ κοινή

• $\Delta\hat{B}M = \Delta\hat{B}E$ $(= 60^\circ)$

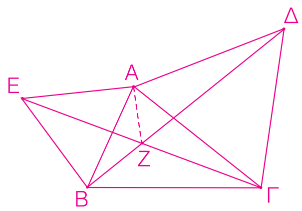
Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ).

**γ.** Το $\Delta M$ είναι διάμεσος στο ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Delta$, οπότε είναι και ύψος του, άρα $\Delta\widehat{M}B = 90^\circ$.

Επειδή $\overset{\Delta}{\Delta MB} = \overset{\Delta}{\Delta EB}$, είναι ίσα έχουμε $\Delta\hat{M}B = \Delta\hat{E}B = 90^\circ$.

Είναι $\Delta\hat{M}B + \Delta\hat{E}B = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, οπότε το τετράπλευρο $\Delta MBE$ είναι εγγράψιμο.

## 461 Θέμα 4 - 1776




**Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$. Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου τα ισόπλευρα τρίγωνα $AEB$, $A\Gamma\Delta$. Ονομάζουμε $Z$ το σημείο τομής των ευθυγράμμων τμημάτων $B\Delta$, $\Gamma E$. Να αποδείξετε ότι:**

**α. Τα τρίγωνα $AE\Gamma$ και $AB\Delta$ είναι ίσα και να γράψετε τα ζεύγη των ίσων γωνιών.**

**β. Τα τετράπλευρα $AZ\Gamma\Delta$, $AZBE$ είναι εγγράψιμα.**

**γ. Η γωνία $B\hat{Z}\Gamma$ είναι $120^\circ$.**

**Λύση**

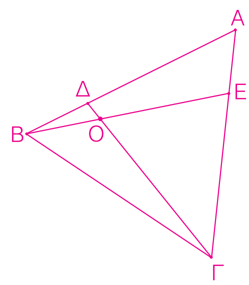
**α.** Τα τρίγωνα $AE\Gamma$ και $AB\Delta$ έχουν:
- $AE = AB$
- $A\Gamma = A\Delta$
- $E\hat{A}\Gamma = \Delta\hat{A}B$ $(= 60^\circ + B\hat{A}\Gamma)$

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ), οπότε $A\hat{\Gamma}E = A\hat{\Delta}B$ και $A\hat{E}\Gamma = A\hat{B}\Delta$.

**β.** Επειδή:
- $A\hat{\Gamma}E = A\hat{\Delta}B$, το τετράπλευρο $AZ\Gamma\Delta$ είναι εγγράψιμο.
- $A\hat{E}\Gamma = A\hat{B}\Delta$, το $AZBE$ είναι εγγράψιμο

**γ.** Είναι $B\hat{Z}\Gamma = E\hat{Z}\Delta = E\hat{Z}A + A\hat{Z}\Delta = E\hat{B}A + A\hat{\Gamma}\Delta = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$.

## 462 Θέμα 4- 1779




**Θεωρούμε ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα σημεία $\Delta$ και $E$ των πλευρών $AB$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα, ώστε να είναι $A\Delta = \Gamma E$. Έστω $O$ το σημείο τομής των $\Gamma\Delta$ και $BE$.**

**α. Να αποδείξετε ότι:**

**i. $B\hat{E}\Gamma = \Gamma\hat{\Delta}A$**

**ii. $B\hat{O}\Gamma = 120^\circ$**

**β. Να εξετάσετε αν το τετράπλευρο $AEO\Delta$ είναι εγγράψιμο. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.**

**Λύση**

**α. i.** Τα τρίγωνα $BE\Gamma$ και $A\Delta\Gamma$ έχουν:
- $B\Gamma = A\Gamma$
- $\Gamma E = A\Delta$
- $\hat{\Gamma} = \hat{A}$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ), άρα $B\hat{E}\Gamma = \Gamma\hat{\Delta}A$.

**ii.** Επειδή τα τρίγωνα $BE\Gamma$ και $A\Delta\Gamma$ είναι ίσα έχουμε $E\widehat{B}\Gamma = O\widehat{\Gamma}E$.

Στο τρίγωνο $O\Gamma E$ η $B\hat{O}\Gamma$ είναι εξωτερική, οπότε

$$B\hat{O}\Gamma = O\hat{\Gamma}E + O\hat{E}\Gamma \overset{\text{i.}}{=} E\hat{B}\Gamma + O\hat{E}\Gamma = 180^\circ - B\hat{\Gamma}E = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$$

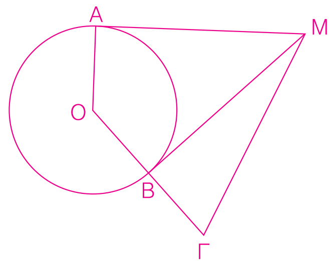
**β.** Είναι:
- $\Delta\widehat{O}E = BO\Gamma = 120^\circ$
- $\hat{A} + \Delta\hat{O}E = 60^\circ + 120^\circ = 180^\circ$

Άρα το τετράπλευρο $AEO\Delta$ είναι εγγράψιμο.

## 463 Θέμα 4 - 1753

**Δίνεται κύκλος (Ο, ρ) και σημείο Μ εξωτερικό του.**

**Από το Μ φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΜΑ και ΜΒ του κύκλου και έστω ότι το σημείο Γ είναι το συμμετρικό του Ο ως προς την ευθεία ΜΒ.**




**α. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΜΒΟ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.**

**β. Να προσδιορίσετε το κέντρο Λ του περιγεγραμμένου κύκλου του τετραπλεύρου ΑΜΒΟ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.**

**γ. Να αποδείξετε ότι ΒΛ // ΜΓ .**

**Λύση**

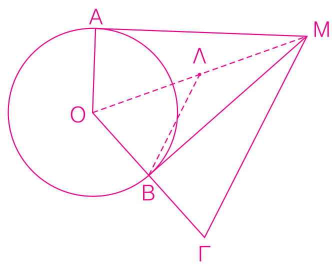
α. Είναι $ΟΑ \perp ΑΜ$ και $ΟΒ \perp ΒΜ$ .

Οπότε $\hat{Α} + \hat{Β} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$. Άρα το τετράπλευρο ΑΜΒΟ είναι εγγράψιμο.

β. Αφού $\hat{Α} = 90^\circ$ , η ΟΜ είναι διάμετρος του περιγραμμένου κύκλου του τετράπλευρου ΑΜΒΟ.

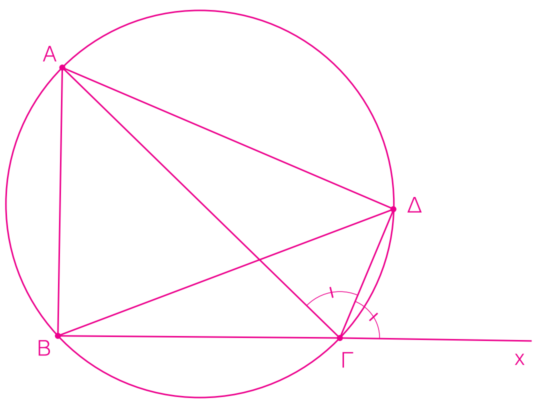
Οπότε το κέντρο Λ του περιγγεγραμμένου κύκλου του τετράπλευρου ΑΜΒΟ είναι το μέσο του ΜΟ .

γ. Στο τρίγωνο ΟΜΓ τα σημεία Β , Λ είναι μέσα των ΟΓ , ΟΜ , οπότε ΒΛ // ΜΓ .




## 464 Θέμα 4 - 13444

**Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ εγγεγραμμένο σε κύκλο και οι διαγώνιοί του ΑΓ και ΒΔ. Η γωνία $Δ\hat{Γ}x$ είναι εξωτερική γωνία του τετραπλεύρου και η ΓΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $Α\hat{Γ}x$ .**




**α. Να αποδείξετε ότι $Β\hat{Α}Δ = \frac{1}{2}Α\hat{Γ}x$ .**

**β. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές και να προσδιορίσετε τις ίσες πλευρές του.**

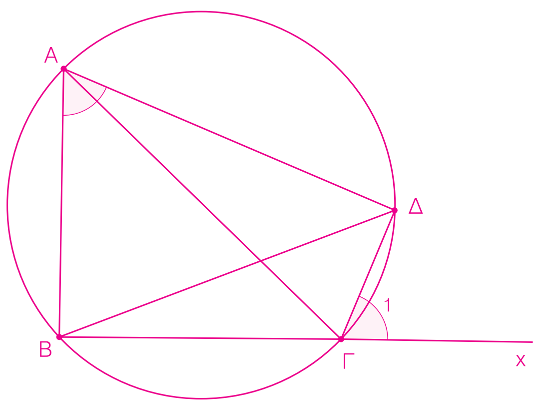
**γ. Αν η ΑΓ είναι διάμετρος του κύκλου, να αποδείξετε ότι οι γωνίες $Α\hat{Γ}Β$ και $Β\hat{Δ}Γ$ είναι συμπληρωματικές.**

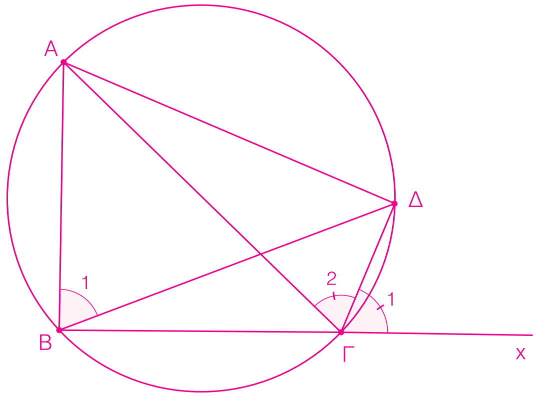
**Λύση**

α. • Η γωνία $\hat{Γ}_1$ , είναι εξωτερική του εγγεγραμμένου τετράπλευρου ΑΒΓΔ , άρα $\hat{Γ}_1 = Β\hat{Α}Δ$ , (1) .

• Η ΓΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $Α\hat{Γ}x$ , άρα $\hat{Γ}_1 = \frac{1}{2}Α\hat{Γ}x$ , (2) .

Από τις ισότητες (1) , (2) προκύπτει ότι $Β\hat{Α}Δ = \frac{1}{2}Α\hat{Γ}x$ , (3).



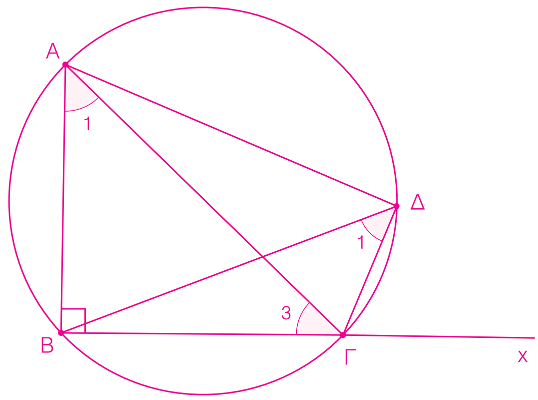



**β.** Είναι $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_2$ , (4) , ως εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο $A\Delta$ .

Η $\Gamma\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{\Gamma}x$ , άρα

$$\hat{\Gamma}_2 = \frac{1}{2}A\hat{\Gamma}x \overset{(4)}{\Leftrightarrow} \hat{B}_1 = \frac{1}{2}A\hat{\Gamma}x \overset{(3)}{\Leftrightarrow} B\hat{A}\Delta = \hat{B}_1 .$$

Οπότε το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές με $\Delta B = \Delta A$ , γιατί βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες του $B\hat{A}\Delta$ και $\hat{B}_1$ αντίστοιχα.

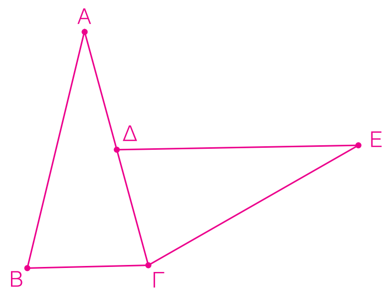



**γ.** • Αν η $A\Gamma$ είναι διάμετρος του κύκλου, τότε $A\hat{B}\Gamma = 90^\circ$ , ως εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο. Οι οξείες γωνίες του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ είναι συμπληρωματικές, δηλαδή $\hat{\Gamma}_3 + \hat{A}_1 = 90^\circ$ , (5).

• Οι γωνίες $\hat{A}_1$ , $\hat{\Delta}_1$ είναι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο $B\Gamma$ , άρα $\hat{A}_1 = \hat{\Delta}_1$ .

Οπότε $\hat{\Gamma}_3 + \hat{\Delta}_1 = 90^\circ$ , άρα οι γωνίες $A\hat{\Gamma}B$ και $B\hat{\Delta}\Gamma$ είναι συμπληρωματικές.

## 465 Θέμα 4 - 13538




**Στο παρακάτω σχήμα δίνονται τα ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΓΔ με $AB = A\Gamma = E\Gamma = E\Delta$ , όπου Δ είναι το μέσο της ΑΓ και $B\Gamma = \frac{AB}{2}$.**

**α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΓΔΕ είναι ίσα.**

**β. Αν η προέκταση της ΕΔ προς το Δ τέμνει την ΑΒ στο σημείο Ζ, να αποδείξετε ότι:**

**i. Το σημείο Ζ είναι το μέσο της ΑΒ.**

**ii. $E\hat{A}\Gamma = E\hat{Z}\Gamma$ .**

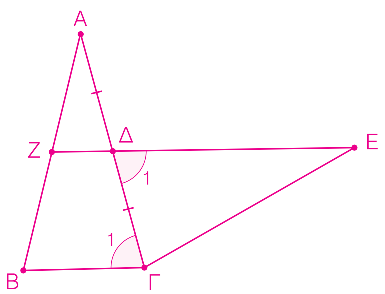
**Λύση**

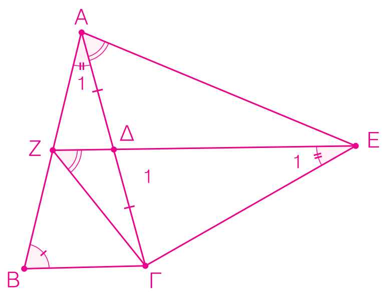
**α.** Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $E\Gamma\Delta$ έχουν:

- $AB = E\Gamma$ ,
- $A\Gamma = E\Delta$ ,
- $B\Gamma = \Gamma\Delta$ , γιατί $B\Gamma = \frac{AB}{2}$ και $\Gamma\Delta = \frac{A\Gamma}{2} = \frac{AB}{2}$ , αφού το Δ είναι το μέσο της ΑΓ.

Άρα είναι ίσα, γιατί έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία (κριτήριο ΠΠΠ).

**β.**






**i.** Από την ισότητα των τριγώνων $ΑΒΓ$ και $ΕΓΔ$ προκύπτει ότι $\hat{Γ}_1 = \hat{Δ}_1$.
Οι $ΒΓ$ και $ΔΕ$ τεμνόμενες από την $ΑΓ$ σχηματίζουν ίσες τις εντός εναλλάξ γωνίες τους $\hat{Γ}_1$ και $\hat{Δ}_1$, άρα η $ΒΓ$ είναι παράλληλη στη $ΔΕ$.
Στο τρίγωνο $ΑΒΓ$ το $Δ$ είναι το μέσο της $ΑΓ$ και η $ΔΖ$ είναι παράλληλη στη $ΒΓ$, άρα το $Ζ$ είναι το μέσο της $ΑΒ$.

**ii.** Από την ισότητα των τριγώνων $ΑΒΓ$ και $ΕΓΔ$ προκύπτει ότι $\hat{Α}_1 = \hat{Ε}_1$.
Άρα το τετράπλευρο $ΑΕΓΖ$ είναι εγγράψιμο, αφού η πλευρά του $ΓΖ$ φαίνεται από τις απέναντι κορυφές του Α και Ε υπό ίσες γωνίες.
Οπότε στο εγγράψιμο ΑΕΓΖ η πλευρά ΓΕ φαίνεται από τις απέναντι κορυφές του $Α$ και $Ζ$ υπό ίσες γωνίες, άρα θα είναι $Ε\hat{Α}Γ = Ε\hat{Ζ}Γ$.

## 466 Θέμα 4 - 13521

**Σε οξυγώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ\,(ΑΒ < ΑΓ)$ φέρουμε το ύψος ΑΔ. Έστω Κ, Λ, Μ τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:**

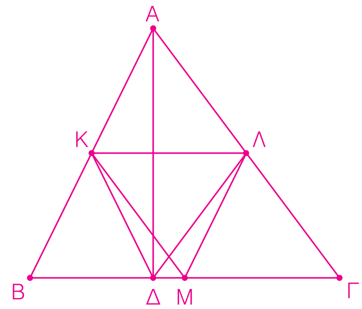
**α.** $ΚΛ // ΒΓ$.

**β. i.** $ΜΛ = ΚΔ$

**ii.** $ΚΜ = ΔΛ$.

**γ. Το ΚΛΜΔ είναι ένα εγγράψιμο τετράπλευρο.**

**Λύση**




**α.** Στο τρίγωνο $ΑΒΓ$, το $Κ$ είναι μέσο του $ΑΒ$ και το $Λ$ είναι μέσο του $ΑΓ$, άρα $ΚΛ // ΒΓ$ (1).

**β. i.** Στο τρίγωνο $ΑΒΓ$ το $Λ$ είναι μέσο του $ΑΓ$ και το $Μ$ είναι μέσο του $ΒΓ$, άρα $ΛΜ = \frac{ΑΒ}{2}$ (2).

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΔΒ$, είναι $ΔΚ = \frac{ΑΒ}{2}$ (3), επειδή η $ΔΚ$ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσά του.
Από (2) και (3) έχουμε $ΛΜ = ΔΚ$. (4)

**ii.** Επειδή $ΚΛ // ΒΓ$ και οι $ΚΔ$ και $ΜΛ$ δεν είναι παράλληλες, το $ΚΛΜΔ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
Επομένως οι διαγώνιοι του είναι ίσες, δηλαδή $ΚΜ = ΔΛ$. (5)

**γ.** Τα σημεία $Δ$ και $Μ$ δεν ταυτίζονται γιατί αν ταυτίζονταν, τότε το ύψος ΑΔ θα ήταν και διάμεσος, δηλαδή το τρίγωνο ΑΒΓ θα ήταν ισοσκελές με $ΑΒ = ΑΓ$.
Άτοπο, αφού $ΑΒ < ΑΓ$.
Το τραπέζιο ΚΛΜΔ είναι ισοσκελές. Επομένως $ΚΔ = ΜΛ$ (6) και $ΚΜ = ΔΛ$.
Τα τρίγωνα $ΚΔΛ$ και $ΛΜΔ$ έχουν:

- $ΚΔ = ΜΛ$
- $ΚΜ = ΔΛ$
- $ΚΛ$ κοινή πλευρά

Άρα είναι ίσα (ΠΠΠ), οπότε $Κ\hat{Δ}Λ = Κ\hat{Μ}Λ$.
Επομένως το τετράπλευρο $ΚΛΜΔ$ είναι εγγράψιμο γιατί η πλευρά $ΚΛ$ φαίνεται από τις απέναντι κορυφές $Δ$ και $Μ$ υπό ίσες γωνίες.

## 467 Θέμα 4 - 13670

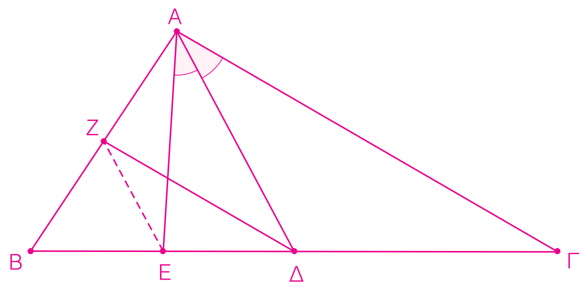
**Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με $ΒΓ = 2ΑΒ$. Έστω Δ το μέσο της πλευράς ΒΓ και Ε το μέσο του τμήματος ΒΔ. Από το σημείο Δ φέρουμε ευθεία παράλληλη προς την ΑΓ, η οποία τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι:**

**α. Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΒΖΔ είναι ίσα.**

**β. Το τετράπλευρο ΖΑΔΕ είναι εγγράψιμο.**

**γ. Η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $Ε\hat{Α}Γ$.**

**Λύση**




**α.** Στο τρίγωνο ΑΒΓ, το τμήμα ΔΖ είναι παράλληλο προς την πλευρά ΑΓ και το Δ είναι μέσο της πλευράς ΒΓ. Επομένως, το Ζ θα είναι μέσο της πλευράς ΑΒ.

Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΔΒΖ έχουν:

- $ΑΒ = ΒΔ$, ως μισά του ΒΓ, αφού $ΒΓ = 2ΑΒ$ (υπόθεση) και $ΒΓ = 2ΒΔ$ (το Δ είναι μέσο του ΒΓ).
- $ΒΕ = ΒΖ$, ως μισά των ίσων τμημάτων ΒΔ και ΑΒ αντίστοιχα.
- $\hat{Β}$ κοινή γωνία.

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ).

**β.** Από την ισότητα των τριγώνων ΑΒΕ και ΒΖΔ προκύπτει ότι $Β\hat{Α}Ε = Β\hat{Ζ}Δ$ (1).

Το τετράπλευρο ΖΑΔΕ είναι εγγράψιμο διότι η πλευρά ΖΕ φαίνεται από τις απέναντι κορυφές Α και Δ υπό τις ίσες γωνίες $Β\hat{Α}Ε$ και $Β\hat{Ζ}Δ$ αντίστοιχα.

**γ.** Το τρίγωνο ΒΑΔ είναι ισοσκελές με $ΑΒ = ΒΔ$, οπότε $Β\hat{Α}Δ = Β\hat{Δ}Α$ (2).

Αφαιρώντας τις (1) και (2) κατά μέλη προκύπτει ότι:

$$Β\hat{Α}Δ - Β\hat{Α}Ε = Β\hat{Δ}Α - Β\hat{Δ}Ζ \Leftrightarrow Ε\hat{Α}Δ = Ζ\hat{Δ}Α$$

Είναι $Ζ\hat{Δ}Α = Δ\hat{Α}Γ$, ως εντός εναλλάξ, οπότε $Ε\hat{Α}Δ = Δ\hat{Α}Γ$, άρα η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $Ε\hat{Α}Γ$.

## 468 Θέμα 4 - 13671

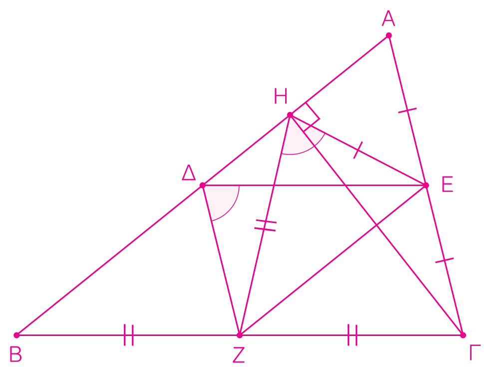
**Σε οξυγώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ\,(\hat{Β} < \hat{Γ})$ θεωρούμε τα μέσα Δ, Ε, Ζ των πλευρών ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ αντίστοιχα. Έστω Η η προβολή της κορυφής Γ πάνω στην πλευρά ΑΒ. Να αποδείξετε ότι:**

**α. $ΗΕ = ΕΓ$ και $ΗΖ = ΖΓ$.**

**β. $Ζ\hat{Δ}Ε = Ζ\hat{Η}Ε$.**

**γ. Το τετράπλευρο ΖΔΗΕ είναι εγγράψιμο.**

**Λύση**




**α.** • Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΗΑΓ $(Γ\hat{Η}Α = 90^\circ)$, η ΗΕ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα ΑΓ, οπότε

$$ΗΕ = ΕΓ = ΕΑ = \frac{ΑΓ}{2}.$$

• Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΗΒΓ $(Γ\hat{Η}Β = 90^\circ)$, η ΗΖ είναι διάμεσος στην υποτείνουσα ΒΓ, οπότε

$$ΗΖ = ΖΓ = ΖΒ = \frac{ΒΓ}{2}.$$

**β.** • Στο τρίγωνο $ΑΒΓ$, τα σημεία $Δ$ και $Ζ$ είναι μέσα των πλευρών $ΑΒ$ και $ΒΓ$ αντίστοιχα.

Επομένως, $ΔΖ // ΑΓ$ και $ΔΖ = \dfrac{ΑΓ}{2} = ΕΓ$.

Άρα, το τετράπλευρο $ΖΔΕΓ$ είναι παραλληλόγραμμο, αφού έχει τις $ΔΖ$ και $ΕΓ$ ίσες και παράλληλες, οπότε

$Ζ\hat{Δ}Ε = Ε\hat{Γ}Ζ \quad (1)$.

Στο ισοσκελές τρίγωνο $ΗΕΓ$ είναι $Γ\hat{Η}Ε = Η\hat{Γ}Ε \quad (2)$, και στο ισοσκελές τρίγωνο $ΗΖΓ$ είναι $Ζ\hat{Η}Γ = Η\hat{Γ}Ζ \quad (3)$.
Προσθέτοντας τις ισότητες $(2)$ και $(3)$ κατά μέλη, έχουμε:

$Ζ\hat{Η}Γ + Γ\hat{Η}Ε = Η\hat{Γ}Ζ + Η\hat{Γ}Ε \Leftrightarrow Ζ\hat{Η}Ε = Ε\hat{Γ}Ζ \quad (4)$.

Από τις $(1)$ και $(4)$ προκύπτει ότι $Ζ\hat{Δ}Ε = Ζ\hat{Η}Ε$.

**γ.** Το τετράπλευρο $ΖΔΗΕ$ είναι εγγράψιμο διότι η πλευρά $ΖΕ$ φαίνεται από τις απέναντι κορυφές $Δ$ και $Η$ υπό τις ίσες γωνίες $Ζ\hat{Δ}Ε$ και $Ζ\hat{Η}Ε$ αντίστοιχα.

## 469 Θέμα 4 - 13840

**Δίνεται κύκλος $(Ο\,,\,R)$ και μία ευθεία $x΄x$ η οποία έχει μοναδικό κοινό σημείο με τον κύκλο το σημείο Α. Θεωρούμε τυχαίο σημείο Μ της ημιευθείας Αx. Αν για κάποιο σημείο Β του κύκλου ισχύει η σχέση $ΜΑ = ΜΒ$, να αποδείξετε ότι:**

**α. το ΜΒ είναι εφαπτόμενο τμήμα του κύκλου $(Ο\,,\,R)$.**

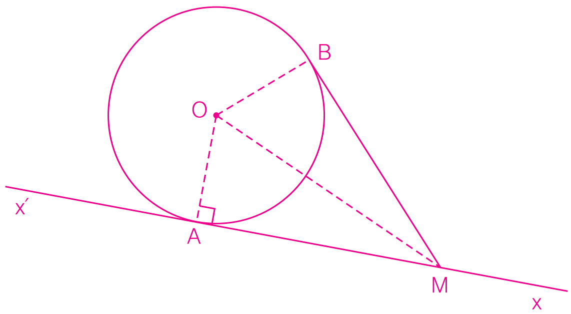
**β. η διχοτόμος της γωνίας ΒΜx είναι κάθετη στη ΜΟ.**

**γ. το τετράπλευρο ΑΟΒΜ είναι εγγράψιμο.**

**δ. το ευθύγραμμο τμήμα ΟΒ τέμνει τη διχοτόμο της γωνίας ΒΜx.**

**Λύση**

**α.** Η ευθεία x'x έχει μοναδικό κοινό σημείο με τον κύκλο το σημείο Α, άρα είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Α, οπότε $ΟΑ \perp ΜΑ$.




Τα τρίγωνα ΜΟΒ και ΜΟΑ έχουν:
- ΜΟ, κοινή πλευρά
- ΟΒ = ΟΑ, ως ακτίνες του κύκλου (Ο, R)
- ΜΒ = ΜΑ

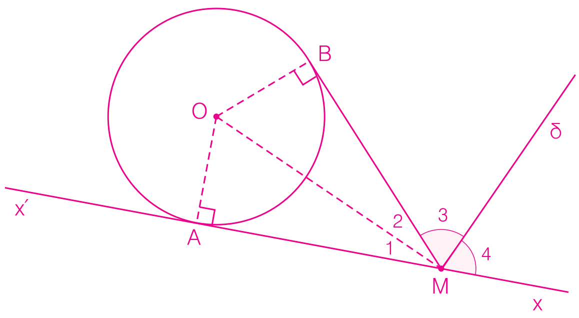
Επομένως, τα τρίγωνα από το κριτήριο ισότητας Π-Π-Π είναι ίσα.

Οπότε $\widehat{Α} = \widehat{Β} \Leftrightarrow \widehat{Β} = 90^{o}$.

Άρα, το ΜΒ είναι εφαπτόμενο τμήμα του κύκλου (Ο, R).

**β.** Έστω Μδ η διχοτόμος της γωνίας $Β\widehat{Μ}x$, οπότε $Μ_3 = Μ_4$.

Τα τμήματα ΜΑ και ΜΒ είναι εφαπτόμενα τμήματα, άρα η ΜΟ είναι διχοτόμος της γωνίας $Α\widehat{Μ}Β$, οπότε $\widehat{Μ}_1 = \widehat{Μ}_2$.




Είναι $Α\widehat{Μ}x = 180^{o} \Leftrightarrow \widehat{Μ}_1 + \widehat{Μ}_2 + \widehat{Μ}_3 + \widehat{Μ}_4 = 180^{o} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\widehat{Μ}_2 + 2\widehat{Μ}_3 = 180^{o} \Leftrightarrow \widehat{Μ}_2 + \widehat{Μ}_3 = 90^{o} \Leftrightarrow Ο\widehat{Μ}δ = 90^{o}$.

Άρα η Μδ είναι κάθετη στη ΜΟ.

**γ.** Στο τετράπλευρο ΑΟΒΜ έχουμε $\widehat{Α} = \widehat{Β} = 90^{o}$, οπότε $\widehat{Α} + \widehat{Β} = 180^{o}$. Επομένως δύο απέναντι γωνίες του τετραπλεύρου είναι παραπληρωματικές, οπότε το ΑΟΒΜ είναι εγγράψιμο.

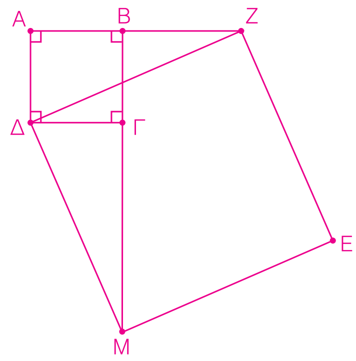
**δ.** Το ευθύγραμμο τμήμα ΟΒ και η διχοτόμος Μδ τέμνονται από το ευθύγραμμο τμήμα ΟΜ. Αρκεί να αποδείξουμε ότι οι εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες που σχηματίζονται έχουν άθροισμα μικρότερο από 180°, οπότε το ΟΒ και η Μδ θα τέμνονται προς το μέρος της τέμνουσας ΟΜ που βρίσκονται οι γωνίες.

Πρέπει να αποδείξουμε ότι $B\widehat{O}M + O\widehat{M}\delta < 180^o$.

Η γωνία $B\widehat{O}M$ είναι οξεία γωνία του ορθογωνίου τριγώνου ΟΒΜ, οπότε $B\widehat{O}M < 90^o$.

Είναι $O\widehat{M}\delta = \widehat{M}_2 + \widehat{M}_3 = 90^o$, οπότε $B\widehat{O}M + O\widehat{M}\delta = B\widehat{O}M + 90^o < 90^o + 90^o$, δηλαδή $B\widehat{O}M + O\widehat{M}\delta < 180^o$.

## 470 Θέμα 4 - 13847




**Δίνεται το τετράγωνο ΑΒΓΔ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΒ προς το Β κατά τμήμα ΒΖ. Επίσης προεκτείνουμε την πλευρά ΒΓ προς το Γ κατά τμήμα $\Gamma M = AZ$. Στη συνέχεια, θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο, ώστε το τετράπλευρο ΔΜΕΖ να είναι παραλληλόγραμμο. Να αποδείξετε ότι:**

**α. τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΓΔΜ είναι ίσα.**

**β. το τετράπλευρο ΔΜΕΖ είναι τετράγωνο.**

**γ. το τετράπλευρο ΒΖΕΜ είναι εγγράψιμο.**

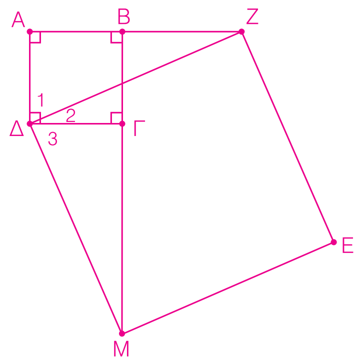
**δ. οι γωνίες ΒΜΖ και ΒΕΖ είναι ίσες.**

**Λύση**

**α.** Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΖ και ΓΔΜ έχουν:

- ΑΔ = ΔΓ, ως πλευρές του τετραγώνου ΑΒΓΔ
- ΑΖ = ΓΜ, από τα δεδομένα

Άρα έχουν μία προς μία ίσες τις κάθετες πλευρές τους, οπότε είναι ίσα.




**β.** Για να είναι το τετράπλευρο ΔΜΕΖ τετράγωνο, γνωρίζοντας ότι είναι παραλληλόγραμμο, αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι ορθογώνιο και ρόμβος. Έχουμε $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{\Delta}_3$ διότι βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΖ και ΓΜ των ίσων τριγώνων ΑΔΖ και ΓΔΜ.

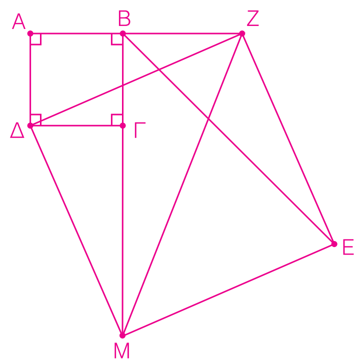
Άρα $M\widehat{\Delta}Z = \widehat{\Delta}_2 + \widehat{\Delta}_3 = \widehat{\Delta}_1 + \widehat{\Delta}_2 = 90^o$, δηλαδή το παραλληλόγραμμο ΔΜΕΖ είναι ορθογώνιο.

Τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΓΔΜ είναι ίσα, οπότε ΔΖ = ΔΜ. Άρα το ορθογώνιο ΔΜΕΖ είναι και ρόμβος, διότι έχει δύο διαδοχικές πλευρές είναι ίσες. Άρα είναι τετράγωνο.

**γ.** Γ ια να είναι το τετράπλευρο ΒΖΕΜ εγγράψιμο αρκεί να αποδείξουμε ότι $Z\widehat{B}M + Z\widehat{E}M = 180^o$.

Είναι $Z\widehat{B}M = 90^o$ και από το τετράγωνο ΔΜΕΖ έχουμε $Z\widehat{E}M = 90^o$.

Άρα $Z\widehat{B}M + Z\widehat{E}M = 90^o + 90^o = 180^o$.




**δ.** Επειδή το τετράπλευρο ΒΖΕΜ είναι εγγράψιμο η πλευρά ΒΖ φαίνεται από τις απέναντι κορυφές του Μ και Ε υπό ίσες γωνίες, δηλαδή $B\widehat{M}Z = B\widehat{E}Z$.