ΛΥΣΕΙΣ

ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΑΛΓΕΒΡΑ

ενημέρωση 6/5/2022

ΕΚΔΟΣΕΙΣ Μπάρλας

1 Θέμα 2 - 15011

α)

i. Όλα τα χαρτονομίσματα είναι 15, οπότε το άθροισμα των x και y είναι 15, δηλαδή σωστή είναι η εξίσωση 1. $y=15-x \Leftrightarrow y+x=15$.

ii. Τα x χαρτονομίσματα των 20 € έχουν αξία $20x$€. Αντίστοιχα τα y χαρτονομίσματα των 50€ έχουν αξία $50y$€. Η συνολική αξία είναι 480€, οπότε σωστή είναι η εξίσωση 4. $20x+50y=480$.

β) Επιλύουμε το σύστημα

$$\begin{cases} y=15-x \\ 20x+50y=480 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=15-x \\ 20x+50(15-x)=480 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=15-x \\ -30x=480-750 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y=15-x \\ x=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=6 \\ x=9. \end{cases}$$

Σύμφωνα με την εκφώνηση $x=9$ είναι τα χαρτονομίσματα των 20€ και $y=6$ τα χαρτονομίσματα των 50€.

2 Θέμα 2 - 15849

α) Στο τραπέζι υπάρχουν 5 παιδιά επιπλέον από τους γονείς, τότε η εξίσωση που προκύπτει είναι $y = x + 5$ (1).

Επίσης, το ποσό που πλήρωσαν οι γονείς είναι $12x$ και το ποσό που πλήρωσαν τα παιδιά είναι $6y$.

Άρα, η ζητούμενη εξίσωση είναι: $12x + 6y = 300$ (2)

Το σύστημα των δύο εξισώσεων είναι το Γ, δηλαδή $\begin{cases} y = x + 5 \\ 12x + 6y = 300 \end{cases}$.

β) Λύνουμε το σύστημα Γ των δύο εξισώσεων (1) και (2) του πρώτου ερωτήματος.

Με αντικατάσταση της (1) στην (2) προκύπτει

$12x + 6(x + 5) = 300 \Leftrightarrow 12x + 6x + 30 = 300 \Leftrightarrow 18x = 270 \Leftrightarrow x = 15$ και το y προκύπτει αν στην (1) αντικαταστήσουμε το x, δηλαδή $y = 15 + 5 = 20$.

Άρα, οι γονείς ήταν 15 και τα παιδιά 20.

3 Θέμα 2 - 14321

α. Το Μ έχει συντεταγμένες τη λύση του συστήματος

$$\begin{cases} 2x+y=6 \\ x-2y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=6-2x \\ x-2(6-2x)=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=6-2x \\ 5x-12=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$$

Άρα $M(2, 2)$.

β. Είναι $3\cdot 2+2=8$, οπότε η (ε_3) διέρχεται από το Μ.

4 Θέμα 2 - 15195

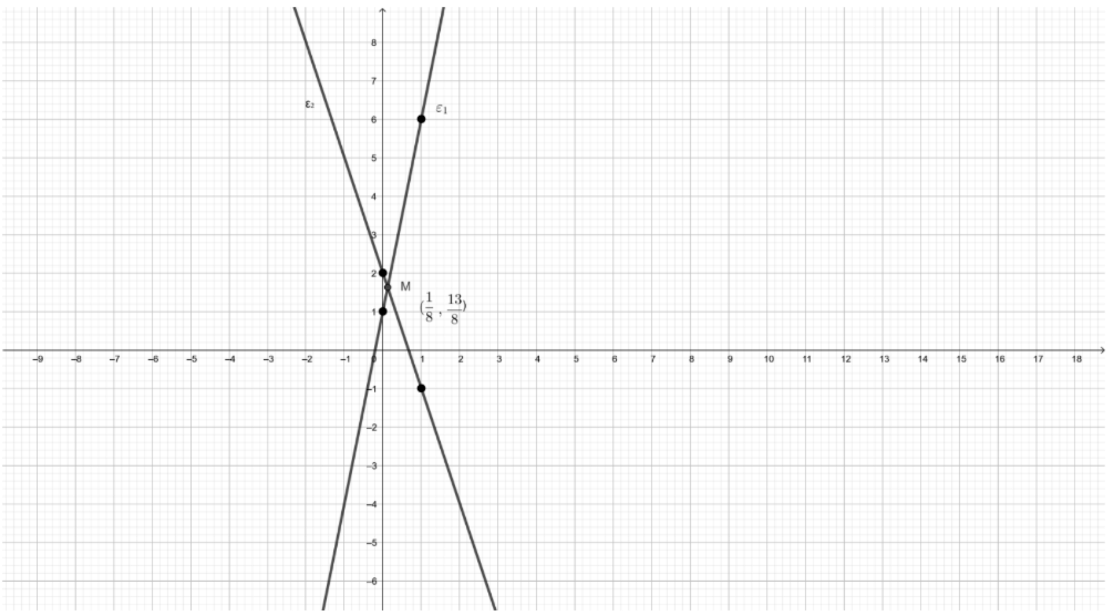
α) Είναι $\begin{cases} 5x-y=-1 \\ 3x+y=2 \end{cases}$. Έχουμε $D=\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=5+3=8\neq 0$, ακόμα $D_x=\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-1+2=1$ και $D_y=\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=10+3=13$, επομένως $x=\frac{D_x}{D}=\frac{1}{8}$ και $y=\frac{D_y}{D}=\frac{13}{8}$, δηλαδή λύση είναι η $(x,y)=\left(\frac{1}{8},\frac{13}{8}\right)$.

β) Για την ευθεία (ε_1): $5x-y=-1$ έχουμε

x	0	1
y	1	6

Για την ευθεία (ε_2): $3x+y=2$ έχουμε

x	0	1
y	2	-1



Οι δύο ευθείες έχουν ένα κοινό σημείο το $\mathrm{M}\left(\frac{1}{8},\frac{13}{8}\right)$ του οποίου οι συντεταγμένες είναι η μοναδική λύση του συστήματος του α) ερωτήματος.

5 Θέμα 2 - 15006

α) Η ορίζουσα του συστήματος είναι:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 5 & -10 \end{vmatrix} = 2(-10) - 5(-4) = -20 + 20 = 0.$$

Άρα, το σύστημα είναι ή αδύνατο ή έχει άπειρο πλήθος λύσεων.

Το σύστημα ισοδύναμα γράφεται:

$$\begin{cases} 2x - 4y = -2 \\ 5x - 10y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - 1 \\ 5x - 10y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 2y - 1 \\ 5(2y - 1) - 10y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - 1 \\ -5 = 3 \end{cases}.$$

Άρα, είναι αδύνατο.

β) Από το ερώτημα α), το σύστημα $\begin{cases} 2x - 4y = -2 \\ 5x - 10y = 3 \end{cases}$ είναι αδύνατο, οπότε συμπεραίνουμε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 δεν έχουν κανένα κοινό σημείο. Άρα, είναι παράλληλες.

6 Θέμα 2 - 15016

α) Το ζεύγος $(0,4)$ επαληθεύει μόνο την εξίσωση $3x+2y=8$ και όχι την εξίσωση $2x-y=3$, οπότε δεν αποτελεί λύση του συστήματος.

β) Από τη δεύτερη εξίσωση του συστήματος έχουμε $2x-y=3 \Leftrightarrow -y=-2x+3 \Leftrightarrow y=2x-3$ και με αντικατάσταση στην εξίσωση $3x+2y=8$ έχουμε:

$3x+2(2x-3)=8 \Leftrightarrow 3x+4x-6=8 \Leftrightarrow 7x=14 \Leftrightarrow x=2$.

Για $x=2$ στην εξίσωση $2x-y=3$ έχουμε $y=1$.

Συνεπώς η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(2,1)$.

γ) Οι συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ είναι η λύση του συστήματος $\begin{cases} 3x+2y=8 \\ 2x-y=3 \end{cases}$, δηλαδή το ζεύγος $(2,1)$.

7 Θέμα 4 - 15117

α) Αν η μία φέτα ζαμπόν κοστίζει x ευρώ, η μία φέτα τυρί y ευρώ και η μία φέτα γαλοπούλα z ευρώ, προκύπτει το παρακάτω σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους:

$$\begin{cases} 2x+4y+0z+0,3=3,8 \\ x+2y+3z+0,3=3,55 \\ 3x+0y+3z+0,3=4,05 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+4y+0z=3,5 \\ x+2y+3z=3,25 \\ 3x+0y+3z=3,75 \end{cases}$$

β) Θα λύσουμε το παραπάνω σύστημα για να βρούμε τις τιμές των x, y και z. Έχουμε:

$$\begin{cases} 2x+4y \quad =3,5 \\ x+2y+3z=3,25 \\ 3x \quad +3z=3,75 \end{cases} \overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2x+4y \quad =3,5 \\ 2x+4y+6z=6,5 \\ 3x \quad +3z=3,75 \end{cases} \overset{\substack{\text{αφαιρούμε} \\ \text{από την(2η)την(1η)}}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 6z=3 \\ 2x+4y \quad =3,5 \\ 3x \quad +3z=3,75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=0,5 \\ 2x+4y \quad =3,5 \\ 3x+3\cdot 0,5=3,75 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} z=0,5 \\ 2x+4y=3,5 \\ 3x+1,5=3,75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=0,5 \\ 2x+4y=3,5 \\ 3x=2,25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=0,5 \\ 2x+4y=3,5 \\ x=0,75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=0,5 \\ 2\cdot 0,75+4y=3,5 \\ x=0,75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=0,5 \\ 1,5+4y=3.5 \\ x=0,75 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} z=0,5 \\ y=0,5 \\ x=0,75 \end{cases}$$

Τελικά, η μία φέτα ζαμπόν κοστίζει $x=0,75$ ευρώ, η μία φέτα τυρί κοστίζει $y=0,5$ ευρώ και η μία φέτα γαλοπούλα κοστίζει $z=0,5$ ευρώ.

γ) Το τέταρτο σάντουιτς κοστίζει $2\cdot 0,75+2\cdot 0,5+1\cdot 0,5+0,3=3,3$ ευρώ. Συνολικά θα πληρώσουν λοιπόν: $3,8+3,55+4,05+3,3=14,7$ ευρώ.

8 Θέμα 4 - 14289

α. Έστω x η ηλικία των δίδυμων κοριτσιών και y η ηλικία του αγοριού. Έχουμε $2x+y=14$ και $xy=24$.

β. Έχουμε το σύστημα $\begin{cases} 2x+y=14 \\ x\,y=24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=14-2x & (1) \\ x(14-2x)=24 & (2) \end{cases}$.

Η $(2) \Leftrightarrow 14x-2x^2=24 \Leftrightarrow 2x^2-14x+24=0 \Leftrightarrow x^2-7x+12=0 \quad (3)$

Η εξίσωση (3) έχει $\Delta=1>0$ και ρίζες τις $x_1=3$, $x_2=4$. Για $x=3$ έχουμε $y=8$ και για $x=4$ είναι $y=6$. Επειδή $2x<y$ έχουμε $x=3$ και $y=8$. Άρα τα δίδυμα κορίτσια είναι 3 ετών και το αγόρι είναι 8 ετών.

9 Θέμα 4 - 15118

α) Έχουμε: $\begin{cases} xy=6 \\ x^2+y^2=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{6}{x} \\ x^2+\left(\dfrac{6}{x}\right)^2=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{6}{x} \\ x^4-13x^2+36=0 \end{cases} \quad (1).$

Θέτουμε $x^2=\omega>0$, οπότε η εξίσωση (1) γίνεται: $\omega^2-13\omega+36=0$ που έχει ρίζες $\omega=4$ και $\omega=9$. Άρα $x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm 2$ και $x^2=9 \Leftrightarrow x=\pm 3$.

Οπότε το σύστημα έχει τέσσερις λύσεις, τις $(2,3),(-2,-3),(3,2)$ και $(-3,-2)$.

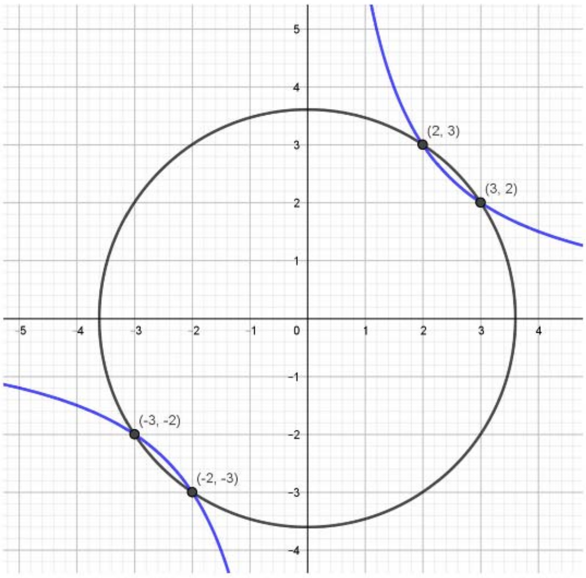
β) Παρατηρούμε ότι:

$|2\cdot 3|=6$ και $2^2+3^2=4+9=13$. Ομοίως $|-2\cdot(-3)|=6$ και $(-2)^2+(-3)^2=4+9=13$, $|3\cdot 2|=6$ και $3^2+2^2=9+4=13$, $|(-3)\cdot(-2)|=6$ και $(-3)^2+(-2)^2=9+4=13$, άρα οι λύσεις του συστήματος (Σ_1) είναι και λύσεις του (Σ_2).

γ)

i. Το (Σ_2) έχει οκτώ λύσεις, τις $(2,3),(-2,-3),(3,2),(-3,-2)$ (που είναι λύσεις και του (Σ_1)) και τις $(-2,3),(-3,2),(3,-2),(2,-3)$.

ii. Όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, η γεωμετρική αναπαράσταση του (Σ_1) είναι το τμήμα της γραφικής αναπαράστασης του (Σ_2) που αποτελείται από τον κύκλο και τους κλάδους της υπερβολής που βρίσκονται στο 1ο και 3ο τεταρτημόριο, όπου είναι σημειωμένα και τα σημεία τομής των δυο γραμμών, οι συντεταγμένες των οποίων είναι οι λύσεις του συστήματος αυτού.



10 Θέμα 2 - 15114

α) Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το $A(1,2)$ και θα μπορούσε να διέρχεται και από το σημείο $B(2,9)$, διότι η f έχει πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, είναι γνησίως αύξουσα και ισχύει $1<2 \Rightarrow f(1)<f(2)$, αφού $f(1)=2$ και $f(2)=9$.

β) Η γραφική παράσταση της f θα μπορούσε να είναι η i. διότι ενώ όλες διέρχονται από το σημείο $(1,2)$, η i. είναι γραφική παράσταση γνησίως αύξουσας συνάρτησης.

11 Θέμα 2 - 15115

α) Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το $\mathrm{A}(-1,3)$ και δεν θα μπορούσε να διέρχεται και από το σημείο $\mathrm{B}(2,5)$, διότι η f έχει πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, είναι όμως γνησίως φθίνουσα και θα έπρεπε να ισχύει $-1<2 \Rightarrow f(-1)>f(2)$. Όμως $f(-1)=3$ και $f(2)=5$.

β) Η γραφική παράσταση της f θα μπορούσε να είναι η ii. διότι ενώ όλες διέρχονται από το σημείο $(-1,3)$, η ii. είναι γραφική παράσταση γνησίως φθίνουσας συνάρτησης.

12 Θέμα 2 - 15645

α) Το αντικείμενο απέχει από το έδαφος $1m$ όταν το σημείο της γραφικής παράστασης έχει τεταγμένη 1, δηλαδή τις χρονικές στιγμές $1\min$ και $5\min$.

β) Σύμφωνα με το σχήμα η μέγιστη απομάκρυνση είναι $2m$. Σε αυτή την θέση το κινητό βρίσκεται τη χρονική στιγμή $t=3\min$.

γ) Σύμφωνα με το σχήμα το αντικείμενο απομακρύνεται από το έδαφος το χρονικό διάστημα $[0,3]$.

13 Θέμα 2 - 15437

α) Πρέπει και αρκεί $2x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}$.

Άρα, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το διάστημα $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$.

β) Από την γραφική παράσταση προκύπτει ότι:

Η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης είναι ίση με 1 και παρουσιάζεται όταν $x = 2$.

γ) Από την γραφική παράσταση προκύπτει ότι η συνάρτηση f:

I. είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$,

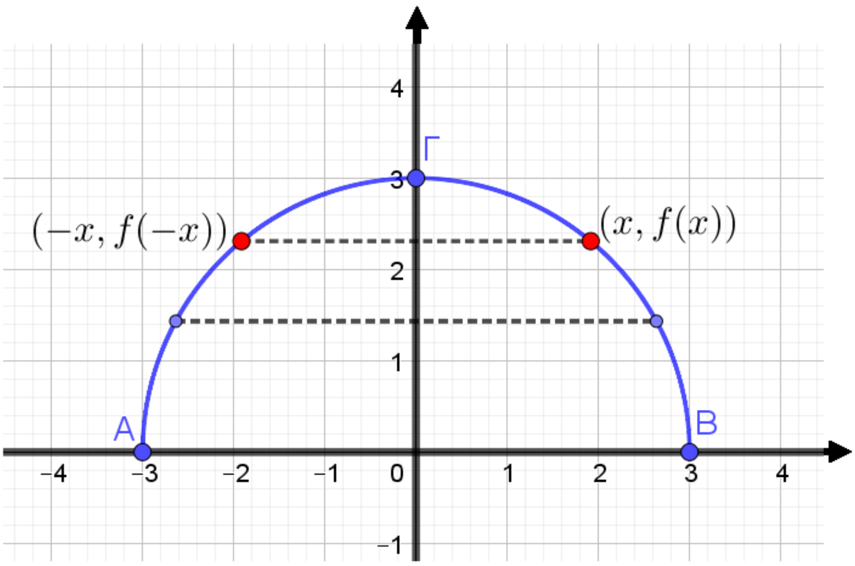
II. είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[2, +\infty)$.

14 Θέμα 2 - 16129

α) Παρατηρούμε ότι όλα τα σημεία της γραφικής παράστασης έχουν τετμημένες x από -3 έως 3. Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το διάστημα $\Delta = [-3, 3]$.

β) Παρατηρούμε ότι η γραφική παράσταση έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$, που σημαίνει ότι τα σημεία $(x, f(x))$ και $(-x, f(-x))$ είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $y'y$. Από το σχήμα έχουμε ότι $f(-x) = f(x)$ για κάθε $x \in \Delta$, άρα η συνάρτηση είναι άρτια.

γ) Παρατηρούμε ότι η τιμή $3 = f(0)$ είναι η μέγιστη τιμή της f και η θέση μεγίστου είναι η $x = 0$. Ακόμα, η ελάχιστη τιμή της f είναι ο αριθμός $0 = f(3) = f(-3)$ και υπάρχουν δύο θέσεις ελαχίστου, οι $x = 3$ και $x = -3$.



15 Θέμα 2 - 15112

α) Η συνάρτηση f είναι περιττή, γιατί η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων $(0,0)$.

β) Η συνάρτηση f για $x \in (-2,-1]$ και $x \in [1,2)$ είναι γνησίως αύξουσα.

γ) Για $x = -1$ η f παίρνει τη μέγιστη τιμή της $f(-1) = 2$ και για $x = 1$ η f παίρνει την ελάχιστη τιμή της $f(1) = -2$.

16 Θέμα 2 - 15024

α) Παρατηρούμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει άξονα συμμετρίας τον yy', που σημαίνει ότι είναι άρτια.

β) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-2,0]$ και στο $[2,4]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[-4,-2]$ και στο $[0,2]$.

γ) Η f παρουσιάζει ελάχιστο το 3 και οι θέσεις ελαχίστου είναι το -2 και το 2.

17 Θέμα 2 - 15019

α) Είναι $f(-1) \neq f(1)$ οπότε η f δεν είναι άρτια.

β) Επίσης $f(-1) \neq -f(1)$ οπότε η f δεν είναι περιττή.

γ) Είναι $f(1) < f(-1)$, που σημαίνει ότι η συνάρτηση f δεν είναι γνησίως αύξουσα, αφού αν ήταν, θα έπρεπε $f(-1) < f(1)$, που δεν ισχύει.

18 Θέμα 2 - 14971

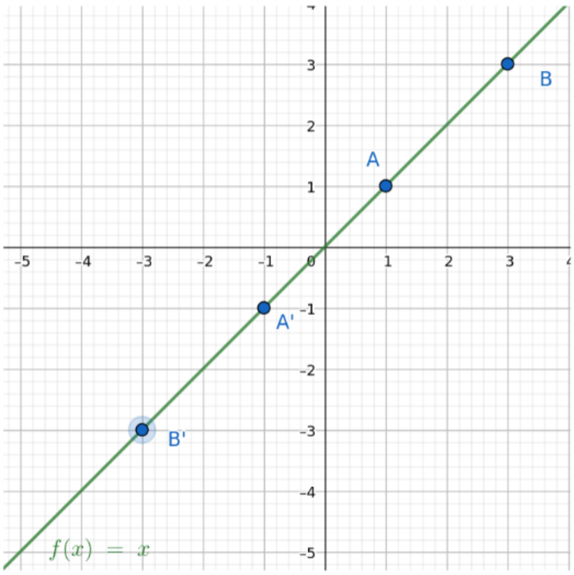
α) Η συνάρτηση δε θα μπορούσε να είναι σταθερή, αφού $f(1)=1\neq 3=f(3)$.

Η συνάρτηση δε θα μπορούσε να είναι γνησίως φθίνουσα, αφού 1<3 ενώ $f(1)=1<3=f(3)$.

β) Εφόσον η συνάρτηση θέλουμε να είναι περιττή και να διέρχεται από τα Α,Β θα διέρχεται και από τα σημεία $A'(-1,-1), B'(-3,-3)$.

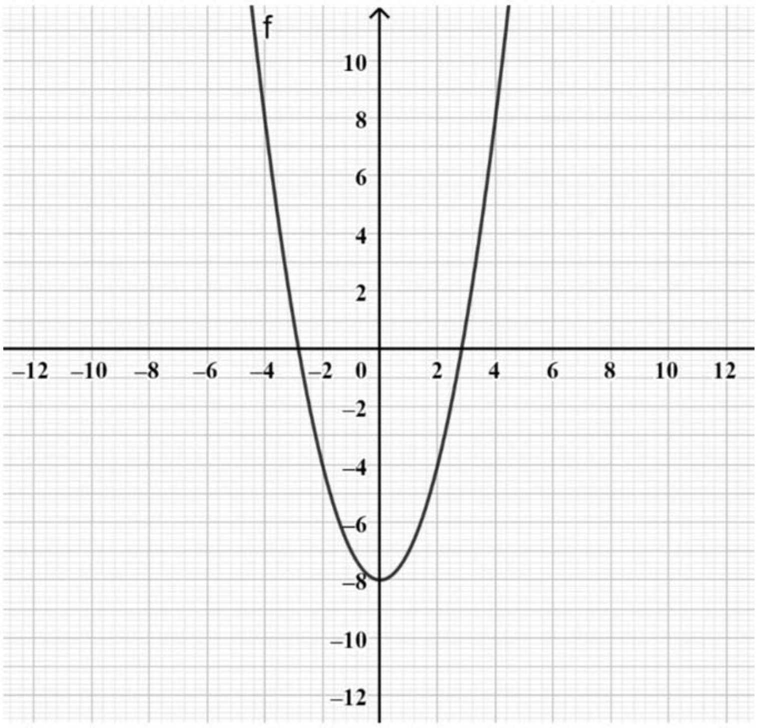
Επίσης, θα είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων.

Μία τέτοια συνάρτηση είναι η $f(x)=x$, της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



19 Θέμα 2 - 15372

α) Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση είναι άρτια για κάθε x∈ℝ επομένως, έχει άξονα συμμετρίας τον y΄y. Το κομμάτι της συνάρτησης που λείπει είναι το συμμετρικό ως προς τον άξονα y΄y. Σύμφωνα με τα παραπάνω προκύπτει η παρακάτω γραφική παράσταση της συνάρτησης f



β)

i. Η συνάρτηση f ορίζεται για κάθε x∈R.

Από τη γραφική παράσταση προκύπτει ότι

- για x∈$(-\infty, 0]$ η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα ενώ
- για x∈$[0, +\infty)$ η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f βλέπουμε ότι έχει ελάχιστη τιμή το -8 για x=0.

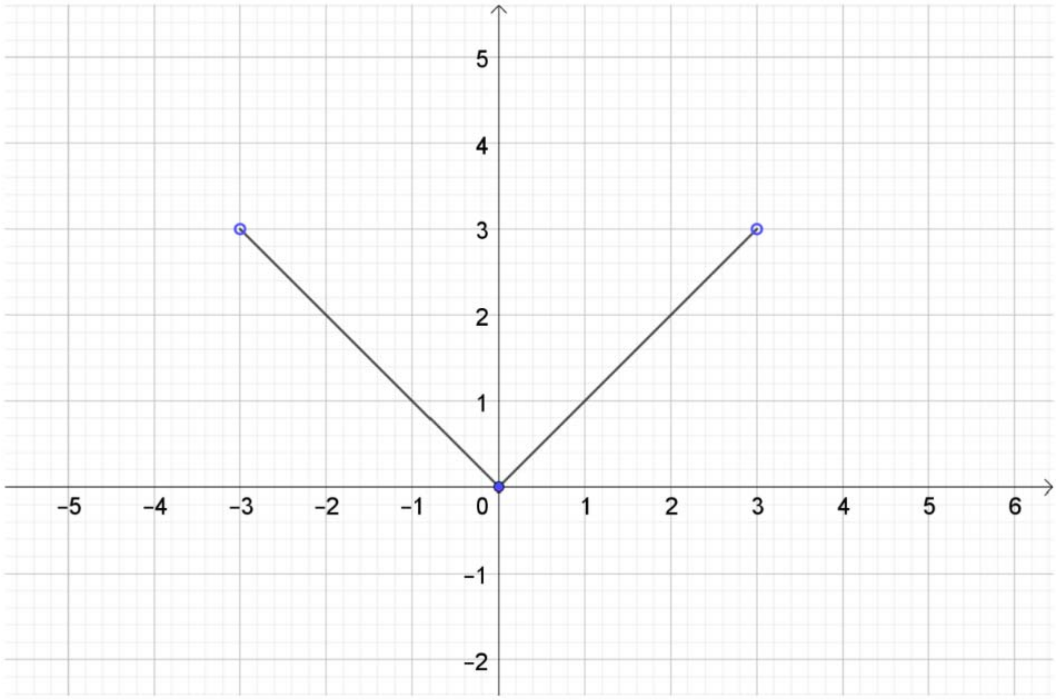
20 Θέμα 2 - 15017

α) Αφού η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $(\alpha, 3)$ είναι άρτια, θα πρέπει για κάθε $x \in (\alpha, 3)$ και $-x \in (\alpha, 3)$. Αυτό ισχύει αν και μόνο αν $\alpha = -3$.

β) Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(2,2)$, οπότε $f(2) = 2$.

Αφού η συνάρτηση f είναι άρτια, θα πρέπει για κάθε $x \in (-3,3)$ να ισχύει $f(-x) = f(x)$. Συνεπώς $f(-2) = f(2) = 2$.

γ) Αφού η συνάρτηση f είναι άρτια η γραφική της παράσταση θα έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα yy'. Η γραφική της παράσταση στο $(-3,3)$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



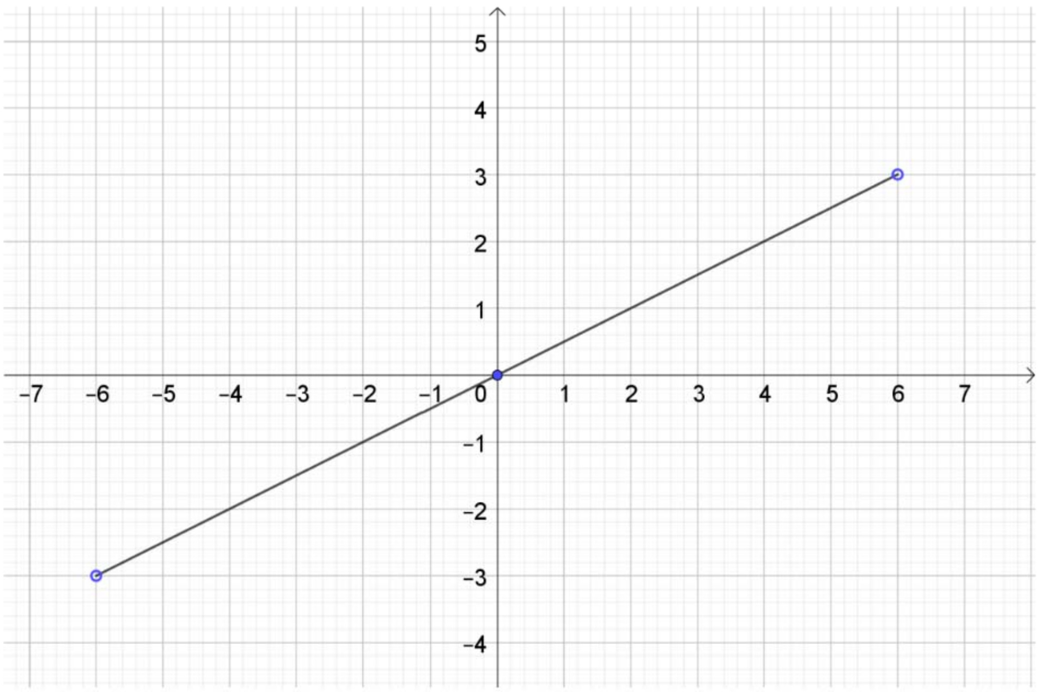
21 Θέμα 2 - 15018

α) Αφού η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $(\alpha,6)$ είναι περιττή, θα πρέπει για κάθε $x\in(\alpha,6)$ και $-x\in(\alpha,6)$. Αυτό ισχύει αν και μόνο αν $\alpha=-6$.

β) Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(4,2)$, οπότε $f(4)=2$.

Αφού η συνάρτηση f είναι περιττή, θα πρέπει για κάθε $x\in(-6,6)$ να ισχύει $f(-x)=-f(x)$. Συνεπώς $f(-4)=-f(4)=-2$.

γ) Αφού η συνάρτηση f είναι περιττή, η γραφική της παράσταση θα έχει κέντρο συμμετρίας το σημείο $O(0,0)$. Η γραφική της παράσταση στο $(-6,6)$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



22 Θέμα 2 - 14976

α) Η C_1 δεν αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης άρτιας ή περιττής, αφού ορίζεται μόνο για θετικούς αριθμούς.

Η C_2 θα μπορούσε να αποτελεί γραφική παράσταση μίας άρτιας συνάρτησης, αφού φαίνεται να έχει γραφική παράσταση συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$.

Η C_3 δεν μπορεί να είναι άρτια ή περιττή συνάρτηση, αφού δεν μπορεί να είναι συμμετρική ούτε ως προς τον άξονα $y'y$, ούτε ως προς την αρχή των αξόνων $O(0,0)$.

Η C_4 θα μπορούσε να αποτελεί γραφική παράσταση μίας περιττής συνάρτησης, αφού φαίνεται να έχει γραφική παράσταση συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων $O(0,0)$.

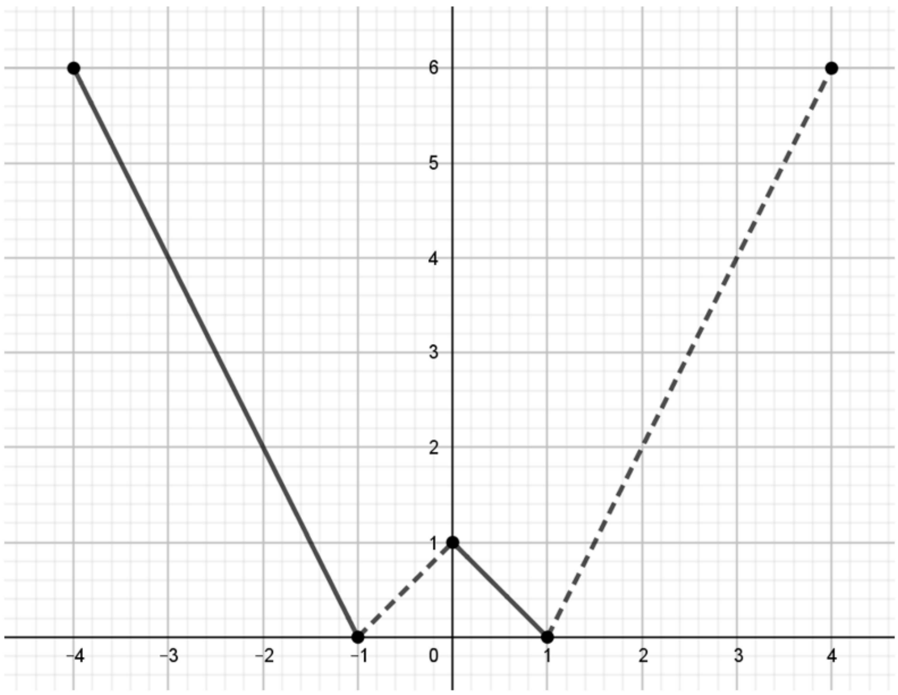
Επομένως, εφόσον δίνεται ότι υπάρχουν μία άρτια και μία περιττή συνάρτηση, συμπεραίνουμε ότι η C_2 είναι η άρτια και C_4 είναι η περιττή.

β) Αν η C_2 είναι άρτια, τότε $f(-2)=f(2)=2$, άρα $k=2$.

Αν η C_4 είναι περιττή, τότε $f(-2)=-f(2)=-2$, άρα $k=-2$.

23 Θέμα 2 - 15116

α) Η συνάρτηση f είναι άρτια, οπότε η γραφική της παράσταση θα είναι συμμετρική ως προς τον $y'y$ άξονα. Στο παρακάτω σχήμα είναι χαραγμένα και τα υπόλοιπα τμήματα με διακεκομμένη γραμμή.



β)

i. Τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα είναι τα $[-4,-1]$ και $[0,1]$, γιατί στα διαστήματα αυτά όσο μεγαλώνουν οι τιμές του x, μικραίνουν οι αντίστοιχες τιμές του y.

ii. Η μέγιστη τιμή της f είναι ίση με 6 και παρουσιάζεται όταν το x πάρει τις τιμές -4 και 4, δηλαδή

$$\max f(x) = f(-4) = f(4) = 6$$

και η ελάχιστη τιμή της f είναι ίση με 0 και παρουσιάζεται όταν το x πάρει τις τιμές -1 και 1, δηλαδή

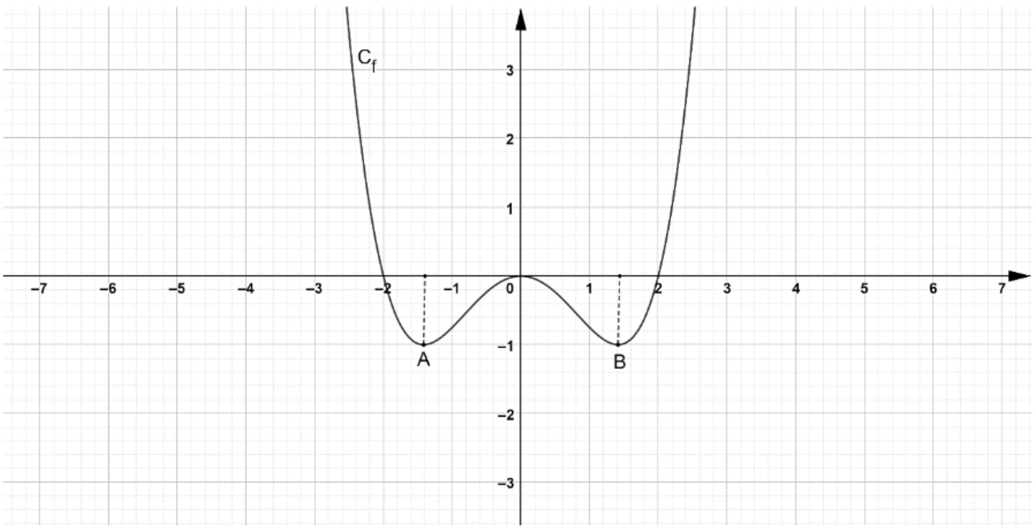
$$\min f(x) = f(-1) = f(1) = 0.$$

24 Θέμα 2 - 15349

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $-x \in \mathbb{R}$ και από το σχήμα παρατηρούμε πως η C_f έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$. Άρα, η συνάρτηση f είναι άρτια.

β) Από τη γραφική παράσταση C_f, η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα για $x \in (-\infty, -\sqrt{2}]$ και $x \in [0, \sqrt{2}]$ ενώ η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα για $x \in [-\sqrt{2}, 0]$ και $x \in [\sqrt{2}, +\infty)$.

γ) Για τις λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0$ αρκεί να βρούμε τις τετμημένες των σημείων που η C_f τέμνει τον άξονα x΄x, δηλαδή τα σημεία που έχουν τεταγμένη ίση με μηδέν. Αυτά είναι $\Gamma(-2,0), O(0,0)$, $\Delta(2,0)$. Άρα οι λύσεις της εξίσωσης είναι $-2, 0, 2$.



25 Θέμα 4 - 15022

α) Αφού $-2<-1$ και f γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[-3,0\right]$ είναι $f(-2)>f(-1)$.

Επίσης f άρτια οπότε $f(-2)=f(2)$. Συνεπώς $f(-1)<f(2)$.

β) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[0,3\right]$, οπότε $f(3)\geq f(x)\geq f(0)$ για κάθε $x\in[0,3]$.

Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[-3,0\right]$, οπότε $f(-3)\geq f(x)\geq f(0)$ για κάθε $x\in[0,3]$.

Επίσης f άρτια οπότε $f(-3)=f(3)$.

Συνεπώς $f(3)\geq f(x)\geq f(0)$ για κάθε $x\in[-3,3]$.

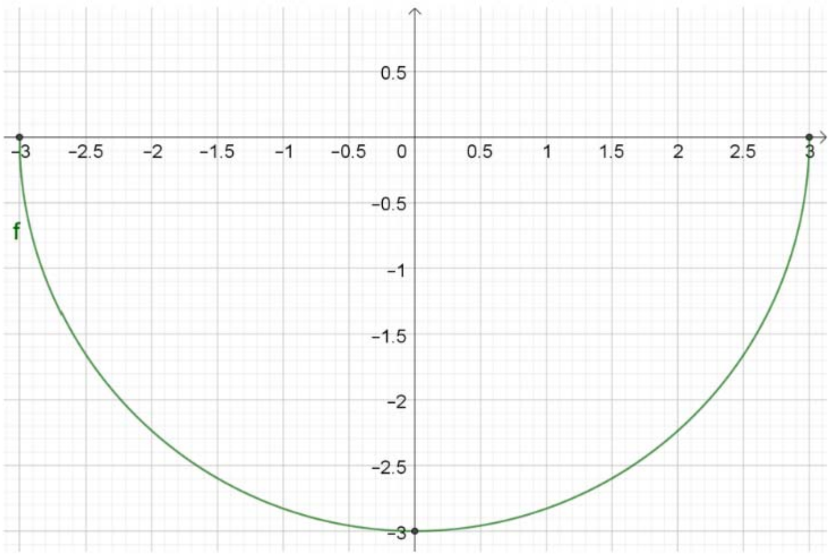
γ) Αφού $f(x)\geq f(0)$ για κάθε $x\in[-3,3]$, συμπεραίνουμε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο 0, που είναι και η μοναδική θέση ελαχίστου, αφού λόγω μονοτονίας $f(x)>f(0)$ για κάθε $x\in[-3,0)\cup(0,3]$.

Αφού $f(x)\leq f(3)$ για κάθε $x\in[-3,3]$, συμπεραίνουμε ότι η f παρουσιάζει μέγιστο στο 3, όπως και στο -3 αφού $f(-3)=f(3)$, που είναι και οι μοναδικές θέσεις μεγίστου, αφού λόγω μονοτονίας $f(x)<f(3)$ για κάθε $x\in(-3,3)$.

δ) Από τους 4 τύπους μόνο ο α. και ο β. έχουν πεδίο ορισμού το $\left[-3,3\right]$.

Επίσης για τον τύπο α. ισχύει $f(0)>f(3)$ οπότε δεν μπορεί να αντιστοιχεί στη συνάρτηση του προβλήματος. Συνεπώς ο σωστός τύπος είναι ο β. $f(x)=-\sqrt{9-x^2}$.

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της $f(x)=-\sqrt{9-x^2}$.



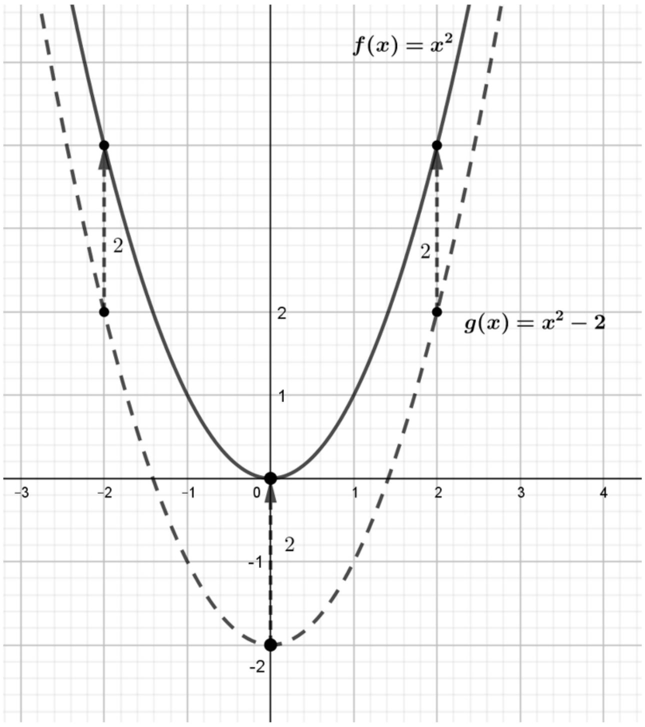
26 Θέμα 2 - 15811

α)

i. Η γραφική παράσταση της g είναι συμμετρική ως προς τον $y'y$ άξονα, άρα η g είναι άρτια.

ii. Η g παρουσιάζει ελάχιστο στη θέση $x_0 = 0$, το $g(0) = -2$, διότι όπως φαίνεται από τη γραφική της παράσταση, $g(x) \geq -2$ και η ισότητα ισχύει για $x = 0$.

β) Η γραφική παράσταση της $f(x) = x^2 = g(x) + 2$ προκύπτει με κατακόρυφη και προς τα πάνω μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $g(x) = x^2 - 2$ κατά 2 μονάδες.

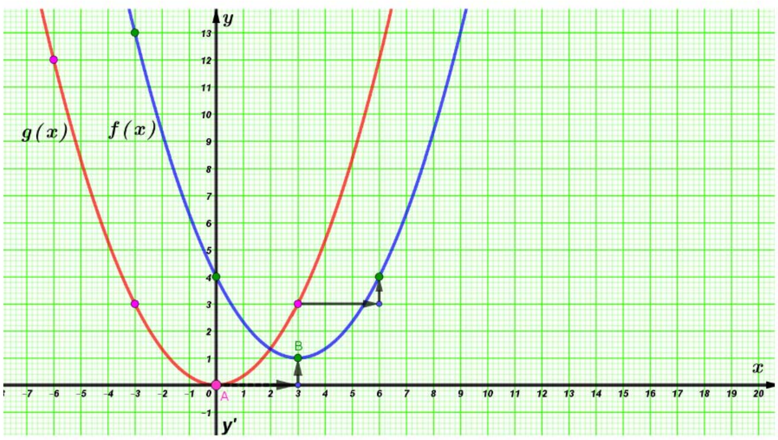


27 Θέμα 2 - 14983

α) Σωστή απάντηση είναι η (ΙΙΙ), με βάση την παράγραφο 2.2.

β) Από το σχήμα διαπιστώνουμε ότι η μικρότερη δυνατή τιμή της συνάρτησης $f(\mathrm{x})$ είναι ο αριθμός 1 και επιτυγχάνεται όταν $\mathrm{x} = 3$.

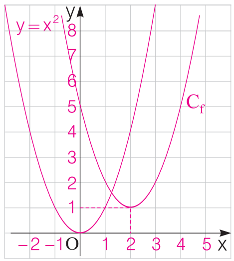
γ) Παρατηρούμε ότι η $f(\mathrm{x})$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 3]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[3, +\infty)$.



28 Θέμα 2 - 14230

α. Έχουμε $f(x)=x^2-4x+5=x^2-4x+4+1=$
$=(x-2)^2+1\ ,\ \ x\in\mathbb{R}$.

β. Η C_f προκύπτει από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=x^2$ αφού τη μετατοπίσουμε οριζόντια κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά και κατακόρυφα κατά 1 μονάδα προς τα πάνω.

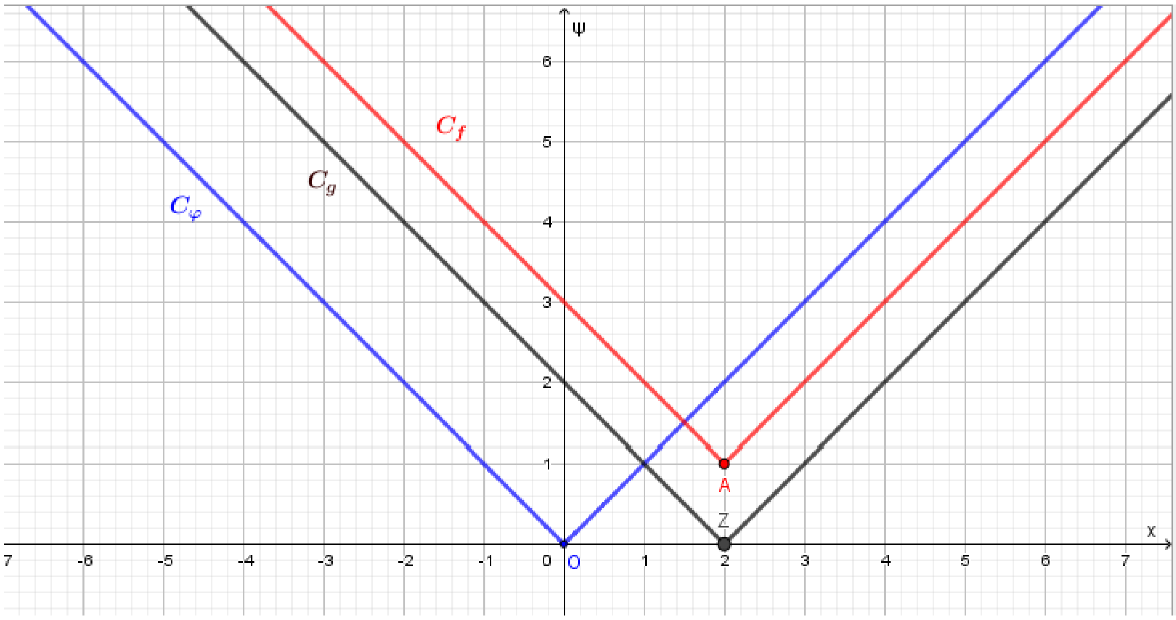


29 Θέμα 2 - 14972

α) Οι γραφικές παραστάσεις των g και f προκύπτουν από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της φ:

- μιας οριζόντιας κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά (για την g) και
- μιας κατακόρυφης κατά 1 μονάδα προς τα πάνω (για την f).

Έτσι προκύπτουν οι γραφικές παραστάσεις



β)

i. Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[2,+\infty)$.

ii. Η συνάρτηση f παρουσιάζει στη θέση $x_0=2$, ολικό ελάχιστο το $f(2)=1$.

30 Θέμα 2 - 14325

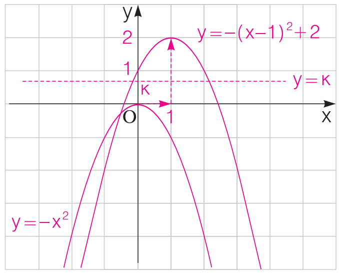
α. • $f\downarrow\ (-\infty\ ,2]\ \ ,f\uparrow[2\ ,+\infty)$

• Η f παρουσιάζει στο 2 ελάχιστο το $f(2)=1$.

β. Η γραφική παράσταση της f προκύπτει από αυτή της g με μετατόπιση 2 μονάδες δεξιά και 1 προς τα πάνω. Άρα $f(x)=g(x-2)+1=|x-2|+1$.

31 Θέμα 4 - 14293

α. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι:



- $f(x) = -x^2 + 2x + 1 = -x^2 + 2x - 1 + 2$
  $= -(x^2 - 2x + 1) + 2 = -(x-1)^2 + 2$
- $f(x) = -(x-1)^2 + 2 = \varphi(x-1) + 2$

Άρα η γραφική παράσταση της f θα προκύπτει από την αντίστοιχη της συνάρτησης φ με οριζόντια μετατόπιση κατά 1 μονάδα δεξιά και κατακόρυφη μετατόπιση κατά 2 μονάδες επάνω.

β. i. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$.

ii. Η f παρουσιάζει για $x = 1$ ολικό μέγιστο, το $f(1) = 2$.

iii. Το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \kappa$, $\kappa < 2$ είναι 2, καθώς η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει πάντα δύο σημεία τομής με την οριζόντια ευθεία $y = \kappa$, αν $\kappa < 2$.

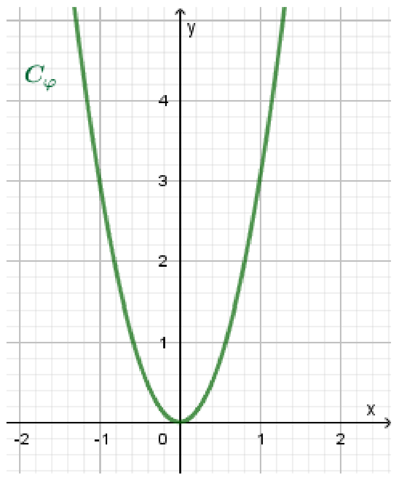
32 Θέμα 4 - 14973

α) Η συνάρτηση φ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, επομένως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ το $-x \in \mathbb{R}$.

Επιπλέον για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $\varphi(-x) = 3(-x)^2 = 3x^2 = \varphi(x)$.

Επομένως είναι άρτια συνάρτηση.

Η γραφική της παράσταση είναι η παρακάτω παραβολή.

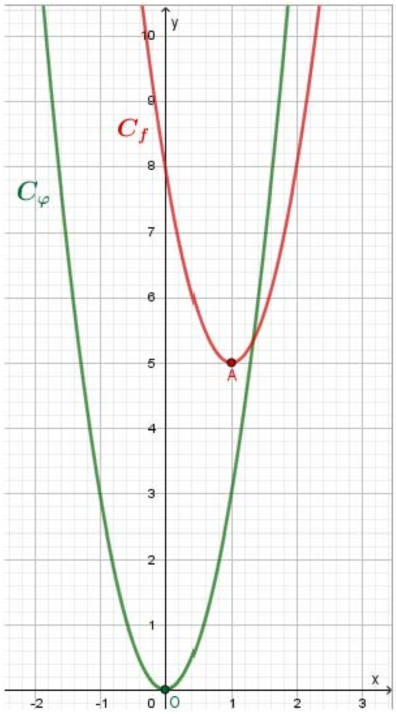


β) Είναι:

$$f(x) = 3x^2 - 6x + 8 = 3\left(x^2 - 2x + \frac{8}{3}\right) = 3\left(x^2 - 2x + 1 + \frac{5}{3}\right) = 3\left[(x-1)^2 + \frac{5}{3}\right]$$

Επομένως $f(x) = 3(x-1)^2 + 5$, $x \in \mathbb{R}$.

Η γραφική παράσταση της f προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της φ, μιας οριζόντιας κατά 1 μονάδα προς τα δεξιά και μιας κατακόρυφης κατά 5 μονάδες προς τα πάνω. Έτσι, είναι:



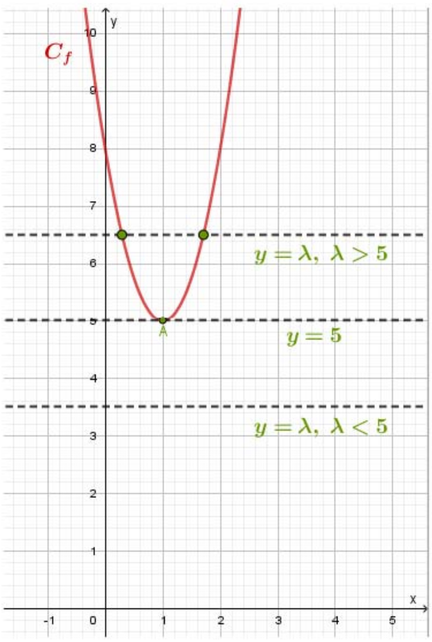
γ) Η κορυφή της παραβολής είναι το σημείο $A(1,5)$. Ως εκ τούτου,

i. Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$. Ο άξονας συμμετρίας της γραφικής παράστασης της f είναι η κατακόρυφη ευθεία που διέρχεται από την κορυφή της, δηλαδή η $x=1$.

ii. Η συνάρτηση f παρουσιάζει στη θέση $x_0=1$, ολικό ελάχιστο το $f(1)=5$.

iii. Είναι:

- Αν $\lambda>5$ η εξίσωση έχει 2 ρίζες
- Αν $\lambda=5$ η εξίσωση έχει 1 ρίζα
- Αν $\lambda<5$ η εξίσωση είναι αδύνατη



33 Θέμα 2 - 15079

α) Το συνημίτονο μιας γωνίας σχεδιασμένης στον τριγωνομετρικό κύκλο είναι η τετμημένη του σημείου τομής της τελικής πλευράς της με τον κύκλο. Επειδή η τετμημένη του σημείου A είναι $0,6=\frac{3}{5}$, έχουμε $\sigma\upsilon\nu\omega=\frac{3}{5}$.

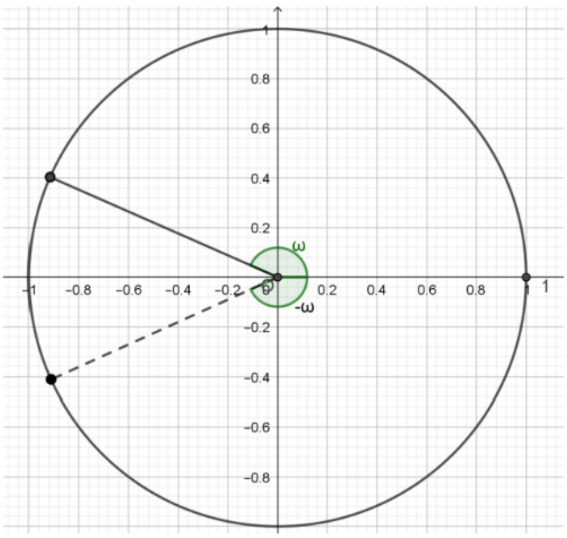
β)

i. Εφόσον η $\mathrm{O\Gamma}$ είναι προέκταση της OA έχουμε $\mathrm{A\hat{O}\Gamma}=\pi\, rad$. Επομένως $\mathrm{B\hat{O}\Gamma}=\hat{\varphi}=\pi+\hat{\omega}$.

ii. Το συνημίτονο της γωνίας $\hat{\varphi}$ είναι η τετμημένη του σημείου Γ, δηλαδή $\sigma\upsilon\nu\varphi=-\frac{3}{5}$.

34 Θέμα 2 - 15191

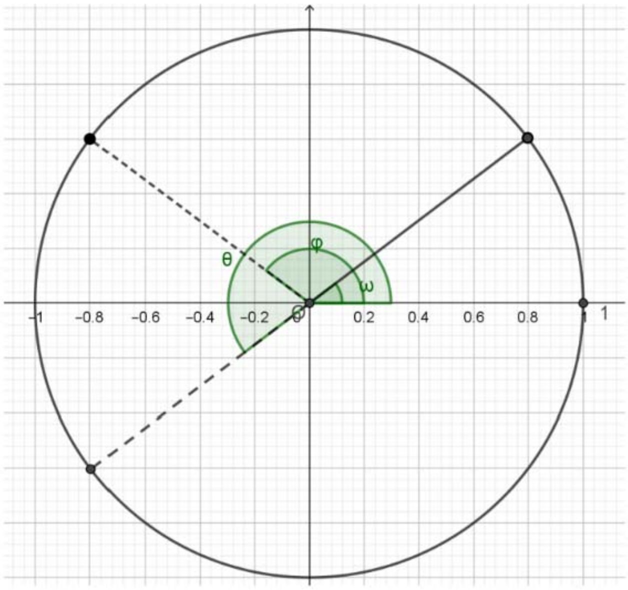
α) Δύο γωνίες σχεδιασμένες στον τριγωνομετρικό κύκλο είναι αντίθετες όταν έχουν τα σημεία τομής της τελικής τους πλευράς με τον τριγωνομετρικό κύκλο συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$. Άρα η γωνία $-\hat{\omega}$ είναι όπως φαίνεται με διακεκομμένη γραμμή στο παρακάτω σχήμα.



β) Το ημίτονο γωνίας σχεδιασμένης στον τριγωνομετρικό κύκλο είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της τελικής πλευράς της γωνίας με το κύκλο, οπότε έχουμε, λόγω συμμετρίας $\eta\mu(-\omega)=-0,4$.

35 Θέμα 2 - 15193

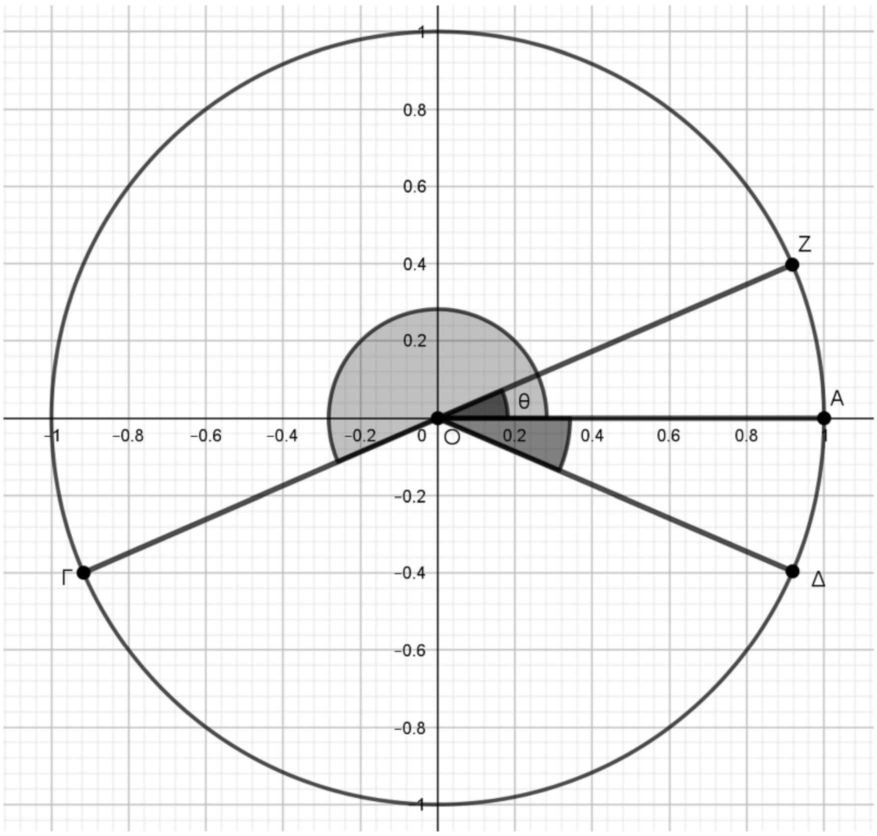
α) Οι γωνίες που έχουν συνημίτονο $-0,8$ έχουν τελική πλευρά στο δεύτερο ή στο τρίτο τεταρτημόριο, η οποία τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο σε σημεία με τετμημένη $-0,8$. Άρα οι ζητούμενες γωνίες $\hat{\varphi}$ και $\hat{\theta}$ είναι όπως φαίνονται στο παρακάτω σχήμα, με την τελική τους πλευρά να είναι με διακεκομμένη γραμμή.



β) Δύο γωνίες σχεδιασμένες στον τριγωνομετρικό κύκλο έχουν αντίθετα συνημίτονα, αν τα σημεία τομής της τελικής τους πλευράς με τον τριγωνομετρικό κύκλο είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $y'y$ ή ως προς την αρχή O των αξόνων. Οπότε οι δύο γωνίες είναι παραπληρωματικές, δηλαδή $\varphi = \pi - \omega$ ή διαφέρουν κατά π, οπότε $\theta = \pi + \omega$.

36 Θέμα 2 - 17933

α) Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο έχουμε $\widehat{AOZ} = \theta$, η τελική πλευρά της $3\pi + \theta$, είναι η $O\Gamma$ και η τελική πλευρά της $4\pi - \theta$ είναι η $O\Delta$.



β)

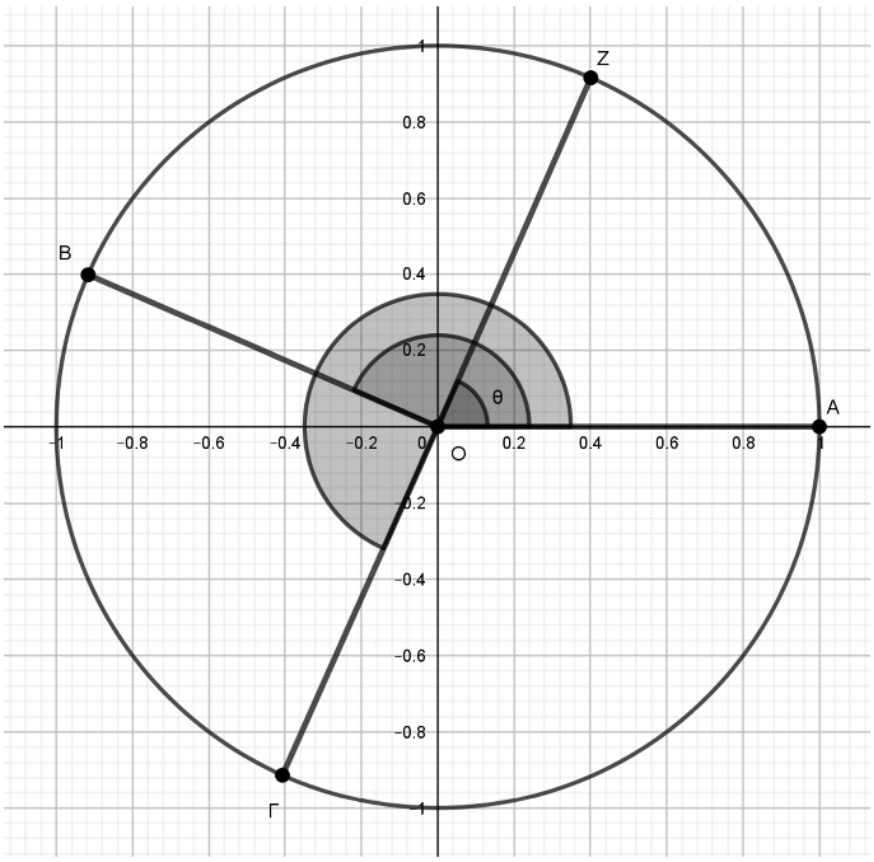
i. Όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα, η τεταγμένη του σημείου Z της τελικής πλευράς της γωνίας θ είναι $0,4$, άρα $\eta\mu\theta = 0,4$.

ii. Από τις συμμετρίες που σχηματίζονται στον τριγωνομετρικό κύκλο, έχουμε:

$\eta\mu(3\pi+\theta) = -0,4$ και $\eta\mu(4\pi-\theta) = -0,4$.

37 Θέμα 2 - 17936

α) Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο έχουμε $\widehat{AOZ} = \theta$, η τελική πλευρά της $3\pi+\theta$, είναι η $O\Gamma$ και η τελική πλευρά της $\frac{\pi}{2}+\theta$ είναι η OB.



β)

i. Όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα, η τετμημένη του σημείου Z της τελικής πλευράς της γωνίας θ είναι $0,4$, άρα $\sigma\upsilon\nu\theta = 0,4$.

ii. Από τις συμμετρίες που σχηματίζονται στον τριγωνομετρικό κύκλο, έχουμε:

$\sigma\upsilon\nu(3\pi+\theta) = -0,4$ και $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = 0,4$.

38 Θέμα 2 - 15046

α) Ο αριθμός Α περιέχεται στο διάστημα $(0, \pi)$ και επειδή ισχύει $\sigma\upsilon\nu A < 0$, έχουμε $\frac{\pi}{2} < A < \pi$.

Άρα το τρίγωνο έχει τη γωνία Α αμβλεία, οπότε είναι αμβλυγώνιο.

β) Από την βασική ταυτότητα $ημ^2Α + συν^2Α = 1$ με $συνΑ = -\frac{3}{5}$, παίρνουμε: $ημ^2Α + \frac{9}{25} = 1$, οπότε

$$ημ^2Α = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

Επιπλέον, αφού $\frac{π}{2} < Α < π$, έχουμε $ημΑ > 0$, οπότε $ημΑ = \frac{4}{5}$.

39 Θέμα 2 - 15185

α) Το συνημίτονο της γωνίας ω είναι όσο και η τετμημένη του σημείου B του τριγωνομετρικού κύκλου. Άρα, $συνω = -\frac{3}{5}$.

β) Ισχύει ότι:

$$ημ^2ω + συν^2ω = 1 \Leftrightarrow ημ^2ω + \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow$$
$$ημ^2ω = 1 - \frac{9}{25} \Leftrightarrow ημ^2ω = \frac{16}{25} \Leftrightarrow$$
$$ημω = \pm\sqrt{\frac{16}{25}} = \pm\frac{4}{5}.$$

Από το σχήμα φαίνεται ότι $\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$ οπότε $ημω > 0$. Άρα, $ημω = \frac{4}{5}$.

40 Θέμα 2 - 15814

α)

i. Στο συγκεκριμένο σχήμα, η γωνία ω είναι επίκεντρη και βαίνει σε τόξο μήκους $12cm$. Δεδομένου ότι το $1rad$ (1 ακτίνιο) είναι η γωνία η οποία, όταν γίνει επίκεντρη, βαίνει σε τόξο μήκους $10\,cm$, η γωνία ω είναι ίση με $\frac{12}{10} = 1,2\,rad$.

ii. Ισχύει ότι $1,2\,rad < \frac{\pi}{2} rad$ (γιατί $1,2 \cdot 2 = 2,4 < \pi$), οπότε η γωνία ω είναι οξεία.

β) Έχουμε:

$$ημ^2ω + συν^2ω = 1 \Leftrightarrow$$
$$ημ^2ω + \left(\frac{9}{25}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow$$
$$ημ^2ω = 1 - \frac{81}{625} \Leftrightarrow$$
$$ημ^2ω = \frac{544}{625} \Leftrightarrow$$
$$ημω = \pm\frac{\sqrt{544}}{25} = \pm\frac{4\sqrt{34}}{25}$$

Και επειδή η γωνία ω είναι οξεία, $ημω = \frac{4\sqrt{34}}{25}$.

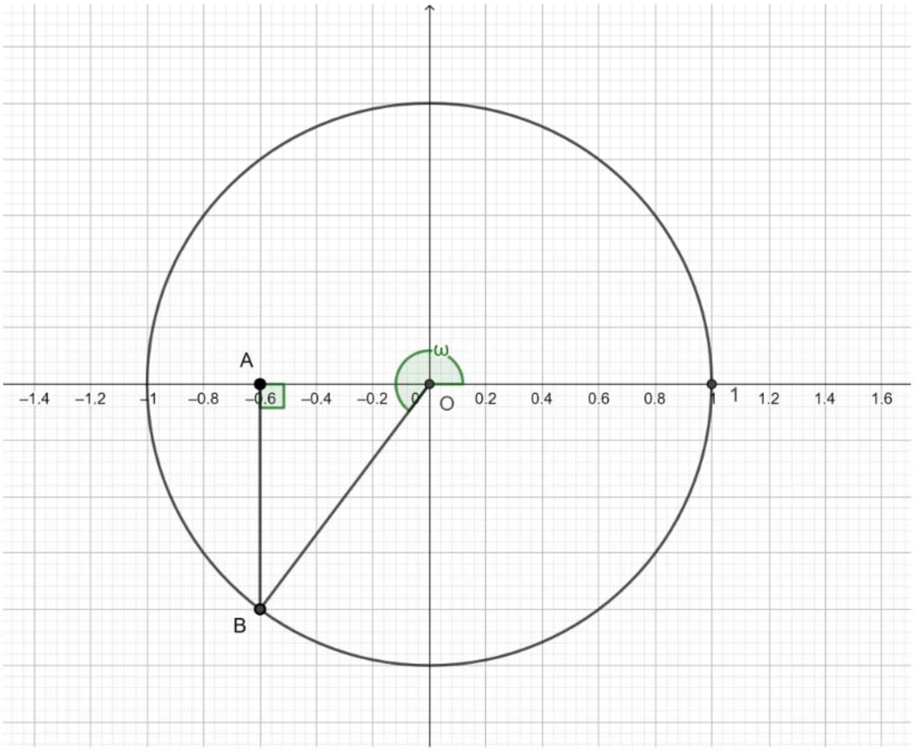
41 Θέμα 2 - 15192

α) Το συνημίτονο μιας γωνίας σχεδιασμένης στον τριγωνομετρικό κύκλο είναι η τετμημένη του σημείου τομής της τελικής πλευράς της με τον κύκλο. Οπότε είναι $\sigma\upsilon\nu\omega = -0,6 = -\frac{3}{5}$.

β)

i. Είναι: $\eta\mu\omega = \pm\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2\omega} = \pm\sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2} = \pm\sqrt{1-\frac{9}{25}} = \pm\frac{4}{5}$, το $\eta\mu\omega = \frac{4}{5}$ απορρίπτεται διότι $\omega \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow \eta\mu\omega < 0$, οπότε $\eta\mu\omega = -\frac{4}{5}$.

Εναλλακτικά, σχεδιάζουμε το ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\triangle}{OAB}\left(\hat{A} = \frac{\pi}{2}\right)$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Από το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$(AB) = \sqrt{1-(OA)^2} = \sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}.$$

Όμως το ημίτονο μιας γωνίας σχεδιασμένης στον τριγωνομετρικό κύκλο είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της τελικής πλευράς της με τον κύκλο. Οπότε είναι $\eta\mu\omega = -\frac{4}{5}$ (1).

ii. Υπολογισμός της $\varepsilon\varphi\omega$:

Είναι: $\varepsilon\varphi\omega = \dfrac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$, οπότε από το α) ερώτημα και τη σχέση (1) έχουμε

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}.$$

42 Θέμα 2 - 15429

α) Ισχύει ότι $476^o = 360^o + 116^o$. Άρα, $\eta\mu 476^o = \eta\mu(360^o + 116^o) = \eta\mu 116^o$.

β) Από τη σχέση $\eta\mu^2 116^o + \sigma\upsilon\nu^2 116^0 = 1$ βρίσκουμε $\sigma\upsilon\nu^2 116^o = 1 - \eta\mu^2 116^o$. Άρα,

$$\sigma\upsilon\nu^2 116 \approx 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^2 = \frac{19}{100}.$$

Είναι $90^o < 116^o < 180^o$. Άρα, $\sigma\upsilon\nu 116^o < 0$. Οπότε,

$$\sigma\upsilon\nu^2 116^o \approx -\sqrt{\frac{19}{100}} = -\frac{\sqrt{19}}{10}.$$

43 Θέμα 2 - 15092

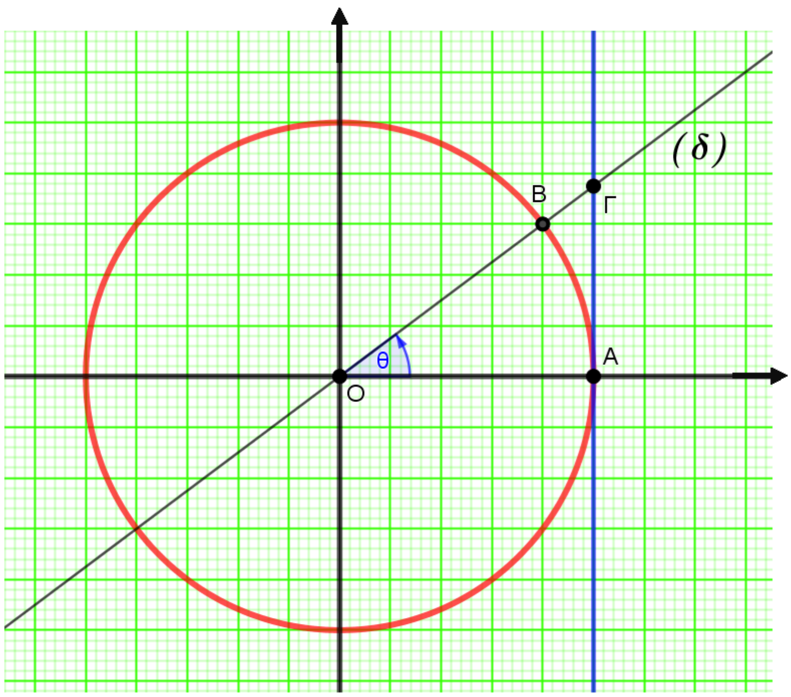
α) Από το σχήμα παρατηρούμε ότι $\sigma\upsilon\nu\theta = 0{,}8 = \frac{4}{5}$.

Εναλλακτικά, από τη βασική τριγωνομετρική ταυτότητα $\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1$ παίρνουμε

$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1$, άρα $\sigma\upsilon\nu^2\theta = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$ και καθώς η γωνία θ βρίσκεται στο 1ο τεταρτημόριο θα είναι $\sigma\upsilon\nu\theta = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$.

Αλλά $\varepsilon\varphi\theta = \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} = \frac{3/5}{4/5} = \frac{3}{4}$.

β) Γνωρίζουμε ότι είναι $B(\sigma\upsilon\nu\theta, \eta\mu\theta)$ και $\Gamma(1, \varepsilon\varphi\theta)$. Έτσι έχουμε $B\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$, $\Gamma\left(1, \frac{3}{4}\right)$.



44 Θέμα 2 - 15652

α) Έχουμε ισοδύναμα

$$\eta\mu^2\varphi+\sigma\upsilon\nu^2\varphi=1 \Leftrightarrow$$
$$\left(\frac{3}{5}\right)^2+\sigma\upsilon\nu^2\varphi=1 \Leftrightarrow$$
$$\sigma\upsilon\nu^2\varphi=1-\frac{9}{25} \Leftrightarrow$$
$$\sigma\upsilon\nu^2\varphi=\frac{16}{25} \Leftrightarrow$$
$$\sigma\upsilon\nu\varphi=\pm\frac{4}{5}.$$

Επειδή η γωνία φ είναι οξεία, έχουμε τελικά $\sigma\upsilon\nu\varphi=\frac{4}{5}$.

β) Όπως φαίνεται από το σχήμα, η γωνία ω είναι παραπληρωματική της γωνίας φ, οπότε $\eta\mu\omega=\eta\mu\varphi=\frac{3}{5}$ και $\sigma\upsilon\nu\omega=-\sigma\upsilon\nu\varphi=-\frac{4}{5}$.

45 Θέμα 2 - 15266

α) Η τελική πλευρά της γωνίας θ είναι η ΟΡ και το σημείο Ρ έχει τετμημένη $x=\frac{3}{5}$. Άρα $\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{3}{5}$.

β) Από την γνωστή ταυτότητα $\sigma\upsilon\nu^2\theta+\eta\mu^2\theta=1$, έχουμε $\frac{9}{25}+\eta\mu^2\theta=1$ απ' όπου προκύπτει ότι $\eta\mu^2\theta=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}$.

Αλλά $0<\theta<\frac{\pi}{2}$, οπότε $\eta\mu\theta>0$, άρα $\eta\mu\theta=\frac{4}{5}$.

γ) Επειδή η ΟΣ είναι συμμετρική της ΟΡ ως προς τον άξονα $x'x$, το σημείο Σ έχει ίδια τετμημένη με το Ρ και αντίθετη τεταγμένη.

Άρα, $\sigma\upsilon\nu(-\theta)=\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{3}{5}$ και $\eta\mu(-\theta)=-\eta\mu\theta=-\frac{4}{5}$

46 Θέμα 2 - 15091

α) Καθώς η συνάρτηση είναι της μορφής $g(x)=\rho\cdot\eta\mu(\omega x)$ με $\rho=\sqrt{2}$, $\omega=1$, θα έχουμε:

i. Η περίοδος της συνάρτησης είναι $T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi$.

ii. Η μέγιστη τιμή της είναι $|\rho|=\sqrt{2}$ και η ελάχιστη τιμή της $-|\rho|=-\sqrt{2}$.

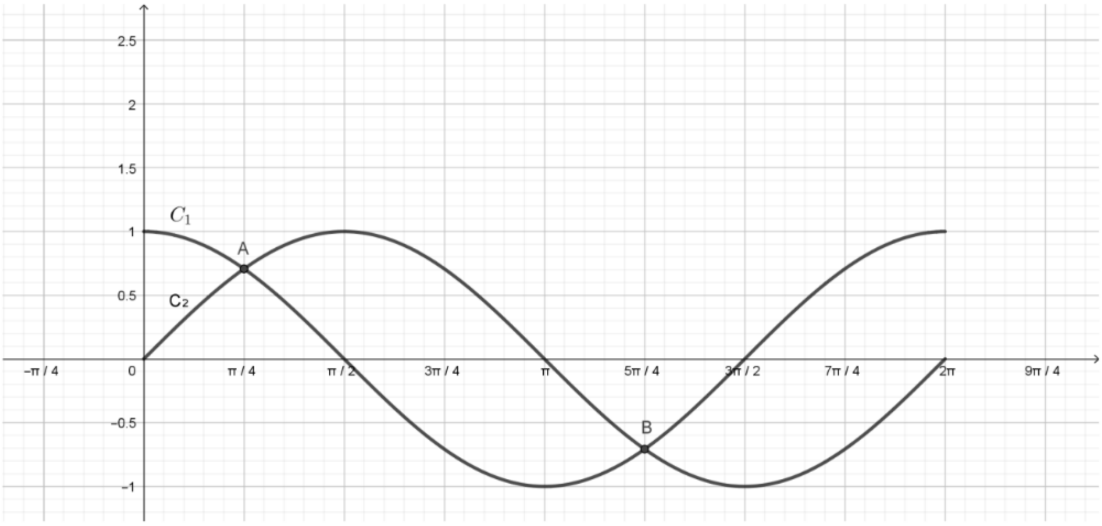
β) $f(2025\pi)=\sqrt{2}\cdot\sigma\upsilon\nu(2\cdot 1012\cdot\pi+\pi)=\sqrt{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\pi=-\sqrt{2}$.

47 Θέμα 2 - 15644

α) Είναι $f(x)=\sigma\upsilon\nu x \overset{x=0}{\Rightarrow} f(0)=\sigma\upsilon\nu 0 \Rightarrow f(0)=1$. Άρα η C_1 είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f. Ακόμα $g(x)=\eta\mu x \overset{x=0}{\Rightarrow} g(0)=\eta\mu 0 \Rightarrow g(0)=0$. Άρα η C_2 είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης g.

β) Οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των δύο συναρτήσεων.

Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων είναι τα A και B, με τετμημένες $x_1=\frac{\pi}{4}$ και $x_2=\frac{5\pi}{4}$.

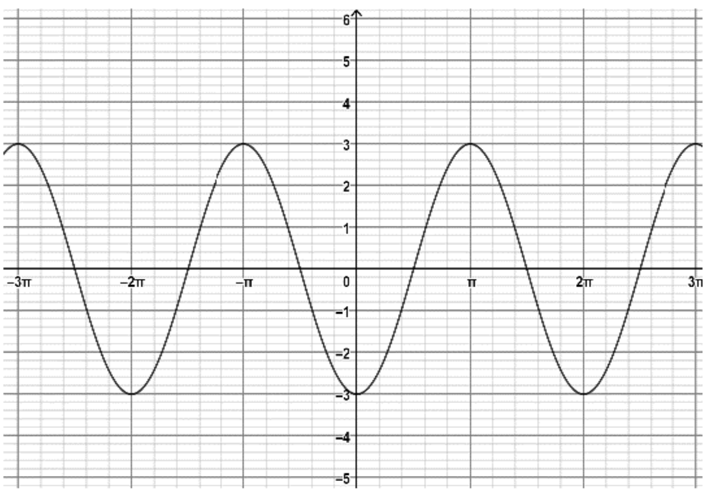


48 Θέμα 2 - 15009

α) Η συνάρτηση είναι της μορφής $f(x)=\rho\sigma\upsilon\nu x, \rho<0$ με ρ=-3 , οπότε η ελάχιστη τιμή της είναι ίση με -3 και η μέγιστη τιμή της είναι ίση με 3.

β) Η συνάρτηση είναι της μορφής $f(x)=\rho\sigma\upsilon\nu x$ με περίοδο $T=\frac{2\pi}{\omega}$ με $\omega=1$ άρα η περίοδος της συνάρτησης f είναι 2π.

γ) Το σχήμα A) είναι η γραφική παράσταση της $f(x)=-3\sigma\upsilon\nu x, x\in\mathbb{R}$, γιατί είναι η μόνη που έχει μέγιστη τιμή 3 για $x=\pi$ και ελάχιστη -3 για $x=0$ και $x=2\pi$.



49 Θέμα 2 - 15172

α) i. Στην παράσταση $\eta\mu(11\pi - x)$ κάνουμε την αναγωγή στο 1ο τεταρτημόριο,

$\eta\mu(11\pi - x) = \eta\mu(10\pi + \pi - x) = \eta\mu(5 \cdot 2\pi + \pi - x) = \eta\mu(\pi - x) = \eta\mu x$, το ζητούμενο.

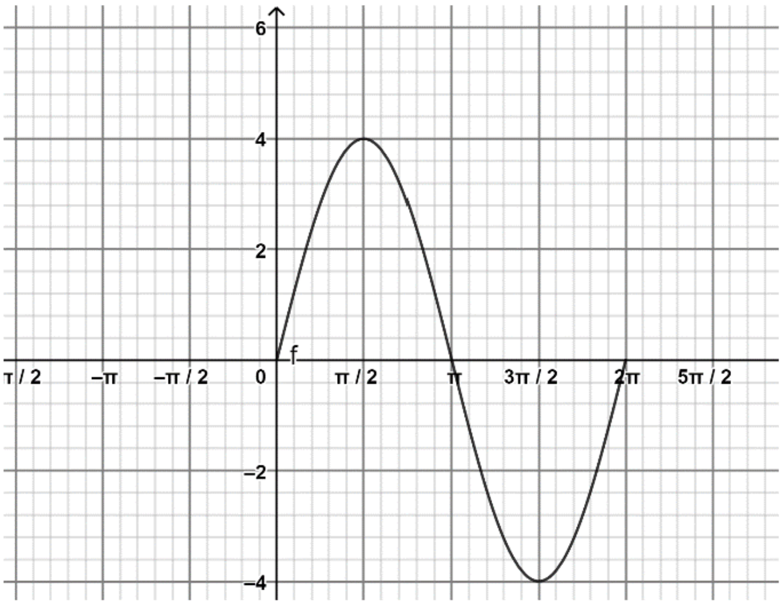
ii. Στον τύπο της συνάρτησης αντικαθιστούμε το $\eta\mu(11\pi - x)$ με ημx, άρα

$$f(x) = 4\eta\mu x.$$

β) Παρατηρούμε πως η $f(x) = 4\eta\mu x$ έχει την μορφή ρημωx με ρ=4 και ω=1. Άρα η συνάρτηση έχει μέγιστη τιμή 4 και ελάχιστη τιμή -4 με περίοδο 2π. Έχοντας τα παραπάνω χαρακτηριστικά και τον παρακάτω πίνακα τιμών στο διάστημα [0,2π],

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
4ημx	0	4	0	-4	0

στο ορθογώνιο σύστημα αξόνων προκύπτει η παρακάτω γραφική παράσταση



50 Θέμα 2 - 15788

α) Το πεδίο ορισμού συνάρτησης σχεδιασμένης σε σύστημα αξόνων είναι η προβολή της γραφικής παράστασης στον άξονα $x'x$. Οπότε είναι $D_g = [\pi, 3\pi]$.

Η μέγιστη τιμή της συνάρτησης g είναι 2 στην θέση $x = \frac{3\pi}{2}$.

β)

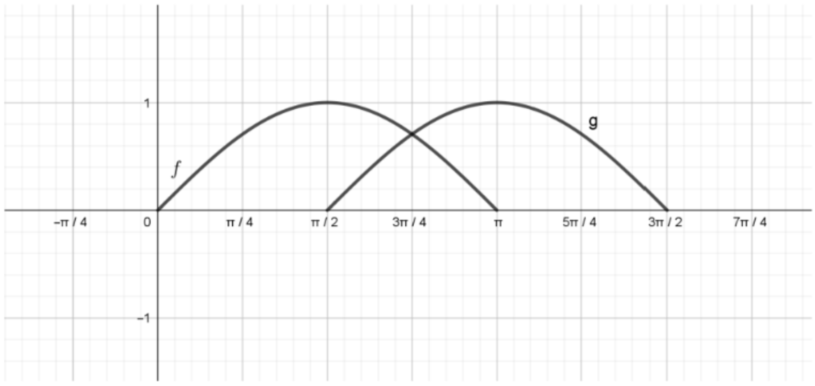
i. Η γραφική παράσταση της g προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της f. Η γραφική παράσταση της f μετατοπίστηκε προς τα «δεξιά» κατά π και προς τα «πάνω» κατά 1.

ii. Έχουμε $g(x) = f(x - \pi) + 1$, δηλαδή $g(x) = \eta\mu(x - \pi) + 1$ με πεδίο ορισμού το διάστημα $[\pi, 3\pi]$.

51 Θέμα 3 - 15789

α)

i. Η συνάρτηση $g(x)=f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ προκύπτει από την f αν μετατοπιστεί προς τα δεξιά κατά $\frac{\pi}{2}$. Οπότε προκύπτει το παρακάτω σχήμα:



ii. Ο τύπος της g είναι $g(x)=f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\eta\mu\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$. Η συνάρτηση ορίζεται για $x\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$, όπως βλέπουμε από το σχήμα.

β) Από το α)ii ερώτημα προκύπτει η εξίσωση

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow \eta\mu x=\eta\mu\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow\begin{cases} x=2\kappa\pi+x-\frac{\pi}{2} \\ x=2\kappa\pi+\pi-x+\frac{\pi}{2}\end{cases},\kappa\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \text{Αδύνατη} \\ 2x=2\kappa\pi+\frac{3\pi}{2},\kappa\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow x=\kappa\pi+\frac{3\pi}{4},\kappa\in\mathbb{Z}$$

Δεκτή λύση είναι για $\kappa=0$, δηλαδή η γωνία $x=\frac{3\pi}{4}$.

Εναλλακτική λύση:

Η λύση της εξίσωσης $f(x)=g(x)$ είναι η τετμημένη του σημείου τομής των γραφικών παραστάσεων. Οπότε, η μοναδική λύση της εξίσωσης είναι $x=\frac{3\pi}{4}$.

52 Θέμα 2 - 15809

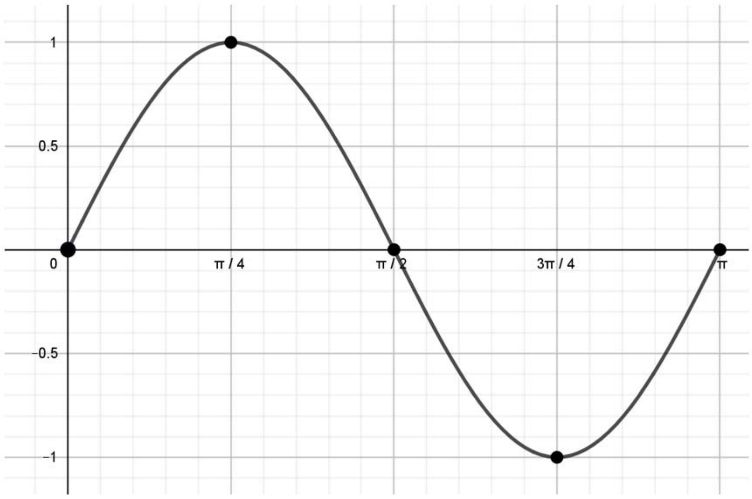
α) Η περίοδος τη συνάρτησης είναι $\mathrm{T}=\frac{2\pi}{2}=\pi$, η μέγιστη τιμή της $\max f(x)=1$ και η ελάχιστη $\min f(x)=-1$.

β)

i. Ο πίνακα τιμών της f συμπληρωμένος είναι:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(x)=\eta\mu 2x$	0	1	0	-1	0

ii. Με βάση τον πίνακα τιμών στο βi) ερώτημα, η γραφική παράσταση της f στο διάστημα $[0,\pi]$, δηλαδή σε διάστημα μιας περιόδου, είναι η παρακάτω:



53 Θέμα 2 - 15810

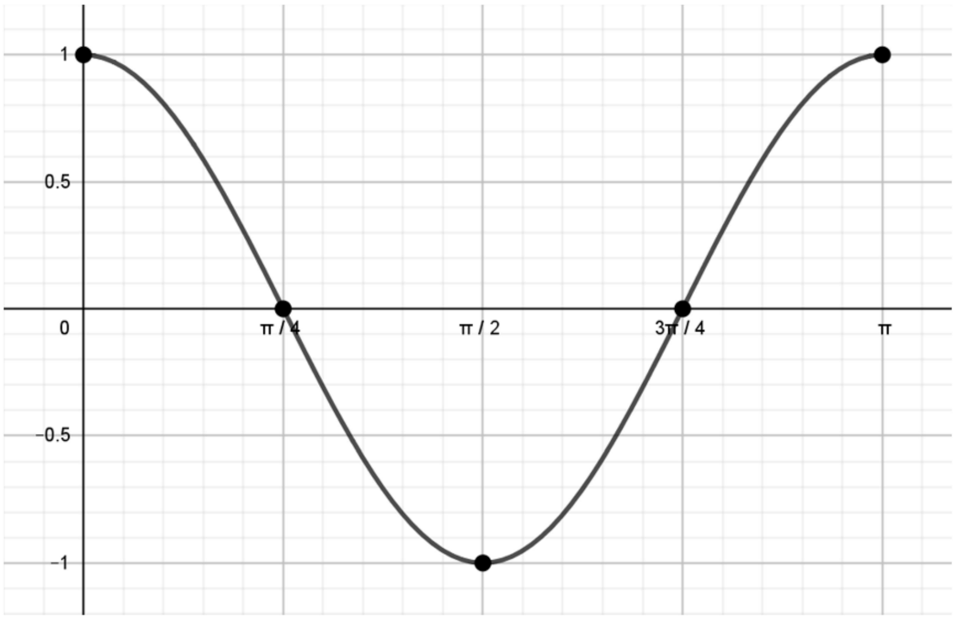
α) Η περίοδος τη συνάρτησης είναι $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$, η μέγιστη τιμή της $\max g(x)=1$ και η ελάχιστη $\min g(x)=-1$.

β)

i. Ο πίνακα τιμών της g συμπληρωμένος είναι:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$g(x)=\sigma\upsilon\nu 2x$	1	0	-1	0	1

ii. Με βάση τον πίνακα τιμών στο βi) ερώτημα, η γραφική παράσταση της g στο διάστημα $[0,\pi]$, δηλαδή σε διάστημα μιας περιόδου, είναι η παρακάτω:



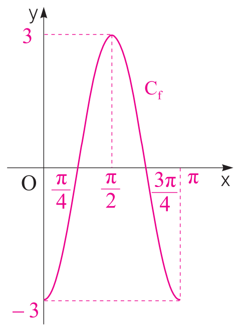
54 Θέμα 2 - 14323

α. • Η f έχει περίοδο $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

• Η f έχει μέγιστη τιμή την $|-3|=3$ και ελάχιστη τιμή την $-|-3|=-3$.

β. Έχουμε τον παρακάτω πίνακα.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
2x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
συν2x	1	0	−1	0	1
f(x) = −3συν2x	−3	0	3	0	−3



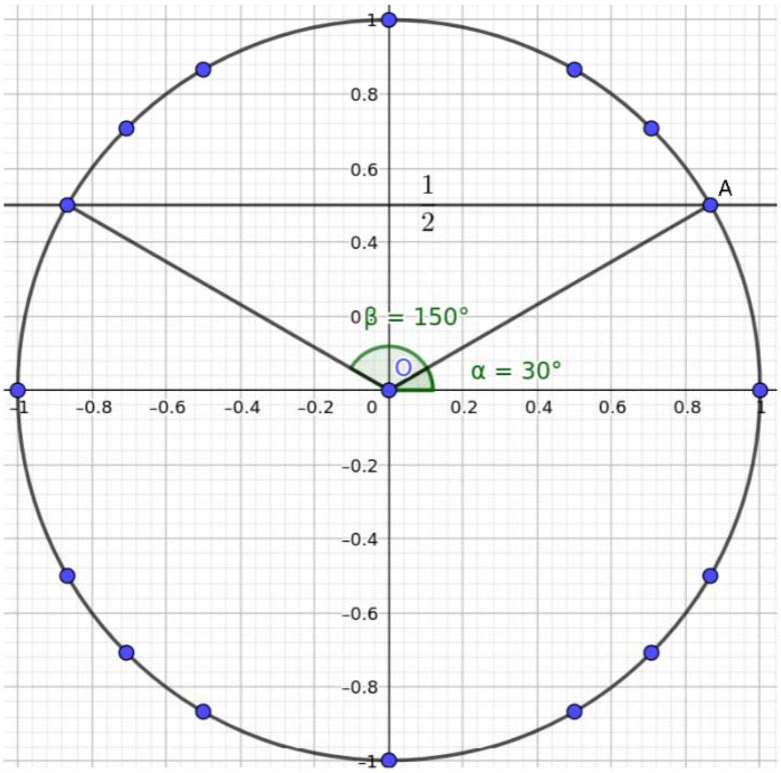
Η γραφική παράσταση της f φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

55 Θέμα 2 - 14977

α) Το ημίτονο μίας γωνίας με μία πλευρά την ημιευθεία Οχ και δεύτερη πλευρά που τέμνει στο σημείο Α του κύκλου, βρίσκεται από την προβολή του σημείου Α στον άξονα y'y.

Άρα, οι γωνίες που έχουν ημίτονο $\frac{1}{2}$ θα έχουν σημεία τομής με τον κύκλο τέτοια, ώστε η προβολή τους να τέμνει τον άξονα y'y στο $\frac{1}{2}$.

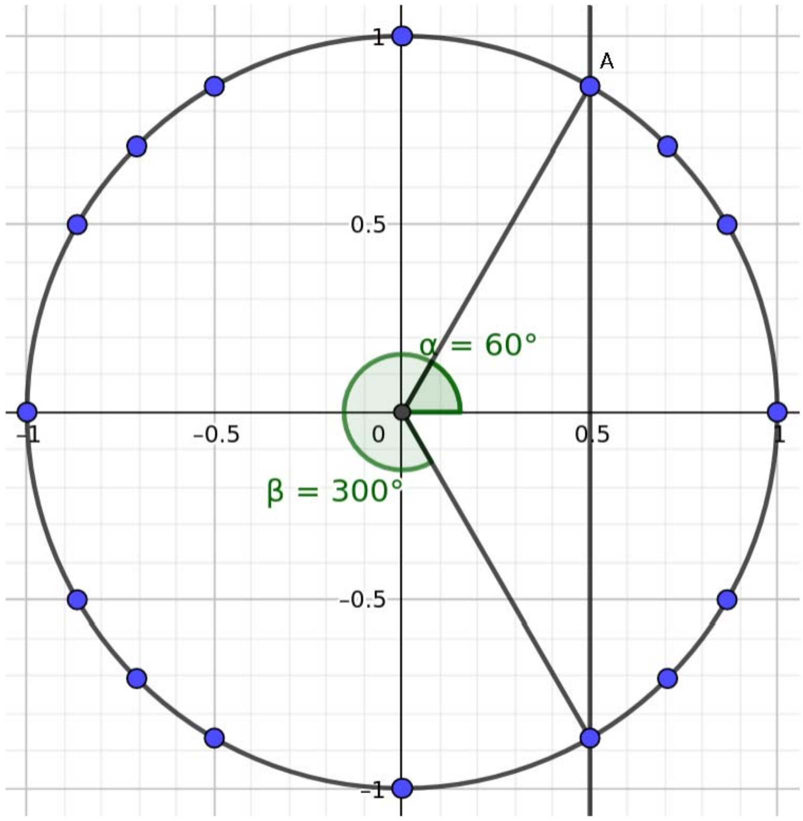
Οπότε φέρουμε την ευθεία $y=\frac{1}{2}$ (βλ. σχήμα παρακάτω) και προκύπτουν δύο γωνίες στο διάστημα [0,2π) που έχουν αυτό το ημίτονο. Είναι οι γωνίες $\alpha=30^o=\frac{\pi}{6}rad$ και $\beta=180^o-30^o=150^o=\frac{5\pi}{6}rad$.



Το συνημίτονο μίας γωνίας με μία πλευρά την ημιευθεία Οχ και δεύτερη πλευρά που τέμνει στο σημείο Α του κύκλου, βρίσκεται από την προβολή του σημείου Α στον άξονα x'x.

Άρα οι γωνίες που έχουν συνημίτονο $\frac{1}{2}$ θα έχουν σημεία τομής με τον κύκλο τέτοια, ώστε η προβολή τους να τέμνει τον άξονα χ΄χ στο $\frac{1}{2}$.

Οπότε φέρουμε την ευθεία $x=\frac{1}{2}$ (βλ. σχήμα παρακάτω) και προκύπτουν δύο γωνίες στο διάστημα [0,2π) που έχουν αυτό το συνημίτονο. Είναι οι γωνίες $\alpha=60^o=\frac{\pi}{3}rad$ και $\beta=360-60=300^o=\frac{5\pi}{3}rad$.



β) Όλες οι γωνίες που έχουν ημίτονο ίσο με $\frac{1}{2}$ στο διάστημα [0,2π) είναι οι α, β του ερωτήματος (α).

Για $x \in \mathbb{R}$ κάθε άλλη γωνία με ημίτονο ίσο με $\frac{1}{2}$ θα προκύπτει από αυτές, προσθέτοντας ή αφαιρώντας ακέραιο πλήθος κύκλων $\kappa \cdot 2\pi$, κ ακέραιος.

Άρα όλες οι λύσεις της εξίσωσης θα είναι:

$$\eta\mu x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = 2\kappa\cdot\pi + \frac{\pi}{6} \text{ ή } x = 2\kappa\cdot\pi + \pi - \frac{\pi}{6} = 2\kappa\cdot\pi + \frac{5\pi}{6} \text{ με } k \in \mathbb{Z}.$$

56 Θέμα 2 - 14324

α. Είναι $\eta\mu x + \eta\mu(\pi - x) = \eta\mu x + \eta\mu x = 2\eta\mu x$.

Οπότε $2\eta\mu x = 1 \Leftrightarrow \eta\mu x = \frac{1}{2}$.

β. Επειδή $\eta\mu x = \frac{1}{2}$, οπότε $x = \frac{\pi}{6}$, αφού $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

57 Θέμα 2 - 15969

α) Είναι: $\sigma\upsilon\nu(13\pi + x) = \sigma\upsilon\nu(6 \cdot 2\pi + \pi + x) = \sigma\upsilon\nu(\pi + x) = -\sigma\upsilon\nu x$.

β) Είναι $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sigma\upsilon\nu x$.

Άρα $f(x) = -2\sigma\upsilon\nu x - 2\sigma\upsilon\nu x = -4\sigma\upsilon\nu x$.

γ) Λύνουμε την εξίσωση $f(x) = -2 \Leftrightarrow -4\sigma\upsilon\nu x = -2 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$ $x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{3}, \kappa \in \mathbb{Z}$.

58 Θέμα 2 - 15036

α)

i. Η συνάρτηση είναι της μορφής $f(x) = \rho\sigma\upsilon\nu\omega x, \rho > 0$ με ρ=3 και $\omega = 2$, οπότε η μέγιστη τιμή της f είναι ίση με 3 και η ελάχιστη τιμή της f είναι ίση με -3.

ii. Η περίοδος της f είναι $T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi$.

β) $f(x) = -3$ αν και μόνο αν 3συν2x=-3⇔ $\sigma\upsilon\nu 2x = -1$ τότε $2x = 2\kappa\pi \pm \pi \Leftrightarrow x = \kappa\pi \pm \frac{\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

59 Θέμα 2 - 14280

α. Η μέγιστη τιμή της f είναι $2+1=3$ και η ελάχιστη τιμή $-2+1=-1$.

β. Είναι $f(x)=3 \Leftrightarrow 2\eta\mu x+1=3 \Leftrightarrow 2\eta\mu x=2 \Leftrightarrow \eta\mu x=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}$, αφού $x \in [0, 2\pi]$.

60 Θέμα 4 - 15050

α) Η συνάρτηση είναι της μορφής $f(x)=\rho\sigma\upsilon\nu x, \rho>0$ με $\rho=2$, οπότε η ελάχιστη τιμή της είναι ίση με -2 και η μέγιστη τιμή της είναι ίση με 2 .

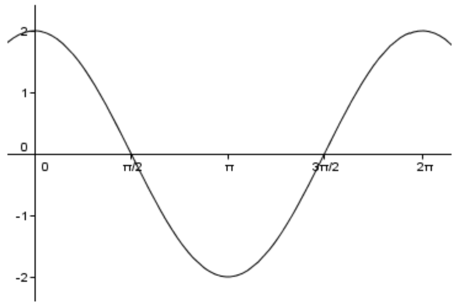
β) Οι τετμημένες των κοινών σημείων της C_f με την ευθεία $y=1$ προκύπτουν από τη λύση της εξίσωσης $f(x)=1$ που είναι ισοδύναμη με την $\sigma\upsilon\nu x=\frac{1}{2}$. Μια προφανής λύση της είναι η $x=\frac{\pi}{3}$ και επειδή οι αντίθετες γωνίες έχουν ίδιο συνημίτονο, μια άλλη λύση είναι η $x=-\frac{\pi}{3}$.

Άρα, δυο κοινά σημεία της C_f με την ευθεία $y=1$ είναι τα $\left(-\frac{\pi}{3},1\right),\left(\frac{\pi}{3},1\right)$.

γ) Οι αριθμοί $\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{5}$ περιέχονται στο πρώτο τεταρτημόριο όπου η συνάρτηση συνημίτονο, είναι γνησίως φθίνουσα. Επιπλέον $\frac{2\pi}{5}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{15}>0$, οπότε $\frac{2\pi}{5}>\frac{\pi}{3}$ και λόγω της μονοτονίας του συνημιτόνου παίρνουμε $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3}\right)>\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, οπότε $2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3}\right)>2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, δηλαδή $f\left(\frac{\pi}{3}\right)>f\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

δ) Με τη βοήθεια του παρακάτω πίνακα προκύπτει η γραφική παράσταση της f όπως φαίνεται στο σχήμα.

x		0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
2συνx		2	0	−2	0	2



61 Θέμα 4 - 15025

α) Για τη γωνία $\theta = \mathrm{A\hat{O}M}$ γνωρίζουμε ότι $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ και $\eta\mu\theta = \frac{4}{5}$. Από τη τριγωνομετρική ταυτότητα $\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1$ έχουμε ότι:

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1 \Leftrightarrow \frac{16}{25} + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1 - \frac{16}{25} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\theta = \frac{9}{25}.$$

Όμως $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ οπότε $\sigma\upsilon\nu\theta < 0$ και επομένως $\sigma\upsilon\nu\theta = -\frac{3}{5}$.

Επίσης $\varepsilon\phi\theta = \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$ και τέλος $\sigma\phi\theta = \frac{1}{\varepsilon\phi\theta} = \frac{1}{-\frac{4}{3}} = -\frac{3}{4}$.

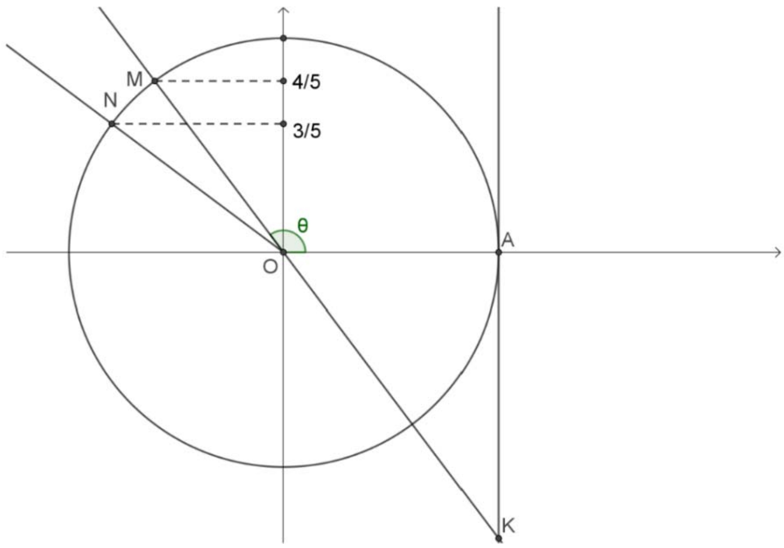
β) Γενικά, για τα σημεία M και K που η τελική πλευρά μιας γωνίας θ τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο και την ευθεία $x = 1$ αντίστοιχα, ισχύει ότι $\mathrm{M}(\sigma\upsilon\nu\theta, \eta\mu\theta)$ και $\mathrm{K}(1, \varepsilon\phi\theta)$. Συνεπώς $\mathrm{M}(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ και $\mathrm{K}(1, -\frac{4}{3})$.

γ)

i. Είναι $\eta\mu\phi = \frac{3}{5} > 0$ και $\sigma\upsilon\nu\phi < 0$, οπότε η τελική πλευρά της γωνίας φ είναι στο 2ο τεταρτημόριο.

ii. Είναι $\frac{3}{5} < \frac{4}{5}$, δηλαδή $\eta\mu\theta > \eta\mu\phi$. Όμως η συνάρτηση $\eta\mu x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\frac{\pi}{2}, \pi]$, οπότε για να είναι $\eta\mu\theta > \eta\mu\phi$ θα πρέπει $\theta < \phi$.

Εναλλακτικά, βρίσκουμε το σημείο Ν του κύκλου με τεταγμένη $\eta\mu\phi = \frac{3}{5}$ και τετμημένη $\sigma\upsilon\nu\phi < 0$ και διαπιστώνουμε το σημείο Ν είναι πιο αριστερά και κάτω από το σημείο Μ δηλαδή $\mathrm{A\hat{O}M} < \mathrm{A\hat{O}N}$ οπότε $\theta < \phi$.

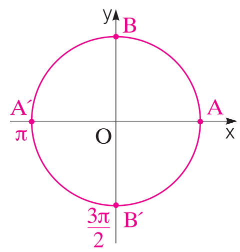


62 Θέμα 4 - 14240

α. Είναι $\begin{cases} x+y=-1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-1 \\ (x+y)^2-2xy=1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-1 \\ (-1)^2-2xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-1 \\ xy=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-1 \\ x=0 \text{ ή } y=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases}$ ή $\begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}$



β. Έχουμε $συνω+ημω=-1$. Έστω $x=συνω$ και $y=συνω$. Είναι $συν^2ω+ημ^2ω=1$, οπότε $\begin{cases} x+y=-1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$. Από το ερώτημα **α.** έχουμε $(συνω=0$ και $ημω=-1)$ ή $(συνω=-1$ και $ημω=0)$

Δηλαδή $ω=\frac{3π}{2}$ ή $ω=π$.

63 Θέμα 4 - 15289

α)

i. Για $\lambda=-1$ το σύστημα γίνεται: $(\Sigma): \begin{cases} -x+2y=1 \\ x-1y=-1 \end{cases} \overset{(+)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} y=0 \\ x=-1 \end{cases}$, οπότε η λύση του συστήματος είναι $(x_0, y_0)=(-1,0)$.

ii. Από το αi) ερώτημα έχουμε $x_0=συνθ=-1$, $y_0=ημθ=0$ και $\theta\in[0,2\pi)$, οπότε $\theta=\pi$.

β) Για $\lambda=1$ το σύστημα γίνεται: $(\Sigma): \begin{cases} -x+2y=1 \\ x+1y=1 \end{cases} \overset{(+)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} y=\frac{2}{3} \\ x=\frac{1}{3} \end{cases}$, οπότε η λύση του συστήματος είναι $(x_1, y_1)=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$.

Δεν υπάρχει γωνία ω, τέτοια ώστε $\sigma\upsilon\nu\omega=\frac{1}{3}$ και $\eta\mu\omega=\frac{2}{3}$, διότι

$$\sigma\upsilon\nu^2\omega+\eta\mu^2\omega=\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{9}+\frac{4}{9}=\frac{5}{9}\neq 1.$$

γ)

i. Αν γνωρίζουμε ότι το σύστημα (Σ) έχει μοναδική λύση την (x_2, y_2) με $x_2=\sigma\upsilon\nu\varphi$ και $y_2=\eta\mu\varphi$, τότε θα ικανοποιεί και την πρώτη εξίσωση, $-x+2y=1$. Δηλαδή:

$$-\sigma\upsilon\nu\varphi+2\eta\mu\varphi=1 \qquad (1).$$

Λύνοντας την εξίσωση (1) έχουμε ισοδύναμα:

$$\begin{aligned}
&-\sigma\upsilon\nu\varphi+2\eta\mu\varphi=1\Leftrightarrow\\
&2\eta\mu\varphi=1+\sigma\upsilon\nu\varphi \overset{\substack{\eta\mu\varphi>0\\ \sigma\upsilon\nu\varphi>0}}{\Leftrightarrow}\\
&4\eta\mu^2\varphi=1+2\sigma\upsilon\nu\varphi+\sigma\upsilon\nu^2\varphi\Leftrightarrow\\
&4\left(1-\sigma\upsilon\nu^2\varphi\right)=1+2\sigma\upsilon\nu\varphi+\sigma\upsilon\nu^2\varphi\Leftrightarrow\\
&5\sigma\upsilon\nu^2\varphi+2\sigma\upsilon\nu\varphi-3=0.
\end{aligned}$$

Η τελευταία είναι εξίσωση πολυωνυμική 2ου βαθμού με $\Delta=64>0$ και ρίζες

$\sigma\upsilon\nu\varphi=-1$, που απορρίπτεται γιατί $\varphi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

και $\sigma\upsilon\nu\varphi=\frac{3}{5}$.

Άρα από την (1) έχουμε:

$$\begin{aligned}
&-\frac{3}{5}+2\eta\mu\varphi=1\Leftrightarrow\\
&2\eta\mu\varphi=\frac{8}{5}\Leftrightarrow\\
&\eta\mu\varphi=\frac{4}{5}.
\end{aligned}$$

ii. Η λύση $(x_2,y_2)=(\sigma\upsilon\nu\varphi,\eta\mu\varphi)=\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$ του συστήματος (Σ) θα ικανοποιεί και την δεύτερη εξίσωσή του, δηλαδή

$$\begin{aligned}
&\frac{3}{5}+\lambda\cdot\frac{4}{5}=\lambda\Leftrightarrow\\
&\frac{3}{5}=\frac{1}{5}\cdot\lambda\Leftrightarrow\\
&\lambda=3.
\end{aligned}$$

64 Θέμα 4 - 15347

α) Είναι: $συν(π - x) = -συνx$ και $ημ\left(\frac{π}{2} + x\right) = ημ\left(\frac{π}{2} - (-x)\right) = συν(-x) = συνx$.

Άρα: $f(x) = 2συν^2(π - x) - 3ημ\left(\frac{π}{2} + x\right) + α = 2συν^2x - 3συνx + α$.

β) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$.

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $-x \in \mathbb{R}$.

Έχουμε: $f(-x) = 2συν^2(-x) - 3συν(-x) + α = 2συν^2x - 3συνx + α = f(x)$.

Άρα η συνάρτηση f είναι άρτια.

γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $M(\frac{π}{3}, 1)$ αν και μόνον

αν $f\left(\frac{π}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow 2συν^2\frac{π}{3} - 3συν\frac{π}{3} + α = 1 \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{1}{4} - 3 \cdot \frac{1}{2} + α = 1 \Leftrightarrow α = 2$.

δ) Με $α = 2$ έχουμε $f(x) = 2συν^2x - 3συνx + 2$.

Για να βρούμε τις τετμημένες των κοινών σημείων των δύο γραφικών παραστάσεων λύνουμε την εξίσωση :

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2συν^2x - 3συνx + 2 = 2ημ^2x + 9συνx - 9 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2συν^2x - 3συνx + 2 = 2(1 - συν^2x) + 9συνx - 9 \Leftrightarrow 4συν^2x - 12συνx + 9 = 0 \Leftrightarrow$$

$(2συνx - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow συνx = \frac{3}{2}$, αδύνατη.

Αφού η παραπάνω εξίσωση είναι αδύνατη, δεν υπάρχουν σημεία τομής των δύο γραφικών παραστάσεων.

65 Θέμα 4 - 15014

α) Για την συνάρτηση $f(x) = α \cdot ημβx$ με $α$ θετικό ακέραιο μέγιστη τιμή είναι το $α$, άρα $α = 2$.

Εναλλακτικά έχουμε ότι η μέγιστη τιμή του $ημβx$ είναι 1, άρα αν $α \cdot ημβx = 2$, πρέπει $α = 2$

β) Η συνάρτηση από το α) ερώτημα είναι $f(x) = 2 \cdot ημβx$, άρα

$$f\left(\frac{π}{16}\right) = 2 \Leftrightarrow 2ημ\frac{βπ}{16} = 2 \Leftrightarrow ημ\frac{βπ}{16} = 1.$$

Λύνουμε την εξίσωση

$ημ\frac{βπ}{16} = 1 \Leftrightarrow ημ\frac{βπ}{16} = ημ\frac{π}{2} \Leftrightarrow \frac{βπ}{16} = 2κπ + \frac{π}{2}$, με $κ \in \mathbb{Z}$ (η λύση $\frac{βπ}{16} = 2κπ + π - \frac{π}{2}$ ταυτίζεται με την προηγούμενη).

Απλοποιώντας το $π$ έχουμε $\frac{β}{16} = 2κ + \frac{1}{2}$, η μικρότερη θετική τιμή του $β$ που ζητάμε θα είναι όταν ο $κ$, ως ακέραιος, γίνει ίσος με 0 (για αρνητικές τιμές του $κ$ το $β$ γίνεται αρνητικό). Οπότε $\frac{β}{16} = 2κ + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{β}{16} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow β = 8$.

γ) Η εξίσωση $f(x)=1$ από τα προηγούμενα ερωτήματα είναι:

$$2\cdot \eta\mu 8x=1 \Leftrightarrow \eta\mu 8x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu 8x=\eta\mu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x=2\kappa\pi+\dfrac{\pi}{6} \\ 8x=2\kappa\pi+\pi-\dfrac{\pi}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\kappa\pi}{4}+\dfrac{\pi}{48} \\ x=\dfrac{\kappa\pi}{4}+\dfrac{5\pi}{48} \end{cases}, \text{ με } \kappa\in\mathbb{Z}$$

Αφού πρέπει $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ λύνουμε τις παρακάτω δύο ανισώσεις:

i) $0\le\frac{\kappa\pi}{4}+\frac{\pi}{48}\le\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow 0\le\left(\frac{\kappa}{4}+\frac{1}{48}\right)\pi\le\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0\le\frac{\kappa}{4}+\frac{1}{48}\le\frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{48}\le\frac{\kappa}{4}\le\frac{1}{2}-\frac{1}{48}\Leftrightarrow$

$-\frac{1}{48}\le\frac{\kappa}{4}\le\frac{23}{48} \Leftrightarrow -\frac{4}{48}\le\kappa\le\frac{4\cdot 23}{48}\Leftrightarrow -\frac{1}{12}\le\kappa\le\frac{23}{12}$.

Αφού $\kappa\in\mathbb{Z}$, είναι $\kappa=0$ ή $\kappa=1$ δηλαδή δεκτές είναι οι γωνίες $x=\frac{\pi}{48}rad$ ή

$x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{48}=\frac{13\pi}{48}rad$.

ii) $0\le\frac{\kappa\pi}{4}+\frac{5\pi}{48}\le\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow 0\le\left(\frac{\kappa}{4}+\frac{5}{48}\right)\pi\le\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0\le\frac{\kappa}{4}+\frac{5}{48}\le\frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{5}{48}\le\frac{\kappa}{4}\le\frac{1}{2}-\frac{5}{48}\Leftrightarrow$

$-\frac{5}{48}\le\frac{\kappa}{4}\le\frac{19}{48} \Leftrightarrow -\frac{4\cdot 5}{48}\le\kappa\le\frac{4\cdot 19}{48}\Leftrightarrow -\frac{5}{12}\le\kappa\le\frac{19}{12}$.

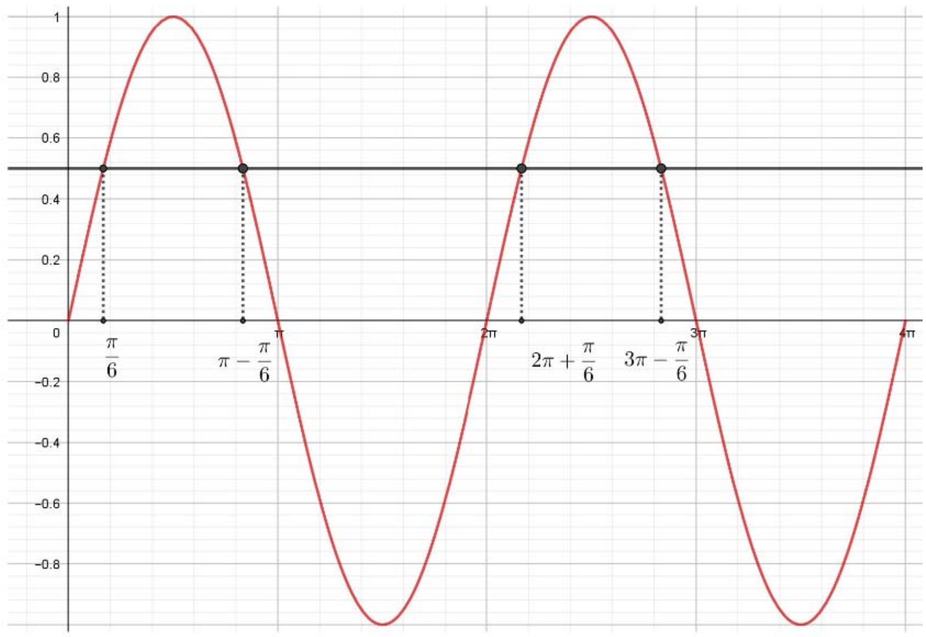
Αφού $\kappa\in\mathbb{Z}$, είναι $\kappa=0$ ή $\kappa=1$ δηλαδή δεκτές είναι οι γωνίες $x=\frac{5\pi}{48}rad$ ή

$x=\frac{\pi}{4}+\frac{5\pi}{48}=\frac{17\pi}{48}rad$.

Εναλλακτικά, όπως στην προηγούμενη λύση, έχουμε $\eta\mu 8x=\frac{1}{2}$. Επειδή $0\le x\le\frac{\pi}{2}$, θα είναι

$0\le 8x\le 4\pi$. Οι αριθμοί των οποίων το ημίτονο είναι ίσο με $\frac{1}{2}$ στο διάστημα αυτό είναι οι:

$\frac{\pi}{6}, \pi-\frac{\pi}{6}, 2\pi+\frac{\pi}{6}, 3\pi-\frac{\pi}{6}$, όπως προκύπτει από την παρακάτω γραφική παράσταση της συνάρτησης $\eta\mu\omega$.



Άρα:

$$8x=\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{48}$$
$$8x=\pi-\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow x=\frac{5\pi}{48}$$
$$8x=2\pi+\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow x=\frac{13\pi}{48}$$
$$8x=3\pi-\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow x=\frac{17\pi}{48}.$$

66 Θέμα 4 - 15049

α) Επειδή $ημ\left(\frac{π}{2}-x\right)=συνx$ και $ημ(π+x)=-ημx$, έχουμε: $f(x)=συνx-ημx, x\in\mathbb{R}$.

β) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$, έχουμε:

$$-1\le συνx\le 1,\ (1)\ \text{ και }\ -1\le ημx\le 1\Leftrightarrow -1\le -ημx\le 1,\ (2)$$

Με πρόσθεση των (1) και (2) προκύπτει ότι: $-2\le συνx-ημx\le 2$, δηλαδή $-2\le f(x)\le 2$, που είναι το ζητούμενο.

Αν υποθέσουμε ότι ο αριθμός 2 είναι η μέγιστη τιμή της f, τότε για κάποιο $x_o\in\mathbb{R}$ ισχύει $συνx_o=1$ και $ημx_o=-1$, οπότε $ημ^2x_o+συν^2x_o=1+1=2$, που είναι άτοπο. Άρα ο αριθμός 2 δεν είναι η μέγιστη τιμή της f.

γ) i. Με $x=0$ έχουμε: $f(0)=συν0-ημ0=1-0=1$, οπότε η C_f τέμνει τον άξονα y′y στο σημείο $(0,1)$.

ii. Με $y=0$ δηλαδή $f(x)=0$ έχουμε: $συνx-ημx=0 \Leftrightarrow συνx=ημx$. Μια προφανής λύση της εξίσωσης είναι ο αριθμός $\frac{π}{4}$ και επειδή $συν\left(π+\frac{π}{4}\right)=-συν\frac{π}{4}=-ημ\frac{π}{4}=ημ\left(π+\frac{π}{4}\right)$, μια άλλη λύση της είναι ο αριθμός $π+\frac{π}{4}=\frac{5π}{4}$.

Άρα δυο κοινά σημεία της C_f με τον $x'x$ είναι τα $\left(\frac{π}{4},0\right)$και $\left(\frac{5π}{4},0\right)$.

67 Θέμα 4 - 15026

α) Η περίοδος της συνάρτησης f είναι $T=\dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$.

β) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι

$-1\le \eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)\le 1$ οπότε $-2\le 2\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)\le 2$ οπότε $-2+1\le 1+2\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)\le 2+1$ και τελικά $-1\le f(x)\le 3$.

Επίσης $f(1)=1+2\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\right)=3$ και $f(3)=1+2\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-1$.

Συνεπώς η μέγιστη τιμή της f είναι το 3 και η ελάχιστη το -1.

γ) Οι τετμημένες των σημείων στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα xx' είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=0$. Είναι

$$f(x)=0\Leftrightarrow 1+2\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)=0\Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)=\eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{matrix}\frac{\pi x}{2}=2\kappa\pi+\left(-\frac{\pi}{6}\right)\\ \eta'\\ \frac{\pi x}{2}=2\kappa\pi+\pi-\left(-\frac{\pi}{6}\right)\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}\frac{\pi x}{2}=2\kappa\pi-\frac{\pi}{6}\\ \eta'\\ \frac{\pi x}{2}=2\kappa\pi+\frac{7\pi}{6}\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}\frac{x}{2}=2\kappa-\frac{1}{6}\\ \eta'\\ \frac{x}{2}=2\kappa+\frac{7}{6}\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}x=4\kappa-\frac{1}{3}\\ \eta'\\ x=4\kappa+\frac{7}{3}\end{matrix}\right\},\quad \kappa\in\mathbb{Z}$$

οπότε οι ζητούμενες τετμημένες είναι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί της μορφής $x=4\kappa-\frac{1}{3}$ ή $x=4\kappa+\frac{7}{3}$, όπου $\kappa\in\mathbb{Z}$.

δ) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι

$f(1-x)=1+2\eta\mu\left(\frac{\pi(1-x)}{2}\right)=1+2\eta\mu\left(\frac{\pi-\pi x}{2}\right)=1+2\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{2}\right)=1+2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi x}{2}\right)$, οπότε

$$\left(f(x)-1\right)^2+\left(f(1-x)-1\right)^2=\left(1+2\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)-1\right)^2+\left(1+2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi x}{2}\right)-1\right)^2=$$

$$4\eta\mu^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)+4\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)=4(\eta\mu^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)+\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi x}{2}\right))=4\cdot 1=4$$

δηλαδή $\left(f(x)-1\right)^2+\left(f(1-x)-1\right)^2=4$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

68 Θέμα 4 - 15992

α) Το ρ καθορίζει τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης f, που είναι ίση με ρ και την ελάχιστη τιμή της, που είναι ίση με $-\rho$. Άρα $\rho = 2$.

Το ω καθορίζει την περίοδο της συνάρτησης g, που είναι ίση με $\frac{2\pi}{\omega}$.

Άρα $\frac{2\pi}{\omega} = \pi \Leftrightarrow \omega = 2$.

β)

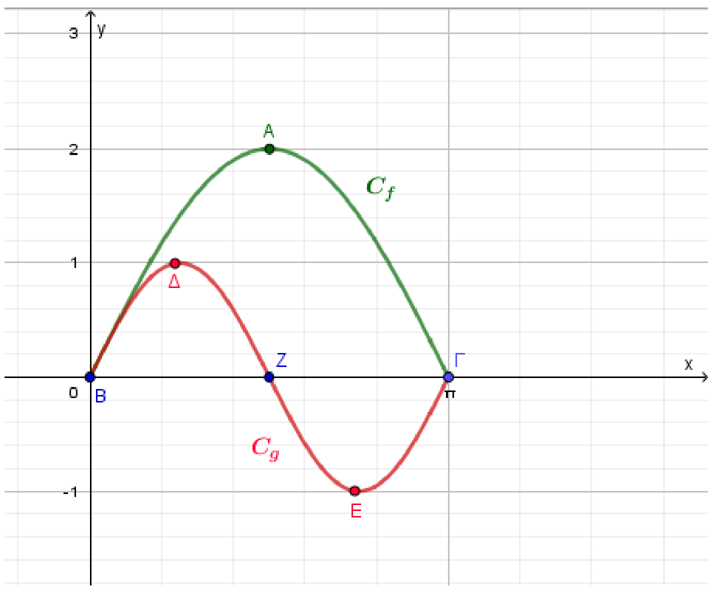
i. Για τη συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu x$, με $x \in [0,\pi]$, είναι:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$f(x) = 2\eta\mu x$	0	2	0

Για τη συνάρτηση $g(x) = \eta\mu(2x)$, με $x \in [0,\pi]$, είναι:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$g(x) = \eta\mu(2x)$	0	1	0	-1	0

Οι γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων, είναι:



ii. Η ζητούμενη ανισότητα γράφεται ισοδύναμα

$$2\eta\mu\frac{5\pi}{9} > \eta\mu\frac{10\pi}{9} \Leftrightarrow 2\eta\mu\frac{5\pi}{9} > \eta\mu\left(2\cdot\frac{5\pi}{9}\right) \Leftrightarrow f\left(\frac{5\pi}{9}\right) > g\left(\frac{5\pi}{9}\right)$$

Είναι: $\frac{\pi}{2} < \frac{5\pi}{9} < \pi$.

Επομένως, από τις γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων προκύπτει ότι

$$f\left(\frac{5\pi}{9}\right) > 0 \text{ και } g\left(\frac{5\pi}{9}\right) < 0.$$

Ως εκ τούτου είναι $f\left(\frac{5\pi}{9}\right) > g\left(\frac{5\pi}{9}\right)$.

69 Θέμα 4 - 15062

α)Από το σχήμα είναι φανερό ότι η γραφική της παράσταση προκύπτει από επανάληψη του τμήματος της που αντιστοιχεί στο διάστημα $[0, \pi]$, οπότε η περίοδος της f είναι $T = \pi$. Επιπλέον οι τεταγμένες των σημείων της γραφικής της παράστασης περιέχονται στο διάστημα $[-3, 3]$, οπότε η ελάχιστη τιμή της είναι ίση με -3 και η μέγιστη είναι ίση με 3.

β) Η συνάρτηση είναι της μορφής $f(x) = \rho\eta\mu(\alpha x)$ με $\alpha, \rho > 0$, οπότε έχει περίοδο $T = \frac{2\pi}{\alpha}$ ελάχιστη τιμή $-\rho$ και μέγιστη ίση με ρ. Έτσι, έχουμε $\frac{2\pi}{\alpha} = \pi$, οπότε $\alpha = 2$ και $\rho = 3$.

γ) Είναι: $g(x) = x^4 - 2x^2 + 5 = (x^2 - 1)^2 + 4 \geq 4$ και η ισότητα $g(x) = 4$ ισχύει όταν $x^2 = 1$ δηλαδή όταν $x = -1$ ή $x = 1$. Άρα ο αριθμός 4 είναι η ελάχιστη τιμή της f.

δ) Επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) \leq 3$ και $g(x) \geq 4$, η εξίσωση $f(x) = g(x)$ είναι αδύνατη. Άρα οι γραφικές παραστάσεις των f, g δεν έχουν κοινό σημείο.

70 Θέμα 4 - 15003

α)

i. Ισχύει ότι $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \alpha x\right) = \eta\mu\alpha x$ και $\sigma\upsilon\nu(\pi - \alpha x) = -\sigma\upsilon\nu\alpha x$. Άρα, ο τύπος της συνάρτησης γίνεται:

$$f(x) = \eta\mu\alpha x(\eta\mu\alpha x + 2) - \sigma\upsilon\nu\alpha x(-\sigma\upsilon\nu\alpha x) - 1 =$$
$$\eta\mu^2\alpha x + 2\eta\mu\alpha x + \sigma\upsilon\nu^2\alpha x - 1 =$$
$$1 + 2\eta\mu\alpha x - 1 = 2\eta\mu\alpha x.$$

ii. Η $\eta\mu\alpha x$ έχει περίοδο $T = \frac{2\pi}{\alpha}$. Από τη γραφική παράσταση προκύπτει ότι η συνάρτηση f έχει περίοδο $T = \pi$. Άρα,

$$\frac{2\pi}{\alpha} = \pi \Leftrightarrow \alpha = 2.$$

β) Οι τετμημένες των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = 1$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης

$$2\eta\mu 2x = 1 \Leftrightarrow \eta\mu 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$
$$\eta\mu 2x = \eta\mu\frac{\pi}{6}.$$

Οπότε,

$$\begin{cases} 2x = \dfrac{\pi}{6} + 2\kappa\pi \\ \quad ή \\ 2x = \pi - \dfrac{\pi}{6} + 2\kappa\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{12} + \kappa\pi \\ \quad ή \\ x = \dfrac{5\pi}{12} + \kappa\pi \end{cases}, \qquad \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Επειδή $x \in [0, \pi]$ έχουμε ότι:

$$0 \le x \le \pi \Leftrightarrow 0 \le \frac{\pi}{12} + \kappa\pi \le \pi \Leftrightarrow$$
$$-\frac{1}{12} \le \kappa \le 1 - \frac{1}{12} \Leftrightarrow -\frac{1}{12} \le \kappa \le \frac{11}{12} \overset{\kappa\in\mathbb{Z}}{\Longrightarrow} k = 0$$

και

$$0 \le x \le \pi \Leftrightarrow 0 \le \frac{5\pi}{12} + \kappa\pi \le \pi \Leftrightarrow$$
$$-\frac{5}{12} \le \kappa \le 1 - \frac{5}{12} \Leftrightarrow -\frac{5}{12} \le \kappa \le \frac{7}{12} \overset{\kappa\in\mathbb{Z}}{\Longrightarrow} k = 0.$$

Άρα, $x = \frac{\pi}{12}$ και ή $x = \frac{5\pi}{12}$

71 Θέμα 4 - 15288

α) Η περίοδος της συνάρτησης είναι $T = \frac{2\pi}{3}$, η μέγιστη τιμή της είναι $\max f(x) = 2 + 1 = 3$, και η ελάχιστη τιμή της είναι $\min f(x) = -2 + 1 = -1$.

β)

i. Από την γραφική παράσταση της ημιτονοειδούς συνάρτησης g, παρατηρούμε ότι παρουσιάζει μέγιστο για $x = -\frac{\pi}{2}$ και το επόμενο μέγιστο για $x = \frac{3\pi}{2}$. Άρα η περίοδος της συνάρτησης είναι $T = \frac{3\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi$, οπότε $\beta = 1$. Η καμπύλη προκύπτει από κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $\alpha\eta\mu x$ κατά 1 μονάδα προς τα πάνω, άρα $\gamma = 1$. Επίσης

$$g\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 3 \Leftrightarrow$$
$$\alpha \cdot \eta\mu\frac{3\pi}{2} + 1 = 3 \Leftrightarrow .$$
$$\alpha \cdot (-1) = 2 \Leftrightarrow$$
$$\alpha = -2$$

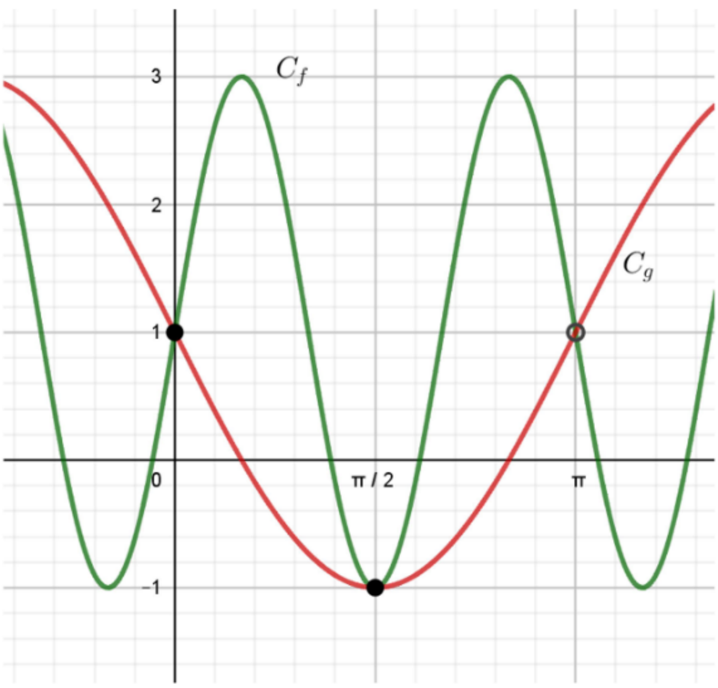
Τελικά $g(x) = -2\eta\mu x + 1$.

ii. Η εξίσωση γίνεται:

$$
\begin{aligned}
& f(x)=g(x) \Leftrightarrow \\
& 2\eta\mu 3x+1=-2\eta\mu x+1 \Leftrightarrow \\
& \eta\mu 3x=-\eta\mu x \Leftrightarrow \\
& \eta\mu 3x=\eta\mu(-x) \Leftrightarrow \\
& \begin{cases} 3x=2\kappa\pi-x \\ \text{ή} \\ 3x=2\kappa\pi+(\pi+x) \end{cases}, \kappa\in\mathbb{Z}.
\end{aligned}
$$

Δηλαδή: $\begin{cases} x=\dfrac{\kappa\pi}{2} \\ \text{ή} \\ x=\kappa\pi+\dfrac{\pi}{2} \end{cases}, \kappa\in\mathbb{Z}$. Επειδή $x\in[0,\pi)$, για $\kappa=0$ στον πρώτο τύπο λύσεων προκύπτει $x=0$ και στον δεύτερο τύπο λύσεων προκύπτει $x=\dfrac{\pi}{2}$ (που προκύπτει και από τον πρώτο τύπο λύσεων για $\kappa=1$). Από τις άλλες τιμές του $\kappa\in\mathbb{Z}$ προκύπτουν λύσεις οι οποίες δεν ανήκουν στο διάστημα $[0,\pi)$.

Η γραφική λύση της εξίσωσης φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Τελικά ή εξίσωση έχει δυο λύσεις στο $[0,\pi)$, τις $x=0$ και $x=\dfrac{\pi}{2}$.

72 Θέμα 4 - 15287

α) Η συνάρτηση $f(x)=\rho\eta\mu(\omega x)$ με $\rho>0$, έχει μέγιστη τιμή ρ. Με βάση το σχήμα η συνάρτηση έχει μέγιστη τιμή 3, άρα $\rho=3$. Επίσης η περίοδος της συνάρτησης είναι π, οπότε $\pi=\dfrac{2\pi}{\omega}\Leftrightarrow\omega=2$. Άρα $f(x)=3\eta\mu(2x)$.

β) Η ευθεία $y=\alpha x$ διέρχεται από το σημείο E της γραφικής παράστασης της f που έχει τεταγμένη 3, η οποία είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης. Η συνάρτηση $f(x)=3\eta\mu(2x)$ παρουσιάζει μέγιστη τιμή σε διάστημα μιας περιόδου στο $\dfrac{1}{4}$ της περιόδου, δηλαδή στη θέση $x=\dfrac{\pi}{4}$. Άρα είναι $\mathrm{E}\left(\dfrac{\pi}{4},3\right)$ και $3=\alpha\cdot\dfrac{\pi}{4}\Leftrightarrow\alpha=\dfrac{12}{\pi}$. Οπότε η εξίσωση της ευθείας είναι : $y=\dfrac{12}{\pi}x$.

γ) Η εξίσωση $3\eta\mu(2x)-\dfrac{12}{\pi}x=0$ γράφεται ισοδύναμα $3\eta\mu(2x)=\dfrac{12}{\pi}x$. Οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της $f(x)=3\eta\mu(2x)$ με την ευθεία $y=\dfrac{12}{\pi}x$. Με βάση το σχήμα τα σημεία τομής είναι 3, οι τετμημένες των οποίων είναι

- $x=0$, δεδομένου ότι $f(0)=3\eta\mu0=0$ και η ευθεία $y=\dfrac{12}{\pi}x$ διέρχεται από το σημείο $(0,0)$.
- $x=\dfrac{\pi}{4}$, δεδομένου ότι $f(\dfrac{\pi}{4})=3\eta\mu\left(2\cdot\dfrac{\pi}{4}\right)=3\eta\mu\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=3\cdot1=3$ και η ευθεία $y=\dfrac{12}{\pi}x$ διέρχεται από το σημείο $\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{12}{\pi}\cdot\dfrac{\pi}{4}\right)=\left(\dfrac{\pi}{4},3\right)$ και
- $x=-\dfrac{\pi}{4}$, δεδομένου ότι $f(-\dfrac{\pi}{4})=3\eta\mu\left(-2\cdot\dfrac{\pi}{4}\right)=3\eta\mu\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=3\cdot(-1)=-3$ και η ευθεία $y=\dfrac{12}{\pi}x$ διέρχεται από το σημείο $\left(-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{12}{\pi}\cdot\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)=\left(-\dfrac{\pi}{4},-3\right)$.

Άρα η εξίσωση $3\eta\mu(2x)-\dfrac{12}{\pi}x=0$ έχει λύσεις τις $x=0$, $x=\dfrac{\pi}{4}$ και $x=-\dfrac{\pi}{4}$.

73 Θέμα 4 - 15422

α) Είναι: $f(x)=\alpha\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)-2\eta\mu(\pi+2x)=\alpha\eta\mu2x+2\eta\mu2x=(\alpha+2)\eta\mu2x.$

β)

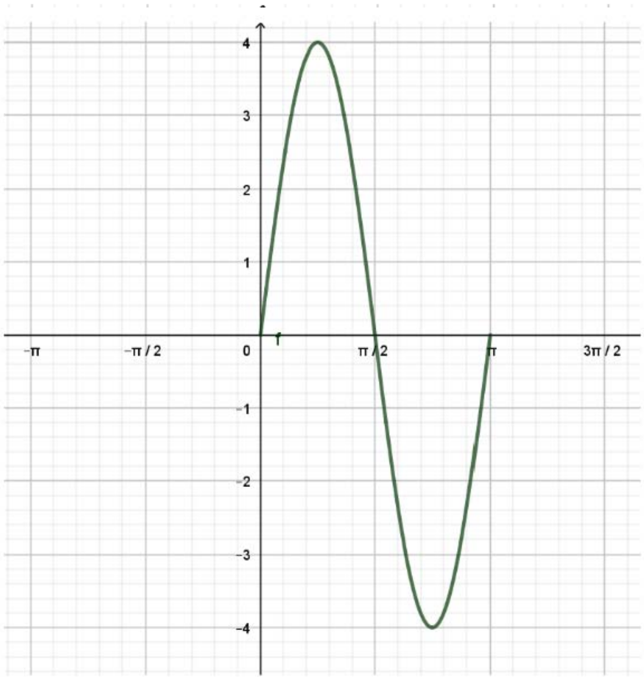
i. Η μέγιστη τιμή της συνάρτησης f καθορίζεται από το συντελεστή $\alpha+2$.
   Πρέπει δηλαδή $\alpha+2=4\Leftrightarrow\alpha=2$.

ii. Η περίοδος $T=\frac{2\pi}{2}=\pi.$

γ) Η γραφική παράσταση της $f(x) = 4\eta\mu 2x$ στο διάστημα $[0,\pi]$, βάσει του παρακάτω πίνακα:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$4\eta\mu 2x$	0	4	0	-4	0

δίνεται στο παρακάτω σχήμα:



δ) Για να βρούμε τις τετμημένες των κοινών σημείων των δύο γραφικών παραστάσεων λύνουμε την εξίσωση:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 4\eta\mu 2x = 5 - \sigma\upsilon\nu^2 2x \Leftrightarrow 4\eta\mu 2x = 5 - (1 - \eta\mu^2 2x) \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu^2 2x - 4\eta\mu 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow (\eta\mu 2x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow \eta\mu 2x = 2 \text{ αδύνατη.}$$

Αφού η παραπάνω εξίσωση είναι αδύνατη, δεν υπάρχουν σημεία τομής των δύο γραφικών παραστάσεων.

74 Θέμα 4 - 14239

α. i. Η μέγιστη τιμή της f είναι 5 και η ελάχιστη -1 .

ii. Η f έχει περίοδο $T = 4\pi$.

β. Έχουμε $f(0) = 2 \Leftrightarrow \rho\eta\mu 0 + \kappa = 2 \Leftrightarrow \kappa = 2$.

Επειδή η f έχει μέγιστη τιμή το 5 είναι $\rho + 2 = 5 \Leftrightarrow \rho = 3$.

Είναι $T = 4\pi \Leftrightarrow \dfrac{2\pi}{\omega} = 4\pi \Leftrightarrow \omega = \dfrac{1}{2}$.

γ. Για $\rho = 3$, $\omega = \dfrac{1}{2}$ και $\kappa = 2$, είναι $f(x) = 3\eta\mu\dfrac{x}{2} + 2$.

Έχουμε $f(x_0) = \dfrac{7}{2} \Leftrightarrow 3\eta\mu\dfrac{x_0}{2} + 2 = \dfrac{7}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\dfrac{x_0}{2} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\dfrac{x_0}{2} = \eta\mu\dfrac{\pi}{6} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{x_0}{2} = 2\kappa\pi + \dfrac{\pi}{6}$ ή $\dfrac{x_0}{2} = 2\kappa\pi + \pi - \dfrac{\pi}{6} \Leftrightarrow x_0 = 4\kappa\pi + \dfrac{\pi}{3}$ ή $x_0 = 4\kappa\pi + \dfrac{5\pi}{3}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

Είναι:

- $5\pi < x_0 < 6\pi \Leftrightarrow 5\pi < 4\kappa\pi + \dfrac{\pi}{3} < 6\pi \Leftrightarrow 5 < 4\kappa + \dfrac{1}{3} < 6 \Leftrightarrow \dfrac{7}{6} < \kappa < \dfrac{17}{12}$, αδύνατη στο $\mathbb{Z}$.
- $5\pi < x_0 < 6\pi \Leftrightarrow 5\pi < 4\kappa\pi + \dfrac{5\pi}{3} < 6\pi \Leftrightarrow 5 < 4\kappa + \dfrac{5}{3} < 6 \Leftrightarrow \dfrac{5}{6} < \kappa < \dfrac{13}{12} \Leftrightarrow \kappa = 1$.

Άρα $x_0 = 4\pi + \dfrac{5\pi}{3} = 5\pi + \dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{17\pi}{3}$.

75 Θέμα 2 - 15113

α) Έχουμε:

$$P(x) = -2x^3 + 4x^2 + 2(x^3 - 1) + 9 \Leftrightarrow$$
$$P(x) = -2x^3 + 4x^2 + 2x^3 - 2 + 9 \Leftrightarrow$$
$$P(x) = 0x^3 + 4x^2 + 7 \Leftrightarrow$$
$$P(x) = 4x^2 + 7.$$

Συνεπώς το πολυώνυμο $P(x)$ είναι $2^{ου}$ βαθμού.

β) Για να είναι τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ ίσα, πρέπει να είναι ίδιου βαθμού και να έχουν τους αντίστοιχους συντελεστές ίσους. Άρα πρέπει $\alpha = 4$.

76 Θέμα 2 - 15012

α) Σύμφωνα με την ταυτότητα της διαίρεσης είναι:

$P(x) = (x-3)(x^2+2) + 4$

β) Έχουμε $P(x) = (x-3)(x^2+2) + 4 \Leftrightarrow P(x) = x^3 + 2x - 3x^2 - 6 + 4$.

Τελικά $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 2$.

γ) Ο αριθμός $x = 3$ είναι ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$, αν η διαίρεσή του με το $x-3$ έχει υπόλοιπο 0, που δεν συμβαίνει εδώ, αφού $P(3) = 4$, άρα το $x = 3$ δεν είναι ρίζα του πολυωνύμου.

77 Θέμα 2 - 15096

α) Είναι:

$P(-1) = 2(-1)^3 + (-1)^2 - 3(-1) + 1 = 3 \neq 0$ και

$P(1) = 2 \cdot 1^3 + 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 = 1 \neq 0$.

Άρα το 1 και το -1 δεν είναι ρίζες του πολυωνύμου.

β) Είναι:

$$\begin{array}{r|l}
2x^3 + x^2 - 3x + 1 & x^2 + x - 1 \\ \cline{2-2}
-2x^3 - 2x^2 + 2x & 2x - 1 \\ \hline
-x^2 - x + 1 & \\
x^2 + x - 1 & \\ \hline
0 &
\end{array}$$

Άρα το πηλίκο της διαίρεσης των δύο πολυωνύμων είναι το $\pi(x) = 2x - 1$ και το υπόλοιπο είναι 0.

Επομένως ισχύει: $P(x) = (x^2 + x - 1) \cdot (2x - 1)$.

78 Θέμα 2 - 14981

α) Είναι $P(-2) = (-2)^3 - (-2) + 6 = -8 + 2 + 6 = 0$.

β) Αφού ο αριθμός -2 είναι ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$, άρα το $x - (-2) = x + 2$ θα είναι παράγοντας του $P(x)$.

γ) Με βάση το β) ερώτημα, η διαίρεση $P(x) : (x + 2)$ θα είναι τέλεια, αφού το υπόλοιπο αυτής της διαίρεσης είναι το $P(-2) = 0$. Εκτελούμε το σχήμα Horner για να βρούμε το πηλίκο της παραπάνω διαίρεσης.

1	0	-1	6	-2
	-2	4	-6	
1	-2	3	0	

Άρα $P(x) = (x + 2)(1x^2 - 2x + 3)$. Παρατηρούμε τώρα, ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου $x^2 - 2x + 3$ είναι $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = -8 < 0$, άρα δεν αναλύεται σε γινόμενο.

79 Θέμα 2 - 15047

α) Επειδή $P(1) = 1^4 - 1^3 - 5 \cdot 1^2 + 7 \cdot 1 - 2 = 1 - 1 - 5 + 7 - 2 = 0$, ο αριθμός 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου.

β) Οι πιθανές ακέραιες λύσεις του πολυωνύμου είναι οι διαιρέτες του σταθερού όρου του δηλαδή οι διαιρέτες του 2 που είναι οι αριθμοί $1, 2, -1, -2$.

Ο αριθμός 1 είδαμε ότι είναι ρίζα του πολυωνύμου. Εξετάζουμε αν κάποιος από τους άλλους αριθμούς είναι ρίζα. Είναι:

- $P(2) = 16 - 8 - 20 + 14 - 2 = 0$
- $P(-1) = 1 + 1 - 5 - 7 - 2 = -12 \neq 0$
- $P(-2) = 16 + 8 - 20 - 14 - 2 = -12 \neq 0$

Επομένως οι ακέραιες ρίζες του πολυωνύμου είναι οι αριθμοί 1 και 2.

80 Θέμα 2 - 15642

α) Ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - \rho$ αν και μόνο αν $P(\rho) = 0$. Έχουμε $P(1) = 2(1-1)^{20} - 3(1-1)^{10} + 5 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 - 2 = 0$, άρα το $x - 1$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

β)

i. Είναι $P(0) = 2(0-1)^{20} - 3(0-1)^{10} + 5 \cdot 0^2 - 3 \cdot 0 - 2 = 2 - 3 - 2 = -3$.

ii. Αφού $P(0) = -3 \neq 0$, το x δεν είναι παράγοντας του πολυωνύμου $P(x)$.

81 Θέμα 2 - 18230

α) Το πολυώνυμο έχει παράγοντα το $(x-2)$, μόνο όταν $P(2)=0$.

Πραγματικά,

$$P(2)=2\cdot 8+4-8\cdot 2-4=16+4-16-4=0$$

οπότε το $(x-2)$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου.

β) Είναι:

$$P(x)=2x^3+x^2-8x-4=2x^3-8x+x^2-4=2x(x^2-4)+(x^2-4)$$

$$=(x^2-4)(2x+1)=(x-2)(x+2)(2x+1)$$

γ) Ισχύει:

$$P(x)=0\Leftrightarrow(2x+1)(x-2)(x+2)=0\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2} \text{ ή } x=2 \text{ ή } x=-2$$

Επομένως η εξίσωση έχει ρίζες τους αριθμούς $-\frac{1}{2}, 2$ και -2.

82 Θέμα 2 - 15618

α) Στο πολυώνυμο μπορούμε να εξάγουμε κοινό παράγοντα το x και έχουμε:

$P(x)=2x^3+x^2-x=x(2x^2+x-1)$ που είναι το ζητούμενο.

β) Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα $P(x)=2x^3+x^2-x=0\Leftrightarrow x(2x^2+x-1)=0\Leftrightarrow$

$x(2x-1)(x+1)=0\Leftrightarrow x=0$ ή $x=\frac{1}{2}$ ή $x=-1$.

83 Θέμα 2 - 15695

α)

$$\begin{array}{r|l}
x^3+0x^2+2x-3 & x+1 \\ \cline{2-2}
-x^3-x^2 & x^2-x+3 \\ \cline{1-1}
-x^2+2x-3 & \\
x^2+x & \\ \cline{1-1}
3x-3 & \\
-3x-3 & \\ \cline{1-1}
-6 &
\end{array}$$

Με βάση την παραπάνω διαίρεση διαπιστώνουμε ότι $P(x)=(x+1)(x^2-x+3)-6$.

Εναλλακτικά, μπορούμε να απαντήσουμε με χρήση του σχήματος Horner.

β) Η εξίσωση $P(x)+6=0$ γράφεται $(x+1)(x^2-x+3)=0$. Αλλά το τριώνυμο x^2-x+3 έχει διακρίνουσα $\Delta=(-1)^2-4\cdot1\cdot3=-11<0$ και επομένως δεν έχει ρίζες. Ώστε $x+1=0$, έτσι μοναδική ρίζα είναι η $x=-1$.

Εναλλακτικά, μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση $P(x)+6=0$ ανεξάρτητα από το α) ερώτημα ως εξής: $x^3+2x+3=0 \Leftrightarrow x^3+3x-x+3=0 \Leftrightarrow$

$x(x^2-1)+3(x+1)=0$, άρα $(x-1)(x+1)x+3(x+1)=0 \Leftrightarrow$

$(x+1)[x(x-1)+3]=0$, οπότε $(x+1)(x^2-x+3)=0$.

84 Θέμα 2 - 15175

α) Είναι $P(1)=1^3-1^2+1-1=0$, άρα το 1 είναι μία ρίζα του πολυωνύμου.

β) Επιπλέον ισχύει ότι

$$1 \text{ ρίζα του } P(x) \Leftrightarrow x-1 \text{ παράγοντας του } P(x)$$

Εφαρμογή του σχήματος Horner:

1	−1	1	−1	ρ =1
	1	0	1	
1	0	1	0	

Επομένως ισχύει: $P(x)=(x-1)\cdot(x^2+1)$.

Εναλλακτική απάντηση:

$$P(x)=x^3-x^2+x-1=x^2(x-1)+(x-1)=(x-1)\cdot(x^2+1)$$

γ) Είναι λοιπόν

$$P(x)=0 \Leftrightarrow (x-1)\cdot(x^2+1)=0 \overset{x^2+1\neq 0}{\Longleftrightarrow} x=1.$$

85 Θέμα 2 - 15040

α)Με $x=1$ έχουμε:

$$x^3-7x+6=1^3-7\cdot1+6=7-7=0$$

οπότε ο αριθμός 1 είναι ρίζα της εξίσωσης.

β) Όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα Horner το πηλίκο της διαίρεσης $(x^3-7x+6):(x-1)$ είναι x^2+x-6 και το υπόλοιπο 0, οπότε η ταυτότητα της διαίρεσης είναι η:

1	0	−7	6	1
	1	1	−6	
1	1	−6	0	

$$x^3-7x+6=(x-1)(x^2+x-6)$$

γ) Από το ερώτημα β) έχουμε:

$$x^3-7x+6=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x-6)=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=2 \text{ ή } x=-3$$

86 Θέμα 2 - 15248

α) Από την ταυτότητα της διαίρεσης έχουμε

$P(x)=(2x-1)(x^2-2)+1=2x^3-4x-x^2+2+1=2x^3-x^2-4x+3$.

β) Με $P(x)=2x^3-x^2-4x+3$

i. Το σχήμα Horner για τη διαίρεση $P(x):(x-1)$ φαίνεται παρακάτω.

2	-1	-4	3	1
	2	1	-3	
2	1	-3	0	

Συνεπώς το $P(x)$ έχει ρίζα το 1 και η ταυτότητα της διαίρεσης $P(x):(x-1)$ είναι

$P(x)=(x-1)(2x^2+x-3)$.

ii. Έχουμε λοιπόν: $P(x)=0 \Leftrightarrow (x-1)\left(2x^2+x-3\right)=0$ οπότε

$x-1=0$ ή $2x^2+x-3=0$ δηλαδή $x=1$ ή $x=1$ ή $x=-\dfrac{3}{2}$.

Τελικά $x=1$ (διπλή ρίζα) ή $x=-\dfrac{3}{2}$.

87 Θέμα 2 - 15654

α) Παρατηρούμε ότι $P(2)=2^3-7\cdot 2+6=8-14+6=0$, οπότε το 2 είναι ρίζα του $P(x)$ και το $x-2$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

β) Κάνουμε τη διαίρεση $P(x)\div(x-2)$,

$$\begin{array}{rr|l}
 & \mathbf{x^3+0x^2-7x+6} & \mathbf{x-2} \\ \cline{3-3}
(+) & \mathbf{-x^3+2x^2} & \mathbf{x^2+2x-3} \\ \cline{1-2}
 & \mathbf{2x^2-7x+6} & \\
(+) & \mathbf{-2x^2+4x} & \\ \cline{1-2}
 & \mathbf{-3x+6} & \\
(+) & \mathbf{3x-6} & \\ \cline{1-2}
 & \mathbf{0} &
\end{array}$$

Άρα $P(x)=(x-2)(x^2+2x-3)$. Έχουμε ισοδύναμα:

$$P(x)=0 \Leftrightarrow$$
$$(x-2)(x^2+2x-3)=0 \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} x-2=0 \\ \text{ή} \\ x^2+2x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ \text{ή} \\ x=1, x=-3 \end{cases}.$$

Άρα οι λύσεις της εξίσωσης είναι $x=1, x=2, x=-3$.

88 Θέμα 2 - 17241

α)

I. Επειδή $P(-1)=(-1)^3+(-1)+2=-2+2=0$, το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x+1)$ είναι 0. Άρα, το$(x+1)$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

II. Κάνουμε τη διαίρεση του $P(x)$ με το $(x+1)$ με τη βοήθεια του σχήματος Horner:

1	0	1	2	-1
	-1	1	-2	
1	-1	2	0	

Άρα, $P(x)=(x+1)(x^2-x+2)$.

β) Το τριώνυμο x^2-x+2 έχει διακρίνουσα $\Delta=(-1)^2-4\cdot 2=-7<0$ οπότε $x^2-x+2>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα,

$$P(x)<0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2-x+2)<0 \Leftrightarrow$$
$$x+1<0 \Leftrightarrow x<-1.$$

89 Θέμα 2 - 15176

α) Είναι $P(1)=1^3-2\cdot 1^2+3\cdot 1-2=0$, άρα το 1 είναι μία ρίζα του πολυωνύμου. Επιπλέον ισχύει ότι

$$1 \text{ ρίζα του } P(x) \Leftrightarrow x-1 \text{ παράγοντας του } P(x)$$

β) Είναι: $P(x)=(x-1)\cdot(x^2-x+2)$.

Το τριώνυμο $x^2-x+2\neq 0$ διότι έχει διακρίνουσα αρνητική και επιπρόσθετα ισχύει ότι $x^2-x+2>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Άρα $P(x)=0 \Leftrightarrow (x-1)\cdot(x^2-x+2)=0 \Leftrightarrow x=1$.

Το πρόσημο των τιμών του $P(x)$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα προσήμων:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
x^2-x+2		$+$		$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	

Ως εκ τούτου, είναι: $P(x)>0 \Leftrightarrow x>1$.

90 Θέμα 2 - 15653

α)

i. Η διαίρεση του $P(x)=x^3+x^2+2x+2$ με το $(x+1)$ είναι η παρακάτω:

$$
\begin{array}{r|l}
x^3+x^2+2x+2 & x+1 \\ \cline{2-2}
-x^3-x^2 & x^2+2 \\ \cline{1-1}
2x+2 & \\
-2x-2 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

ii. Η ταυτότητα της παραπάνω διαίρεσης είναι:

$x^3+x^2+2x+2=(x+1)(x^2+2)+0 \Rightarrow$

$x^3+x^2+2x+2=(x+1)(x^2+2)$.

β) Έχουμε ισοδύναμα: $P(x)<0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2+2)<0 \overset{x^2+2>0}{\Leftrightarrow} x+1<0 \Leftrightarrow x<-1$.

91 Θέμα 2 - 15674

α) Η διαίρεση $\mathrm{P}(x):(x-1)$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

$$
\begin{array}{r|l}
3x^3-x^2-x+2 & x-1 \\ \cline{2-2}
-3x^3+3x^2 & 3x^2+2x+1 \\ \cline{1-1}
2x^2-x+2 & \\
-2x^2+2x & \\ \cline{1-1}
x+2 & \\
-x+1 & \\ \cline{1-1}
3 &
\end{array}
$$

Η ταυτότητα της διαίρεσης είναι : $\mathrm{P}(x)=(x-1)(3x^2+2x+1)+3$.

β) Με βάση την παραπάνω ταυτότητα διαίρεσης, η ζητούμενη ανίσωση γίνεται

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{P}(x)<3 \Leftrightarrow \\
&(x-1)(3x^2+2x+1)+3<3 \Leftrightarrow \\
&(x-1)(3x^2+2x+1)<0
\end{aligned}
$$

Το τριώνυμο $3x^2+2x+1$ έχει διακρίνουσα αρνητική, οπότε είναι για κάθε τιμή του x ομόσημο του συντελεστή του x^2 που ισούται με 3, δηλαδή θετικό, οπότε η ανίσωση γίνεται ισοδύναμα

$$
\begin{aligned}
&(x-1)(3x^2+2x+1)<0 \Leftrightarrow \\
&x-1<0 \Leftrightarrow \\
&x<1
\end{aligned}
$$

Τελικά η ανίσωση $\mathrm{P}(x)<3$ αληθεύει για κάθε $x \in(-\infty, 1)$.

92 Θέμα 2 - 15247

α) Παραγοντοποιούμε το $P(x)$ και έχουμε

$$P(x)=2x^3-x^2+2x-1=x^2(2x-1)+2x-1=(2x-1)(x^2+1)$$

β) Το πρόσημο του $P(x)$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x-1$		-	0	+	
x^2+1		+		+	
$P(x)$		-	0	+	

Συνεπώς η ανίσωση $P(x)\geq 0$ αληθεύει για κάθε $x\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$.

93 Θέμα 2 - 15246

α) Παραγοντοποιούμε το $P(x)$ και έχουμε

$$P(x)=x^3+x^2-x-1=x^2(x+1)-(x+1)=(x+1)(x^2-1)=(x+1)(x+1)(x-1)=(x+1)^2(x-1)$$

β) Το πρόσημο του $P(x)$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x-1$		-		-	0	+	
$(x+1)^2$		+	0	+		+	
$P(x)$		-	0	-	0	+	

Συνεπώς η ανίσωση $P(x)\geq 0$ αληθεύει για κάθε $x\in[1,+\infty)\cup\{-1\}$.

94 Θέμα 4 - 15677

Η διαίρεση $P(x):Q(x)$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

$$\begin{array}{r|l}
x^4-2x^3-x^2+\alpha x+\beta & x^2-2x+1 \\ \cline{2-2}
-x^4+2x^3-x^2 \qquad & x^2-2 \\ \cline{1-1}
-2x^2+\alpha x+\beta & \\
2x^2 \quad -4x+2 & \\ \cline{1-1}
(\alpha-4)x+\beta+2 &
\end{array}$$

Αφού το $P(x)$ διαιρείται με το πολυώνυμο $Q(x)=x^2-2x+1$, θα πρέπει το υπόλοιπο της παραπάνω διαίρεση να είναι το μηδενικό πολυώνυμο, που συμβαίνει μόνο όταν $\alpha-4=0$ και $\beta+2=0$, δηλαδή $\alpha=4$ και $\beta=-2$.

β) Για $\alpha=4, \beta=-2$ έχουμε $P(x)=x^4-2x^3-x^2+4x-2$.

i. Η διαίρεση $P(x):(x^2+5)$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα

$$
\begin{array}{r|l}
x^4-2x^3-x^2+4x-2 & x^2+5 \\
\cline{2-2}
-x^4-5x^2 \qquad\qquad & x^2-2x-6 \\
\cline{1-1}
-2x^3-6x^2+4x-2 & \\
2x^3+10x \quad\;\; & \\
\cline{1-1}
-6x^2+14x-2 & \\
6x^2+30 \quad\; & \\
\cline{1-1}
14x+28 \quad\; &
\end{array}
$$

και η ταυτότητα της διαίρεσης είναι η εξής: $P(x)=\left(x^2+5\right)(x^2-2x-6)+14x+28$

ii. Η εξίσωση $P(x)=14(x+2)$ με τη βοήθεια της παραπάνω ταυτότητας γίνεται

$$
\begin{aligned}
&\left(x^2+5\right)(x^2-2x-6)+14x+28=14(x+2) \Leftrightarrow \\
&\left(x^2+5\right)(x^2-2x-6)+14x+28=14x+28 \Leftrightarrow \\
&\left(x^2+5\right)(x^2-2x-6)=0
\end{aligned}
$$

και επειδή $x^2+5\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, έχουμε ότι $x^2-2x-6=0$ δηλαδή $x=\dfrac{2\pm\sqrt{28}}{2}=\dfrac{2\pm 2\sqrt{7}}{2}=1\pm\sqrt{7}$.

95 Θέμα 4 - 15250

α) Η διαίρεση $P(x):(x^2-4)$ φαίνεται παρακάτω

$$
\begin{array}{r|l}
x^5-4x^3-x^2+\alpha x+\beta & x^2-4 \\
\cline{2-2}
-x^5+4x^3 \qquad\qquad\quad & x^3-1 \\
\cline{1-1}
-x^2+\alpha x+\beta & \\
x^2 \qquad\; -4 & \\
\cline{1-1}
\alpha x+\beta-4 &
\end{array}
$$

β) Από το α) ερώτημα έχουμε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x^2-4)$ είναι το πολυώνυμο $\alpha x+\beta-4$. Όμως από την εκφώνηση δίνεται ότι είναι το πολυώνυμο $4x+1$. Συνεπώς τα πολυώνυμα $\alpha x+\beta-4$ και $4x+1$ πρέπει να είναι ίσα, δηλαδή $\alpha=4$ και $\beta=5$.

γ) Για $\alpha=4$ και $\beta=5$ έχουμε $P(x)=x^5-4x^3-x^2+4x+5$.

i. Η ταυτότητα της διαίρεσης $P(x):(x^2-4)$ είναι $P(x)=(x^2-4)(x^3-1)+4x+1$.

ii. Αξιοποιώντας την ταυτότητα της διαίρεσης που βρήκαμε παραπάνω έχουμε $P(x)<4x+1 \Leftrightarrow (x^2-4)(x^3-1)+4x+1<4x+1 \Leftrightarrow (x^2-4)(x-1)(x^2+x+1)<0$.

Το πρόσημο του πολυωνύμου $\Pi(x)=(x^2-4)(x-1)(x^2+x+1)$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	-2		1		2		$+\infty$
x^2-4	+	0	-		-	0	+	
$x-1$	-		-	0	+		+	
x^2+x+1	+		+		+		+	
$\Pi(x)$	-	0	+	0	-	0	+	

Συνεπώς η ζητούμενη ανίσωση αληθεύει για κάθε $x\in(-\infty,-2)\cup(1,2)$.

96 Θέμα 4 - 15431

α)

i. Αφού το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x-1)$ ισχύει ότι:

$$P(1)=0 \Leftrightarrow$$
$$2\cdot 1^3+\alpha\cdot 1^2+\beta\cdot 1-5=0 \Leftrightarrow$$
$$\alpha+\beta=3.$$

Επίσης το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x-2)$ είναι το $P(2)$. Άρα,

$$P(2)=-1 \Leftrightarrow 2\cdot 2^3+\alpha\cdot 2^2+\beta\cdot 2-5=-1 \Leftrightarrow$$
$$16+4\alpha+2\beta-5=-1 \Leftrightarrow$$
$$4\alpha+2\beta=-12 \Leftrightarrow 2\alpha+\beta=-6.$$

ii. Για να βρούμε τις τιμές των α, β λύνουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} 2\alpha+\beta=-6 \\ \alpha+\beta=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha+\beta=-6 \\ \beta=3-\alpha \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2\alpha+(3-\alpha)=-6 \\ \beta=3-\alpha \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha+3=-6 \\ \beta=3-\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=-9 \\ \beta=12 \end{cases}.$$

β) Κάνουμε τη διαίρεση $P(x):(x-1)$ με το σχήμα Horner και έχουμε:

2	-9	12	-5	1
	2	-7	5	
2	-7	5	0	

Άρα, $P(x)=(x-1)(2x^2-7x+5)$. Το τριώνυμο $2x^2-7x+5$ έχει διακρίνουσα

$\Delta=(-7)^2-4\cdot 2\cdot 5=9$ και ρίζες:

$$x_1=\frac{7+\sqrt{9}}{4}=\frac{5}{2} \text{ και } x_2=\frac{7-\sqrt{9}}{4}=1.$$

Άρα, $P(x)=(x-1)2(x-1)\left(x-\frac{5}{2}\right)=2(x-1)^2\left(x-\frac{5}{2}\right)$.

Η γραφική παράσταση της $P(x)$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$ για τις τιμές του x για τις οποίες

$$P(x)<0 \Leftrightarrow 2(x-1)^2\left(x-\frac{5}{2}\right)<0.$$

Ο πίνακας προσήμων του $P(x)$ είναι ο ακόλουθος:

x	$-\infty$		1		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$(x-1)^2$		$+$	0	$+$		$+$	
$(x-\frac{5}{2})$		$-$		$-$	0	$+$	
$P(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

Άρα, $P(x)<0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,1)\cup(1,\frac{5}{2})$.

γ) Από το ερώτημα β) προκύπτει ότι η γραφική παράσταση της P τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $(1,0)$ και $\left(\frac{5}{2},0\right)$. Από τη γραφική παράσταση προκύπτει ότι η συνάρτηση P είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,1]$ και $[2,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1,2]$.

97 Θέμα 4 - 15174

α) Η διαίρεση του πολυωνύμου $P(x)$ με το πολυώνυμο $\delta(x)$:

$$
\begin{array}{lr|l}
x^4+x^3 & +\alpha\,x-4 & x^2-3x+2 \\ \cline{3-3}
-x^4+3x^3-2x^2 & & x^2+4x+10 \\ \cline{1-2}
\quad 4x^3-2x^2 & +\alpha\,x-4 & \\
\quad -4x^3+12x^2 & -8\,x & \\ \cline{1-2}
\qquad 10x^2 & +(\alpha-8)\,x-4 & \\
\qquad -10x^2 & +30\,x-20 & \\ \cline{1-2}
 & (\alpha+22)\,x-24 &
\end{array}
$$

Η ταυτότητα της διαίρεσης είναι:

$$P(x) = \delta(x)\cdot(x^2+4x+10)+(\alpha+22)\,x-24$$

Επομένως πρέπει να ισχύει $(\alpha+22)\,x-24 = 24x-24$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Είναι:

$(\alpha+22)\,x-24 = 24x-24 \Leftrightarrow \alpha+22=24 \Leftrightarrow \alpha=2.$

β) Για $\alpha=2$, είναι $P(x)=x^4+x^3+2\,x-4$.

i. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-1$ είναι το $P(1)=0$.

ii. Ζητείται η επίλυση της εξίσωσης $P(x)=0$.

Είναι: $P(1)=0 \Leftrightarrow 1$ ρίζα του $P(x) \Leftrightarrow x-1$ παράγοντας του $P(x)$.

Εφαρμογή του σχήματος Horner:

1	1	0	2	−4	ρ =1
	1	2	2	4	
1	2	2	4	0	

Επομένως ισχύει: $P(x)=(x-1)\cdot(x^3+2x^2+2x+4)$

Αλλά $x^3+2x^2+2x+4 = x^2(x+2)+2(x+2) = (x+2)(x^2+2)$.

Τελικά ισχύει $P(x)=(x-1)\cdot(x+2)\cdot(x^2+2)$.

Είναι λοιπόν

$$P(x)=0 \Leftrightarrow (x-1)\cdot(x+2)\cdot(x^2+2)=0 \overset{x^2+2\neq 0}{\Longleftrightarrow} x=1 \text{ ή } x=-2.$$

Επομένως, τα σημεία τομής του άξονα $x'x$ με την γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$, είναι τα $A(-2,0)$ και $B(1,0)$.

iii. Ζητείται η επίλυση της ανίσωσης $P(x) < 0$.

Το πρόσημο των τιμών του $P(x)$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα προσήμων:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2+2		$+$		$+$		$+$	
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ως εκ τούτου, $P(x) < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 1$.

98 Θέμα 4 - 15066

α) i. Επειδή $P(0)=2\neq 0$, το πολυώνυμο δεν έχει λύση τον αριθμό 0.

ii. Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα του πολυωνύμου, τότε ισχύει $P(\rho)=0$ δηλαδή

$$2\rho^4-5\rho^3+4\rho^2-5\rho+2=0,\ (1).$$

Για να αποδείξουμε ότι ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι επίσης ρίζα του, αρκεί να δείξουμε ότι $P\left(\frac{1}{\rho}\right)=0$.

Πραγματικά, είναι:

$$P\left(\frac{1}{\rho}\right)=\frac{2}{\rho^4}-\frac{5}{\rho^3}+\frac{4}{\rho^2}-\frac{5}{\rho}+2=\frac{1}{\rho^4}\left(2-5\rho+4\rho^2-5\rho^3+2\rho^4\right)=0$$

λόγω της (1).

β) Επειδή οι μοναδικοί θετικοί ακέραιοι αριθμοί που μπορεί να είναι ρίζες του είναι οι θετικοί διαιρέτες του 2, με $x=2$ έχουμε:

$$P(2)=2\cdot 16-5\cdot 8+4\cdot 4-5\cdot 2+2=50-50=0$$

οπότε ο αριθμός 2 είναι θετική ακέραια ρίζα του πολυωνύμου.

γ) Η εξίσωση $P(x)=0$ έχει ρίζα τον αριθμό 2 και λόγω του ερωτήματος α) έχει ρίζα και τον αριθμό $\frac{1}{2}$.

2	-5	4	-5	2	2
	4	-2	4	-2	
2	-1	2	-1	0	

Έτσι, με τη βοήθεια του σχήματος Horner έχουμε:

$$P(x)=(x-2)(2x^3-x^2+2x-1)$$

και αν επαναλάβουμε τη διαδικασία για το πολυώνυμο $2x^3-x^2+2x-1$ με το $\frac{1}{2}$

2	-1	2	-1	$\frac{1}{2}$
	1	0	1	
2	0	2	0	

συμπεραίνουμε ότι

$$P(x)=(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x^2+2)=(x-2)(2x-1)(x^2+1)$$

οπότε

$$P(x)=0 \Leftrightarrow x=2 \text{ ή } x=\frac{1}{2}.$$

δ) Επειδή για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $x^2+1>0$, το πρόσημο του πολυωνύμου είναι ίδιο με το πρόσημο του τριωνύμου $(x-2)(2x-1)$. Έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμων.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$(x-2)(2x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Από τον πίνακα προκύπτει ότι λύση της ανίσωσης $P(x)<0$ είναι κάθε αριθμός του διαστήματος $\left(\frac{1}{2},\,2\right)$.

99 Θέμα 4 - 14955

α) Ζητάμε τον αριθμό $T(2)=2^3-10\cdot 2^2+31\cdot 2-30=8-40+62-30=0.$

β) Από το α) ερώτημα προκύπτει ότι το πολυώνυμο $T(x)$ έχει παράγοντα το $x-2$, άρα η διαίρεση $T(x):(x-2)$ είναι τέλεια. Βρίσκουμε το πηλίκο αυτής της διαίρεσης με τη βοήθεια του σχήματος $Horner$.

1	- 10	31	- 30	2
	2	- 16	30	
1	- 8	15	0	

Ώστε $T(x)=(x-2)(x^2-8x+15)$.

Το τριώνυμο $x^2-8x+15$ έχει διακρίνουσα $\Delta=(-8)^2-4\cdot 1\cdot 15=4$ και ρίζες $x=\frac{8\pm 2}{2}$, δηλαδή τους αριθμούς 3 και 5. Τελικά $T(x)=(x-2)(x-3)(x-5)$.

Έτσι $\alpha=2, \beta=3, \gamma=5$.

γ) Θέλουμε να βρούμε τα διαστήματα για τις τιμές x των οποίων θα είναι $T(x)<0$. Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμου των τιμών $T(x)$ για θετικές τιμές του x.

x	0 2	3	5	$+\infty$
$x-2$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x^2-8x+15$	$+$	$+$	$-$	$+$
$T(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

Διαπιστώνουμε ότι παγετώνες θα υπάρχουν στον πλανήτη τα δύο πρώτα εκατομμύρια χρόνια και την χρονική περίοδο από τρία έως πέντε εκατομμύρια χρόνια.

100 Θέμα 4 - 15960

α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$.

Για τη συνάρτηση f έχουμε:

$f(-x) = f(x) \Leftrightarrow (-x)^4 + \kappa(-x) - 1 = x^4 + \kappa x - 1 \Leftrightarrow \quad x^4 - \kappa x - 1 = x^4 + \kappa x - 1 \Leftrightarrow$ $2\kappa x = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα το $2\kappa x$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο, οπότε $2\kappa = 0$ και ισοδύναμα $\kappa = 0$.

β) Για $\kappa = 0$, η συνάρτηση f είναι: $f(x) = x^4 - 1$.

i. Με $x_1 < x_2 \leq 0 \Leftrightarrow {x_1}^4 > {x_2}^4 \Leftrightarrow {x_1}^4 - 1 > {x_2}^4 - 1$

Άρα: $f(x_1) > f(x_2)$. Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα για $x \in (-\infty, 0]$.

ii. Έχουμε: $f(x) \geq -1 \Leftrightarrow x^4 - 1 \geq -1 \Leftrightarrow x^4 \geq 0$, που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

iii. Για να βρούμε τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$, λύνουμε την ανίσωση:

$f(x) < 0 \Leftrightarrow x^4 - 1 < 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1) \cdot (x^2 + 1) < 0 \overset{x^2+1>0}{\Longleftrightarrow} x^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow$ $(x - 1) \cdot (x + 1) < 0$.

Άρα $x \in (-1,1)$. Επομένως η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$ για $x \in (-1,1)$.

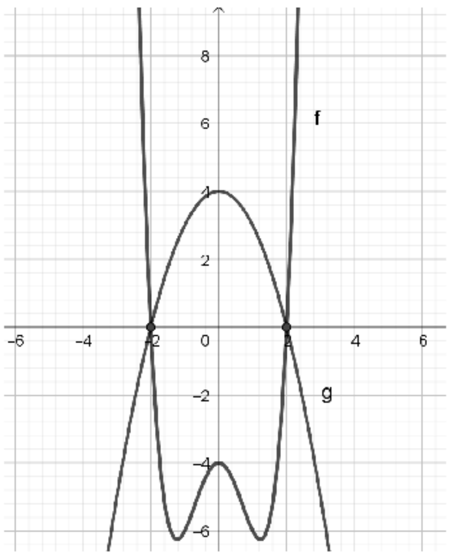
101 Θέμα 4 - 15790

α) Οι συναρτήσεις f και g έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, άρα έχουμε $x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}$.

Επιπλέον $f(-x) = (-x)^4 - 3(-x)^2 - 4 = x^4 - 3x^2 - 4 = f(x)$.

Όμοια $g(-x) = -(-x)^2 + 4 = -x^2 + 4 = g(x)$.

β) Από το α) ερώτημα οι συναρτήσεις f και g είναι άρτιες. Η γραφική παράσταση άρτιας συνάρτησης είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$. Επομένως οι γραφικές παραστάσεις των f και g συμπληρώνονται όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



γ)

i. Έχουμε $f(x)=g(x)\Leftrightarrow x^4-3x^2-4=-x^2+4\Leftrightarrow x^4-2x^2-8=0$. (1)

Θέτουμε $x^2=y$, οπότε (1): $y^2-2y-8=0$ με $\Delta=36$ και $y_1=-2, y_2=4$, άρα $x^2=-2$ που είναι αδύνατη ή $x^2=4\Leftrightarrow x=-2$ ή $x=2$ που είναι οι ζητούμενες λύσεις.

ii. Γραφικά, λύση της ανίσωσης $f(x)<g(x)$ είναι οι τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της g είναι πάνω από την γραφική παράσταση της f. Οπότε η ανίσωση αληθεύει για $x\in(-2,2)$.

102 Θέμα 4 - 17919

α) Η ευθεία AB έχει εξίσωση της μορφής $(\varepsilon): y=\alpha x+\beta$. Το σημείο $\mathrm{A}\left(1,-\frac{3}{4}\right)$ είναι σημείο της (ε), άρα:

$$-\frac{3}{4}=\alpha\cdot 1+\beta \qquad (1).$$

Το σημείο $\mathrm{B}(4,-3)$ είναι σημείο της (ε), άρα:

$$-3=\alpha\cdot 4+\beta \qquad (2).$$

Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2):

$$\begin{cases}-\frac{3}{4}=\alpha\cdot 1+\beta\\ -3=\alpha\cdot 4+\beta\end{cases}\overset{(-)}{\Leftrightarrow}\begin{cases}3\alpha=-3+\frac{3}{4}\\ 4\alpha+\beta=-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=-\frac{3}{4}\\ 4\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)+\beta=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=-\frac{3}{4}\\ \beta=0.\end{cases}$$

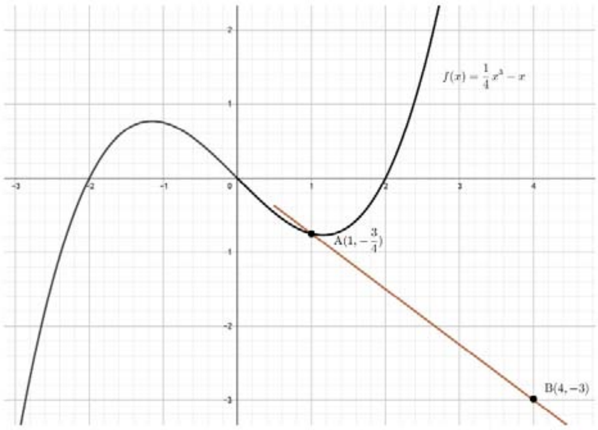
Άρα η ευθεία AB έχει εξίσωση $(\varepsilon): y=-\frac{3}{4}x$.

β)

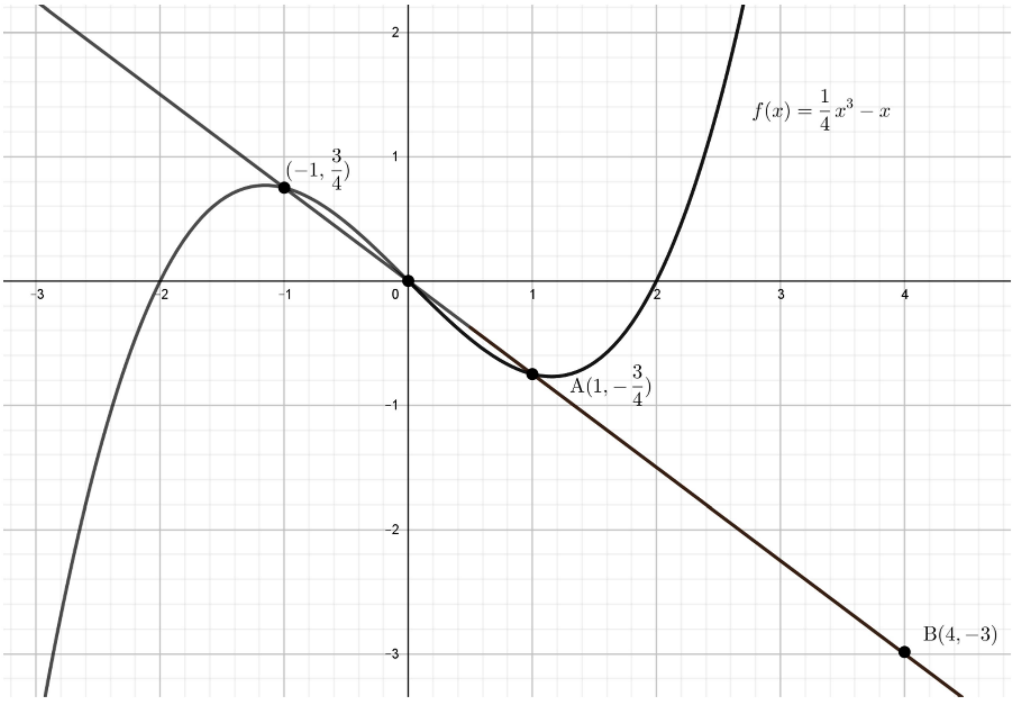
i. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει και $-x\in\mathbb{R}$. Έχουμε:

$$f(-x)=\frac{1}{4}(-x)^3-(-x)=-\frac{1}{4}x^3+x=-\left(\frac{1}{4}x^3-x\right)=-f(x).$$

ii. Στο βi) αποδείξαμε ότι $f(-x)=-f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, δηλαδή ότι η f είναι περιττή. Συνεπώς η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων $(0,0)$:



γ) Εξαιτίας της συμμετρίας της γραφικής παράστασης της f ως προς το $(0,0)$, το σημείο $\left(-1,\frac{3}{4}\right)$ θα ανήκει στη γραφική παράσταση η οποία διέρχεται και από το $(0,0)$. Όμως τα σημεία αυτά ανήκουν και στην ευθεία AB. Άρα τα κοινά σημεία της ευθείας και της καμπύλης είναι τα $\left(1,-\frac{3}{4}\right)$, $(0,0)$ και $\left(-1,\frac{3}{4}\right)$.



Εναλλακτικά, θα λύσουμε την εξίσωση $\frac{1}{4}x^3-x=-\frac{3}{4}x$. Έχουμε ισοδύναμα:

$$\frac{1}{4}x^3-x=-\frac{3}{4}x \Leftrightarrow$$
$$x^3-4x+3x=0 \Leftrightarrow$$
$$x^3-x=0 \Leftrightarrow$$
$$x\left(x^2-1\right)=0 \Leftrightarrow$$
$$x=0 \text{ ή } x=1 \text{ ή } x=-1.$$

Άρα τα κοινά σημεία είναι τα $\left(1,-\frac{3}{4}\right)$, $(0,0)$ και $\left(-1,\frac{3}{4}\right)$.

103 Θέμα 4 - 17925

α) Όπως φαίνεται στο σχήμα, η γραφική παράσταση της f τέμνει τον $x'x$ άξονα στο $(-2,0)$, οπότε έχουμε ισοδύναμα:

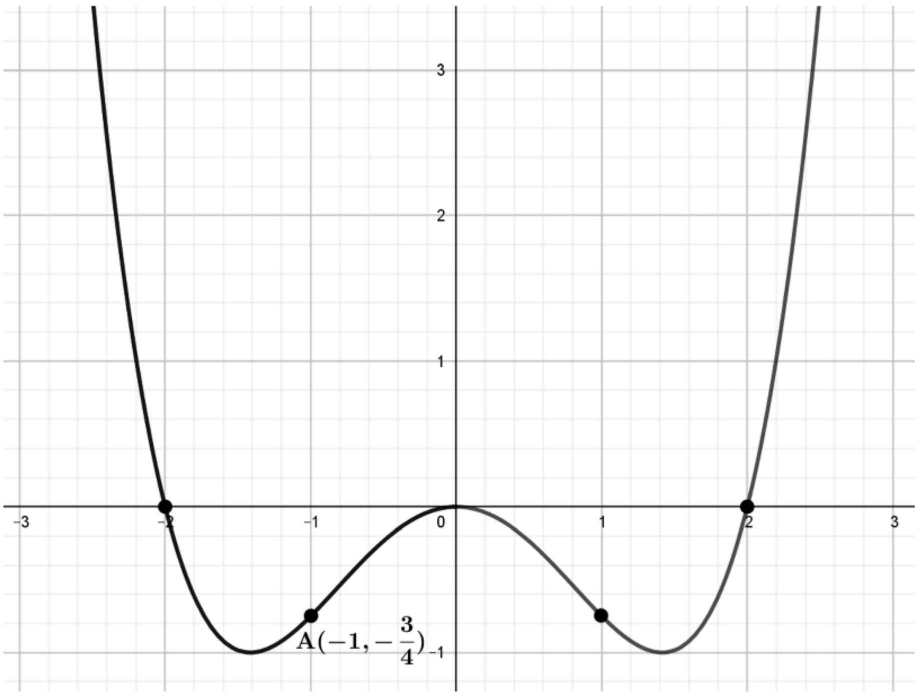
$$
\begin{aligned}
&f(-2)=0 \Leftrightarrow \\
&\frac{1}{4}(-2)^4+\alpha\cdot(-2)^2=0 \Leftrightarrow \\
&4+4\alpha=0 \Leftrightarrow \\
&\alpha=-1.
\end{aligned}
$$

β)

i. Έχουμε $f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^2$. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει και $-x\in\mathbb{R}$. Οπότε:

$f(-x)=\frac{1}{4}(-x)^4-(-x)^2=\frac{1}{4}x^4-x^2=f(x)$.

ii. Στο βi) αποδείξαμε ότι $f(-x)=f(x)$, δηλαδή ότι η f είναι άρτια. Συνεπώς η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς τον $y'y$ άξονα:



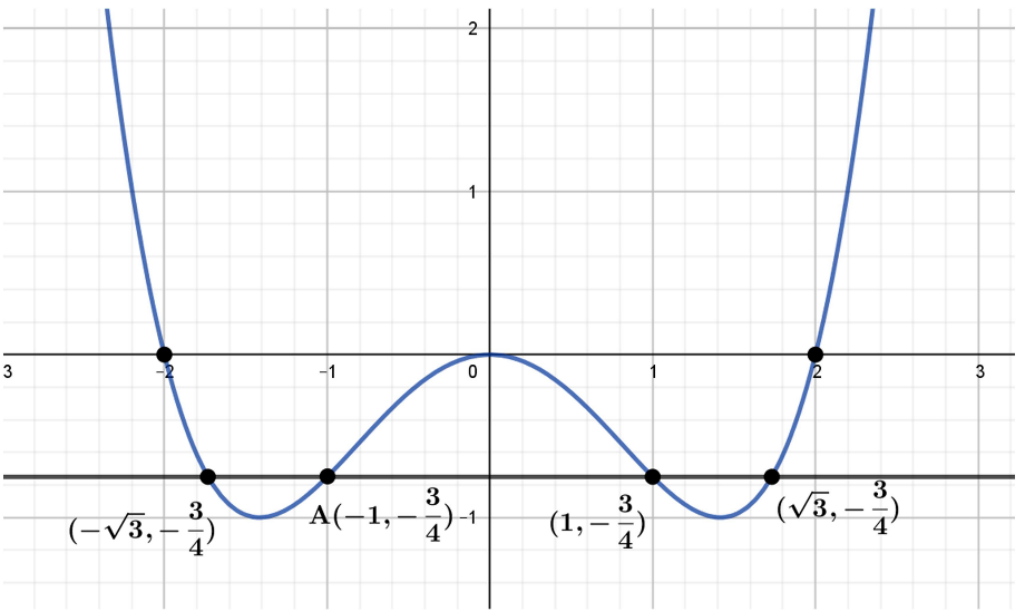
γ) Πραγματικά $f\left(-\sqrt{3}\right)=\frac{1}{4}\left(-\sqrt{3}\right)^4-\left(-\sqrt{3}\right)^2=\frac{9}{4}-3=-\frac{3}{4}$, οπότε το σημείο $\left(-\sqrt{3},-\frac{3}{4}\right)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f.

Εξαιτίας της συμμετρίας της γραφικής παράστασης της f ως προς τον $y'y$ άξονα, τα σημεία $\left(1,-\frac{3}{4}\right)$ και $\left(\sqrt{3},-\frac{3}{4}\right)$ θα ανήκουν επίσης στη γραφική παράσταση και η ευθεία $y=-\frac{3}{4}$ έχει τέσσερα κοινά σημεία με αυτήν, τα $\left(-1,-\frac{3}{4}\right)$, $\left(1,-\frac{3}{4}\right)$, $\left(-\sqrt{3},-\frac{3}{4}\right)$ και $\left(\sqrt{3},-\frac{3}{4}\right)$.

Εναλλακτικά, θα λύσουμε την εξίσωση $f(x)=-\frac{3}{4}$. Έχουμε ισοδύναμα:

$$\begin{aligned}
&f(x)=-\frac{3}{4}\Leftrightarrow\\
&\frac{1}{4}x^4-x^2=-\frac{3}{4}\Leftrightarrow\\
&x^4-4x^2+3=0\Leftrightarrow\\
&x^2=1 \quad \text{ή} \quad x^2=3
\end{aligned}$$

Άρα οι λύσεις της εξίσωσης είναι τέσσερις: $x=-1,\ x=1,\ x=-\sqrt{3},\ x=\sqrt{3}$ και συνεπώς τα κοινά σημεία της ευθείας $y=-\frac{3}{4}$ με την γραφική παράσταση της f είναι τα $\left(-1,-\frac{3}{4}\right)$, $\left(1,-\frac{3}{4}\right)$, $\left(-\sqrt{3},-\frac{3}{4}\right)$ και $\left(\sqrt{3},-\frac{3}{4}\right)$.



104 Θέμα 4 - 15005

α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $\mathbb{R}$, οπότε αν $x \in \mathbb{R}$ τότε και $-x \in \mathbb{R}$.

Επίσης είναι: $f(-x) = (-x)^6 - 3(-x)^2 + 2 = x^6 - 3x^2 + 2 = f(x)$.

Άρα, η f είναι άρτια.

β) Οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $x'x$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^6 - 3x^2 + 2 = 0$.

Θέτουμε $x^2 = y$ και η εξίσωση γίνεται

$$y^3 - 3y + 2 = 0 \quad (1).$$

Οι πιθανές ακέραιες ρίζες της εξίσωσης (1) είναι οι διαιρέτες του 2, δηλαδή οι $\pm 1, \pm 2$. Για $\rho = 1$, κάνοντας τη διαίρεση με τη βοήθεια του σχήματος Horner, έχουμε:

1	0	-3	2	$\rho = 1$
	1	1	-2	
1	1	-2	0	

Οπότε, το 1 είναι ρίζα και η εξίσωση (1) γίνεται:

$$(y-1)(y^2 + y - 2) = 0 \Leftrightarrow$$

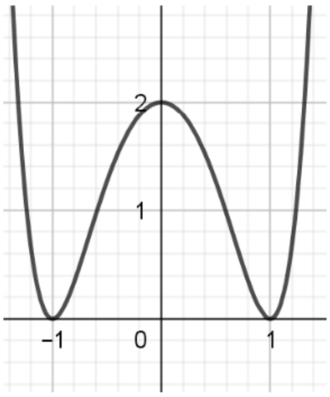
$$y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = 1 \text{ ή } y^2 + y - 2 = 0.$$

Η εξίσωση $y^2 + y - 2 = 0$ έχει ρίζες τις $y_1 = -2$ και $y_2 = 1$.

Οπότε, $x^2 = -2$, αδύνατη ή $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = -1$.

Άρα τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $x'x$ είναι: $A(-1,0)$ και $B(1,0)$.

γ) Επειδή η f είναι άρτια, η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$, οπότε έχει την ακόλουθη μορφή:



δ) Από τη γραφική παράσταση προκύπτει ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, -1]$ και $[0,1]$ και γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $[-1,0]$ και $[1, +\infty)$.

105 Θέμα 4 - 15094

α) $S(0) = 0$ (το κινητό βρίσκεται στην αφετηρία) και $S(2) = 2 \cdot 8 - 6 \cdot 4 + 20 = 12$ μέτρα.

β) $S(t) = 30 \Leftrightarrow 2t^3 - 6t^2 + 10t = 30 \Leftrightarrow t^3 - 3t^2 + 5t - 15 = 0$ (1).

Πιθανές ακέραιες ρίζες της (1) είναι οι ± 1, ± 3, ± 5, ± 15. Επειδή ο χρόνος είναι μη αρνητικό φυσικό μέγεθος, πιθανές ρίζες είναι οι 1, 3, 5, 15.

Η τιμή $t = 3$ επαληθεύει την εξίσωση και με τη βοήθεια του σχήματος Horner, έχουμε:

1	−3	5	−15	3
	3	0	15	
1	0	5	0	

Άρα η (1) $\Leftrightarrow (t-3)(t^2+5) = 0 \Leftrightarrow t = 3$.

Επομένως το κινητό θα χρειαστεί *3* δευτερόλεπτα για να διανύσει απόσταση *30* μέτρων.

γ) Πραγματικά, έχουμε:

$S(t) = 2t^3 - 6t^2 + 10t = 2t(t^2 - 3t + 5) \geq 0$,

διότι $t \geq 0$ (εκφράζει το χρόνο)

και $t^2 - 3t + 5 > 0$ (το τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta = -11 < 0$, επομένως είναι πάντα ομόσημο του συντελεστή του t^2).

δ) Με βάση το φυσικό πλαίσιο του προβλήματος, η συνάρτηση $S(t)$ πρέπει να είναι μη αρνητική και σε κανένα χρονικό διάστημα γνήσια φθίνουσα. Επομένως, είναι:

Η (I) είναι μεν μη αρνητική, αλλά δε διατηρεί το ίδιο είδος μονοτονίας.

Η (II) παίρνει και αρνητικές τιμές.

Η (III) είναι μη αρνητική και γνησίως αύξουσα παντού, ως εκ τούτου αποτελεί την ενδεδειγμένη απάντηση.

106 Θέμα 4 - 15377

α) Ο όγκος της κυβικής δεξαμενής Α υπολογίζεται από τον τύπο του όγκου κύβου, δηλαδή $\mathrm{V_A(x)} = \mathrm{x}^3$ και ο όγκος της δεξαμενής Β, από τον τύπο του όγκου ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, $\mathrm{V_B(x)} = (\mathrm{x}+1) \cdot \mathrm{x}^2$.

Επομένως, $\Delta(\mathrm{x}) = \mathrm{V_B(x)} - \mathrm{V_A(x)} = (\mathrm{x}+1) \cdot \mathrm{x}^2 - \mathrm{x}^3 = \mathrm{x}^3 + \mathrm{x}^2 - \mathrm{x}^3 = \mathrm{x}^2$.

β) i. Επειδή $\mathrm{V_B(x)} = 36 \Leftrightarrow (\mathrm{x}+1) \cdot \mathrm{x}^2 = 36 \Leftrightarrow \mathrm{x}^3 + \mathrm{x}^2 = 36$.

$$\mathrm{x}^3 + \mathrm{x}^2 = 36 \Leftrightarrow \mathrm{x}^3 + \mathrm{x}^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow (\mathrm{x}-3)(\mathrm{x}^2 + 4\mathrm{x} + 12) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\mathrm{x} - 3 = 0 \text{ ή } \mathrm{x}^2 + 4\mathrm{x} + 12 = 0.$$

Άρα, έχει τη μοναδική λύση το x=3, το τριώνυμο $\mathrm{x}^2 + 4\mathrm{x} - 12 = 0$ έχει διακρίνουσα

Δ=-32<0. Η διάσταση της δεξαμενής Α είναι $x = 3$ μέτρα. Οι διαστάσεις της δεξαμενής Β είναι 3 μέτρα, 3 μέτρα και 4 μέτρα.

ii. Η διαφορά των όγκων $\Delta(x) = x^2$ για $x = 3$ προκύπτει ότι είναι ίση με 9 κυβικά μέτρα.

γ) Η νέα δεξαμενή Γ θα έχει όγκο $V_\Gamma(x) = (x+1)(x+2)x$.

Από τα δεδομένα έχουμε $V_\Gamma(x) \geq 60$.

Λύνουμε τη πολυωνυμική ανίσωση

$$x^3 + 3x^2 + 2x - 60 \geq 0 \Leftrightarrow (x-3)(x^2+6x+20) \geq 0 \ (1).$$

Επειδή, το τριώνυμο $x^2 + 6x + 20$ διατηρεί θετικό πρόσημο για κάθε τιμή του x, το πρόσημο της ανίσωσης (1) καθορίζεται από το x-3.

Άρα οι λύσεις της ανίσωσης (1) είναι $x \geq 3$.

Επομένως, η μικρότερη τιμή που μπορεί να πάρει το x είναι το 3, που είναι και η ζητούμενη ακμή.

107 Θέμα 4 - 17943

α) Το ορθογώνιο τρίγωνο που ικανοποιεί τα δεδομένα έχει κάθετες πλευρές x, y και υποτείνουσα $(x+2)$. Το εμβαδόν του είναι $E = 60cm^2$, οπότε: $\frac{xy}{2} = 60 \Leftrightarrow y = \frac{120}{x}$ και από το Πυθαγόρειο θεώρημα:

$$\begin{aligned}
&(x+2)^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow \\
&(x+2)^2 = x^2 + \left(\frac{120}{x}\right)^2 \Leftrightarrow \\
&x^2 + 4x + 4 = x^2 + \frac{14400}{x^2} \Leftrightarrow \\
&x + 1 = \frac{3600}{x^2} \Leftrightarrow \\
&x^3 + x^2 - 3600 = 0. \qquad (1)
\end{aligned}$$

β) Οι πιθανές ακέραιες ρίζες της εξίσωσης $x^3 + x^2 - 3600 = 0$ που είναι μικρότερες του 16 και είναι θετικοί αριθμοί (το x είναι μήκος πλευράς τριγώνου), είναι οι $1,2,3,4,5,6,8,9,10,12$ και 15. Οι αριθμοί που είναι μικρότεροι του 10 δεν μπορεί να είναι ρίζες, γιατί το άθροισμα $\left(x^3 + x^2\right)$ πρέπει να ισούται με 3600. Παρατηρούμε ότι $10^3 + 10^2 - 3600 \neq 0$, άρα το 10 δεν είναι ρίζα της εξίσωσης, όπως δεν είναι και το 12. Καταλήγουμε στο 15 και κάνουμε τη διαίρεση $\left(x^3 + x^2 - 3600\right) \div (x - 15)$:

$$
\begin{array}{rl|l}
 & x^3+x^2+0x-3600 & x-15 \\ \cline{3-3}
(+) & -x^3+15x^2 & x^2+16x+240 \\ \cline{2-2}
 & 16x^2+0x-3600 & \\
(+) & -16x^2+240x & \\ \cline{2-2}
 & 240x-3600 & \\
(+) & -240x+3600 & \\ \cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}
$$

Οπότε η εξίσωση (1) γράφεται: $(x-15)(x^2+16x+240)=0$.

Η μόνη λύση της εξίσωσης είναι $x=15$, γιατί η $x^2+16x+240=0$ είναι αδύνατη ($\Delta=-704<0$).

Άρα οι κάθετες πλευρές του τριγώνου είναι $15cm$ και $\frac{120}{15}=8cm$. Η υποτείνουσα είναι $15+2=17cm$.

γ) Ένα είναι το ορθογώνιο τρίγωνο που ικανοποιεί τα αρχικά δεδομένα του προβλήματος και αυτό είναι το τρίγωνο που βρήκαμε στο β) ερώτημα, γιατί η εξίσωση $x^3+x^2-3600=0$ δεν έχει άλλη λύση εκτός από την $x=15$.

108 Θέμα 4 - 15187

α) Θέτουμε $ημω=x$ και η εξίσωση γράφεται:

$$5x^3-8x^2-7x+6=0.$$

Οι πιθανές ακέραιες ρίζες της εξίσωσης είναι οι διαιρέτες του 6, δηλαδή οι $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$. Με δοκιμή διαπιστώνουμε ότι ο -1 είναι ρίζα. Κάνουμε τη διαίρεση $(5x^3-8x^2-7x+6):(x+1)$.

5	-8	-7	6	-1
	-5	13	-6	
5	-13	6	0	

Άρα $5x^3-8x^2-7x+6=(x+1)(5x^2-13x+6)$.

Το τριώνυμο $5x^2-13x+6$ έχει διακρίνουσα $Δ=(-13)^2-4\cdot5\cdot6=169-120=49$ και ρίζες:

$$x_1=\frac{13+\sqrt{49}}{2\cdot5}=\frac{13+7}{10}=2$$

και

$$x_2=\frac{13-\sqrt{49}}{2\cdot5}=\frac{13-7}{10}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}.$$

Επειδή $0<ω<\frac{\pi}{2}$, είναι $0<ημω<1$, άρα η μόνη αποδεκτή λύση είναι $ημω=\frac{3}{5}$.

β)

i. Ισχύει ότι:

$$\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

Επειδή $0 < \omega < \frac{\pi}{2}$, είναι $\sigma\upsilon\nu\omega > 0$. Άρα,

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}.$$

ii. Από τον τριγωνομετρικό κύκλο γνωρίζουμε ότι το σημείο B έχει συντεταγμένες $(\sigma\upsilon\nu\omega, \eta\mu\omega)$, άρα $B(\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$. Τα σημεία Γ και Δ είναι συμμετρικά του B ως προς τον άξονα $y'y$ και την αρχή O αντίστοιχα. Οπότε είναι:

$$\Gamma\left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right), \Delta\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right).$$

iii. Το ημίτονο και το συνημίτονο των γωνιών $A\hat{O}B$, $A\hat{O}\Gamma$ και $A\hat{O}\Delta$ είναι οι τεταγμένες και οι τετμημένες των σημείων B, Γ και Δ αντίστοιχα. Άρα,

$$\eta\mu A\hat{O}B = \frac{3}{5}, \qquad \sigma\upsilon\nu A\hat{O}B = \frac{4}{5},$$

$$\eta\mu A\hat{O}\Gamma = \frac{3}{5}, \qquad \sigma\upsilon\nu A\hat{O}\Gamma = -\frac{4}{5},$$

και

$$\eta\mu A\hat{O}\Delta = -\frac{3}{5}, \qquad \sigma\upsilon\nu A\hat{O}\Delta = -\frac{4}{5}.$$

109 Θέμα 4 - 15037

α) Η συνάρτηση f ορίζεται μόνο για $\mathrm{x} + 3 \geq 0$, δηλαδή για $\mathrm{x} \geq -3$.

Άρα, το πεδίο ορισμού της f είναι: $\mathrm{A_f} = [-3, +\infty)$.

Σύμφωνα με το σχήμα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-3, +\infty)$.

Η συνάρτηση g παριστάνει ευθεία για κάθε πραγματική τιμή του x και είναι γνησίως

αύξουσα στο $\mathbb{R}$, εφόσον είναι της μορφής $\mathrm{y} = \alpha\mathrm{x} + \beta$ με $\alpha > 0$.

β) Οι ρίζες της εξίσωσης $\mathrm{f(x)} = \mathrm{g(x)} \Leftrightarrow \sqrt{\mathrm{x} + 3} = 3\mathrm{x} - 1$ είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των $\mathrm{C_f}$ και $\mathrm{C_g}$ που ανήκουν στο σύνολο $A = \mathrm{A_f} \cap \mathrm{A_g} = [-3, +\infty)$.

Από το σχήμα παρατηρούμε πως οι γραφικές παραστάσεις τέμνονται στο σημείο (1,2), δηλαδή στο σημείο με τετμημένη x=1 και $1 \epsilon A$.

Άρα, η εξίσωση έχει μοναδική λύση x=1.

β) **Εναλλακτική λύση :**

Οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = g(x)$ προκύπτουν από τις λύσεις της παρακάτω εξίσωσης

$$\sqrt{x+3} = 3x - 1.$$

Η εξίσωση ορίζεται για $x \geq -3$ και $3x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{3}$.

$\sqrt{x+3} = 3x - 1$ υψώνουμε και τα δυο μέλη στο τετράγωνο

$\sqrt{x+3}^2 = (3x-1)^2 \Leftrightarrow x + 3 = 9x^2 - 6x + 1 \Leftrightarrow 9x^2 - 7x - 2 = 0.$.

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι 1 και $-\frac{2}{9}$. Από τις ρίζες αυτές διαπιστώνουμε με επαλήθευση ότι μόνο η x=1 είναι δεκτή.

Άρα, μοναδική λύση της εξίσωσης $f(x) = g(x)$ είναι η x=1.

γ) i. Η ανίσωση $f(x) < g(x)$ λύνεται γραφικά με το να βρούμε τις τετμημένες, δηλαδή τα x, όπου η C_f είναι κάτω από C_g.

Από το σχήμα προκύπτει πως αυτό συμβαίνει για $x\epsilon(1, +\infty)$.

ii. Αλγεβρικά η ανίσωση λύνεται:

Για $3x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{3}$ και $x \geq -3$, έχουμε

$$f(x) < g(x) \Leftrightarrow \sqrt{x+3} < 3x - 1 \Leftrightarrow \sqrt{x+3}^2 < (3x-1)^2 \Leftrightarrow$$

$$x + 3 < 9x^2 - 6x + 1 \Leftrightarrow$$

$$9x^2 - 7x - 2 > 0 \text{ τότε}$$

$$x\epsilon(-\infty, -\frac{2}{9}) \cup (1, +\infty).$$

Σύμφωνα με τους περιορισμούς η ανίσωση αληθεύει για $x\epsilon(1, +\infty)$.

Για $3x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{3}$ και $x \geq -3$, έχουμε $\sqrt{x+3} < 3x - 1$ αδύνατη.

110 Θέμα 4 - 15270

α) Από το σχήμα της εκφώνησης προκύπτει ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της. Επίσης, η μέγιστη τιμή της είναι ίση με 1 και επιτυγχάνεται όταν $x = 0$.

β) Από την ανισότητα $\alpha < \frac{1}{4}$ και τη μονοτονία της f συμπεραίνουμε ότι $f(\alpha) > f\left(\frac{1}{4}\right) \Rightarrow f(\alpha) > \frac{1}{2}$, οπότε $2f(\alpha) - 1 > 0$.

Επίσης, $\beta > \frac{1}{4}$, οπότε $f(\beta) < f\left(\frac{1}{4}\right) \Rightarrow f(\beta) < \frac{1}{2}$, απ’ όπου προκύπτει ότι $2f(\beta) - 1 < 0$.

Άρα, $P = (2f(\alpha) - 1)(2f(\beta) - 1) < 0$.

γ) Οι τετμημένες των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης C_f της f με την ευθεία, δίνονται από τη λύση της εξίσωσης $f(x)=2x$. Με $x\geq 0$ έχουμε:

$$f(x)=2x \Leftrightarrow 1-\sqrt{x}=2x \Leftrightarrow 2x+\sqrt{x}-1=0$$

Αν θέσουμε $\sqrt{x}=u$, τότε η εξίσωση γράφεται $2u^2+u-1=0$ και έχει λύσεις τους αριθμούς -1 και $\frac{1}{2}$. Έτσι έχουμε:

- $u=-1$: $\sqrt{x}=-1$ που είναι αδύνατη.
- $u=\frac{1}{2}$: $\sqrt{x}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\frac{1}{4}$

Άρα το μοναδικό κοινό σημείο της C_f με την ευθεία είναι το $A\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$.

Εναλλακτική λύση του ερωτήματος γ)

Παρατηρούμε ότι ο αριθμός $\frac{1}{4}$ είναι λύση της εξίσωσης $f(x)=2x$. Επιπλέον:

- Αν $x>\frac{1}{4}$, τότε $2x>\frac{1}{2}$ και $f(x)<\frac{1}{2}$, οπότε $f(x)\neq 2x$.
- Αν $0\leq x<\frac{1}{4}$, τότε $2x<\frac{1}{2}$ και $f(x)>\frac{1}{2}$, οπότε $f(x)\neq 2x$.

Επομένως η εξίσωση $f(x)=2x$ έχει μοναδική λύση την $x=\frac{1}{4}$ και το μοναδικό κοινό σημείο της C_f με την ευθεία είναι το $A\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$.

111 Θέμα 4 - 15436

Είναι $BA=2$, $MA=x$, $MK=4-x$.

Η σχέση μεταξύ του διαστήματος s που διανύεται, της ταχύτητας v και του αντίστοιχου χρόνου κίνησης t, είναι: $v=\frac{s}{t} \Leftrightarrow t=\frac{s}{v}$.

α) Το τρίγωνο BAM είναι ορθογώνιο, οπότε εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα προκύπτει ότι $BM=\sqrt{4+x^2}$.

β) Η κίνηση γίνεται σε δύο μέσα – κολύμβηση στη θάλασσα και τρέξιμο στη ξηρά – με διαφορετικές (αλλά σταθερές) ταχύτητες $v_\kappa=3\,\frac{km}{h}$ και $v_\tau=5\,\frac{km}{h}$ αντίστοιχα. Έτσι, ο συνολικός χρόνος κίνησης θα προκύψει ως άθροισμα των δύο επιμέρους χρόνων.

- Ο χρόνος κίνησης από το B στο M: $t_1=\frac{BM}{v_\kappa}=\frac{\sqrt{4+x^2}}{3}$
- Ο χρόνος κίνησης από το M στο K: $t_2=\frac{MK}{v_\tau}=\frac{4-x}{5}$
- Ο χρόνος της συνολικής κίνησης: $t_{o\lambda}=t_1+t_2=\frac{\sqrt{4+x^2}}{3}+\frac{4-x}{5}$

Επομένως, η συνάρτηση που εκφράζει τον χρόνο κίνησης t (σε h) του κολυμβητή – δρομέα ως προς την απόσταση x (σε km) είναι η

$$t(x) = \frac{\sqrt{4+x^2}}{3} + \frac{4\ -\ x}{5}, \quad x \in [0,4].$$

γ) Αρκεί να λυθεί η εξίσωση:

$$t(x) = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{4+x^2}}{3} + \frac{4\ -\ x}{5} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow$$

$$5\sqrt{4+x^2} + 3(4\ -\ x) = 20 \Leftrightarrow 5\sqrt{4+x^2} = 3x+8$$

Αφού $x \in [0,4]$ έπεται ότι $3x+8 > 0$, επομένως ισοδύναμα είναι:

$$25(4+x^2) = (3x+8)^2 \Leftrightarrow 100 + 25x^2 = 9x^2 + 48x + 64 \Leftrightarrow$$

$$4x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow (2x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

Η λύση είναι δεκτή, διότι $\frac{3}{2} \in [0,4]$.

Επομένως ο κολυμβητής θα βγει στην ακτή σε απόσταση 1,5 km από το σημείο A.

112 Θέμα 2 - 15393

α) Παρατηρούμε ότι η γραφική παράσταση της $g(x)$ προέκυψε από μία οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $f(x)$ κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά.

Επίσης, η γραφική παράσταση της $h(x)$ προέκυψε από μία κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $f(x)$ κατά 1 μονάδα προς τα πάνω.

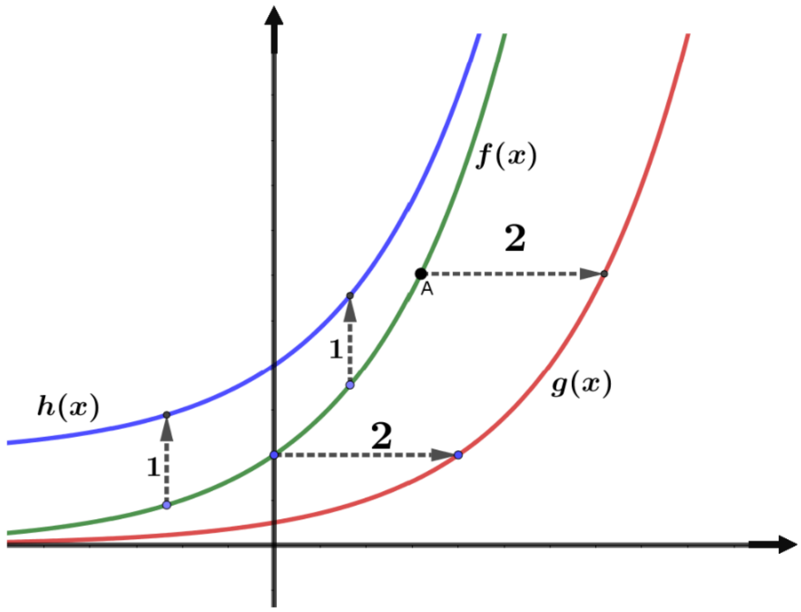
β) Με βάση τα παραπάνω, έχουμε:

$g(x) = f(x\ -\ 2)$, άρα $g(x) = 2^{x\ -2} = \frac{2^x}{2^2} = \frac{1}{4} \cdot f(x)$.

και $h(x) = f(x)\ +\ 1 = 2^x + 1$.

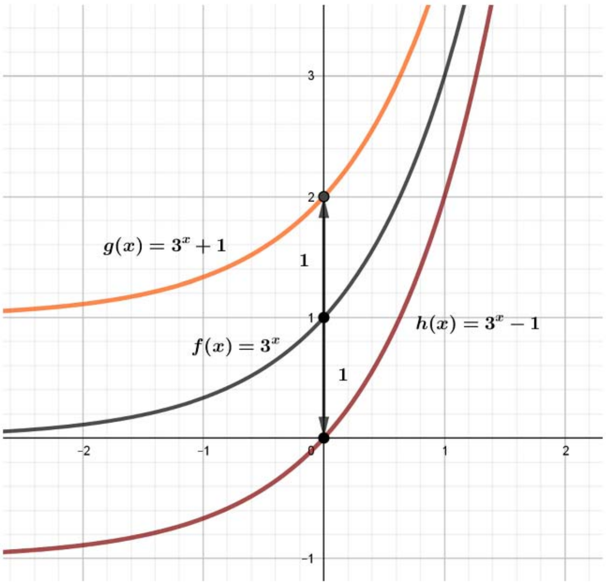
γ) Ζητάμε την τιμή του x, ώστε $f(x) = 16 \Leftrightarrow 2^x = 16 \Leftrightarrow 2^x = 2^4 \Leftrightarrow x = 4$.

Έτσι, το ζητούμενο σημείο είναι A(4,16).



113 Θέμα 2 - 21451

α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=3^x+1$ προκύπτει από κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f κατά 1 μονάδα προς τα πάνω, ενώ η γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x)=3^x-1$ προκύπτει από κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f κατά 1 μονάδα προς τα κάτω. Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των τριών συναρτήσεων.



β) Η γραφική παράσταση της $f(x)=3^x$ έχει ασύμπτωτη την ευθεία $y=0$ (τον αρνητικό ημιάξονα των x). Η κατακόρυφη μετατόπιση της f κατά 1 μονάδα προς τα πάνω θα μετατοπίσει και την ασύμπτωτη ευθεία κατά μία μονάδα προς τα πάνω. Άρα η γραφική παράσταση της g έχει ασύμπτωτη την ευθεία με εξίσωση $y=1$.

Ομοίως, η κατακόρυφη μετατόπιση της f κατά 1 μονάδα προς τα κάτω θα μετατοπίσει και την ασύμπτωτη ευθεία κατά μία μονάδα προς τα κάτω. Άρα η γραφική παράσταση της h έχει ασύμπτωτη την ευθεία με εξίσωση $y=-1$.

114 Θέμα 4 - 21448

α) Στο πλαίσιο του προβλήματος η σταθερά q_0 παριστάνει τη δόση του φαρμάκου που πήρε ο ασθενής (την ποσότητα του φαρμάκου στον οργανισμό τη χρονική στιγμή $t=0$).

Η ποσότητα του φαρμάκου που παραμένει στον οργανισμό του ασθενούς μειώνεται όσο περνούν οι ημέρες, δηλαδή η εκθετική συνάρτηση $f(t)=q_0\cdot\alpha^t$ είναι φθίνουσα, το οποίο συμβαίνει όταν $0<\alpha<1$.

β)

i. Μία ημέρα μετά τη λήψη του φαρμάκου, η ποσότητά του στον οργανισμό του ασθενούς έχει υποδιπλασιαστεί, δηλαδή

$f(1)=\frac{q_0}{2}\Leftrightarrow$

$q_0\cdot\alpha=\frac{q_0}{2}\Leftrightarrow$

$\alpha=\frac{1}{2}.$

ii. Παρατηρούμε ότι:

$f(0)=q_0\cdot\alpha^0=q_0$, $f(1)=q_0\cdot\frac{1}{2}=\frac{q_0}{2}$, $f(2)=q_0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{q_0}{4}$, $f(3)=q_0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{q_0}{8}$,

$f(4)=q_0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{q_0}{16}$, $f(5)=q_0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{q_0}{32}$, $f(6)=q_0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{q_0}{64}$.

Οπότε:

t	0	1	2	3	4	5	6
$f(t)$	q_0	$\frac{q_0}{2}$	$\frac{q_0}{4}$	$\frac{q_0}{8}$	$\frac{q_0}{16}$	$\frac{q_0}{32}$	$\frac{q_0}{64}$

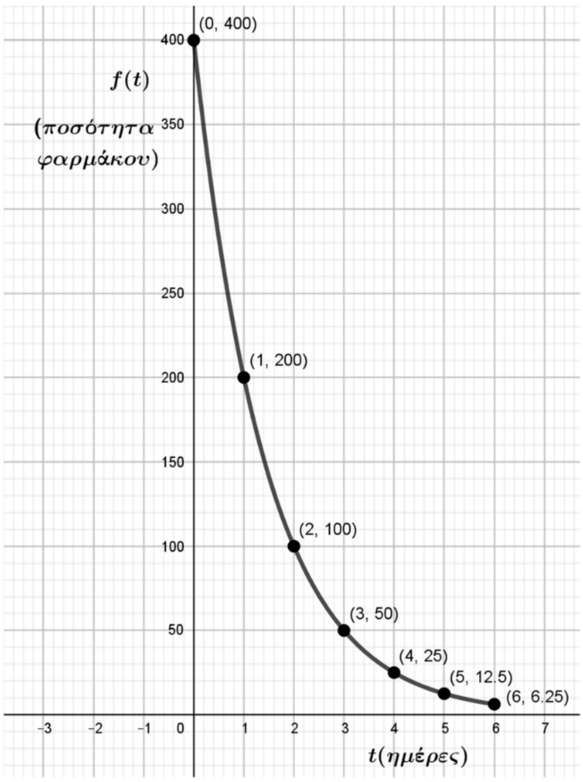
γ)

i. Έχουμε $f(4)=25\Leftrightarrow\frac{q_0}{16}=25\Leftrightarrow q_0=25\cdot16\Leftrightarrow q_0=400$ mg.

ii. Με τη βοήθεια του βii) ερωτήματος έχουμε τον παρακάτω πίνακα τιμών για τη συνάρτηση $f(t)=400\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^t$ στο διάστημα $[0,6]$:

t	0	1	2	3	4	5	6
$f(t)$	400	200	100	50	25	12,5	6,25

Η γραφική παράσταση της f φαίνεται στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων.



115 Θέμα 4 - 21471

α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία A(1,3) και B(2,13), οπότε:

$$\begin{cases} f(1)=3 \\ f(2)=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha\cdot 2^1+\beta=3 \\ \alpha\cdot 2^2+\beta=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha+\beta=3 \\ 4\alpha+\beta=13 \end{cases} \overset{(-)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2\alpha=10 \\ 2\alpha+\beta=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=5 \\ \beta=-7. \end{cases}$$

β) Για $\alpha=5$ και $\beta=-7$ η συνάρτηση γίνεται $f(x)=5\cdot 2^x-7$ και για $x=0$ έχουμε $f(0)=5\cdot 2^0-7=5\cdot 1-7=-2$. Άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0,-2)$.

γ) Παρατηρούμε ότι για $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$,έχουμε

$$2^{x_1}<2^{x_2}\Leftrightarrow$$
$$5\cdot 2^{x_1}<5\cdot 2^{x_2}\Leftrightarrow$$
$$5\cdot 2^{x_1}-7<5\cdot 2^{x_2}-7\Leftrightarrow$$
$$f(x_1)<f(x_2).$$

Άρα η $f(x)=5\cdot 2^x-7$ είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση.

δ) Έχουμε

$$f(x)>4^x-3\Leftrightarrow$$
$$5\cdot 2^x-7>\left(2^x\right)^2-3\overset{2^x=y}{\Leftrightarrow}$$
$$y^2-5y+4<0 \qquad (1).$$

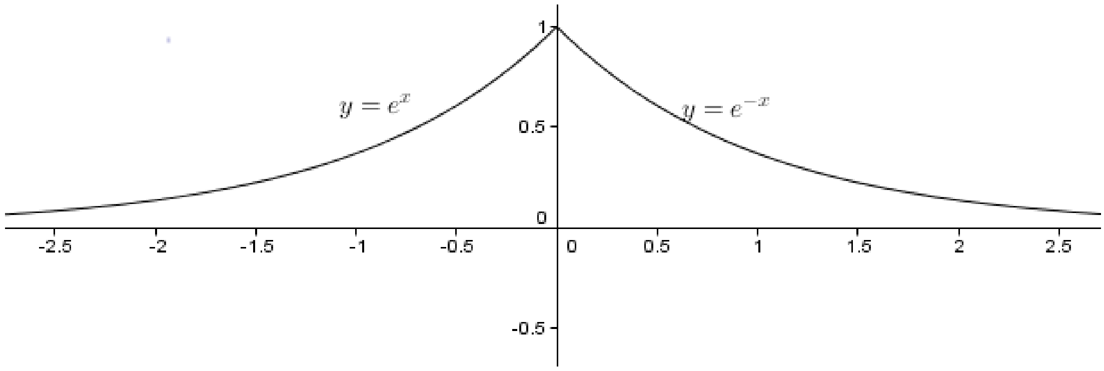
Το τριώνυμο y^2-5y+4 έχει ρίζες $y_1=4$, $y_2=1$ (διότι $1+4=5=S$ και $1\cdot 4=4=P$). Η ανίσωση (1) αληθεύει για $1<y<4$, δηλαδή:

$$1<2^x<4\Leftrightarrow 2^0<2^x<2^2\Leftrightarrow 0<x<2.$$

Τελικά η ανίσωση $f(x)>4^x-3$ αληθεύει για $x\in(0,2)$.

116 Θέμα 4 - 15269

α) Η γραφική παράσταση της f αποτελείται από την $y=e^x$ για $x<0$ και την $y=e^{-x}$ για $x\geq 0$ οπότε ο τύπος της είναι ο πρώτος από τους δοσμένους τύπους.

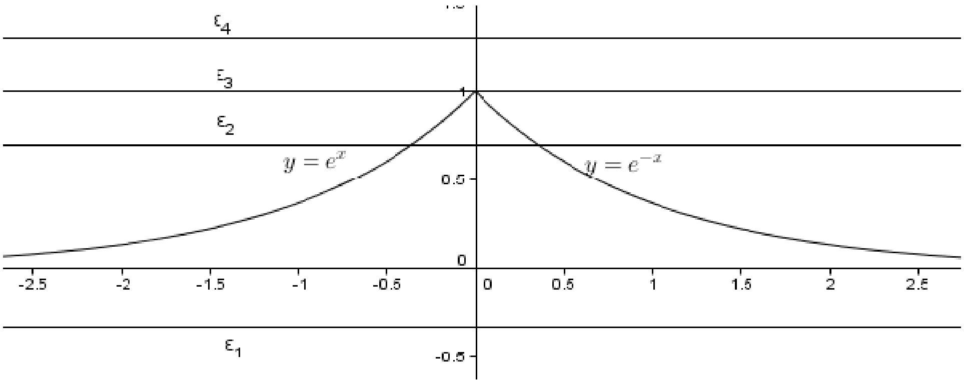


β) Από την παραπάνω γραφική παράσταση της f συμπεραίνουμε ότι αυτή είναι:

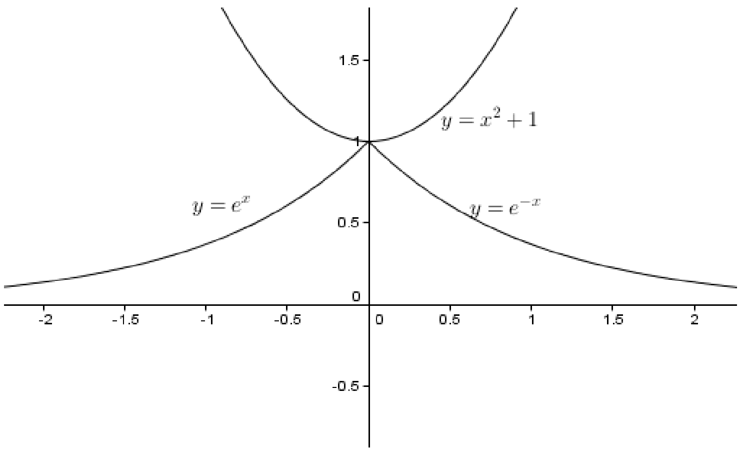
- γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$
- γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$ και
- παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x=0$, το $f(0)=1$

γ) Διακρίνουμε τις παρακάτω δυνατές περιπτώσεις:

- Αν $\alpha \le 0$, (ευθεία ε_1) τότε η C_f και η ευθεία $y=\alpha$ δεν έχουν κοινό σημείο.
- Αν $0<\alpha<1$, (ευθεία ε_2) τότε η C_f και η ευθεία $y=\alpha$ έχουν ακριβώς δυο κοινά σημεία.
- Αν $\alpha=1$, (ευθεία ε_3) τότε η C_f και η ευθεία $y=\alpha$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.
- Αν $\alpha>1$, (ευθεία ε_4) τότε η C_f και η ευθεία $y=\alpha$ δεν έχουν κοινό σημείο.



δ) Η παραβολή $y=x^2+1$ διέρχεται από το σημείο $(0,1)$ αφού για $x=0$ είναι $y=0^2+1=1$. Το σημείο $(0,1)$ είναι και σημείο της C_f, αφού $f(0)=1$. Με $x\neq 0$ έχουμε $x^2>0$, οπότε $y=x^2+1>1$ και $f(x)\le 1$. Άρα η παραβολή και η C_f δεν έχουν άλλο κοινό σημείο, οπότε το μοναδικό κοινό σημείο τους είναι το $(0,1)$.



Σχόλιο

Στο πλαίσιο μιας γραφικής λύσης θα μπορούσαμε να σχεδιάσουμε την παραβολή και τη γραφική παράσταση της f και να διαπιστώσουμε ότι έχουν μοναδικό κοινό σημείο το $(0,1)$ όπως φαίνεται στο σχήμα.

117 Θέμα 4 - 21470

α) Γνωρίζουμε ότι μετά από δύο χρόνια έχει απομείνει το $\frac{1}{3}$ της αρχικής ποσότητας, δηλαδή:

$Q(2)=\frac{1}{3}\cdot Q_0 \Leftrightarrow Q_0\cdot e^{2c}=\frac{Q_0}{3}\Leftrightarrow \left(e^c\right)^2=\frac{1}{3}\overset{e^c>0}{\Leftrightarrow} e^c=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Οπότε

$Q(t)=Q_0\cdot e^{ct}\Leftrightarrow$

$Q(t)=Q_0\cdot\left(e^c\right)^t\Leftrightarrow$

$Q(t)=Q_0\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^t$.

β) Γνωρίζουμε ότι μετά από τέσσερα χρόνια έχει απομείνει 1 κιλό ραδιενεργού υλικού και από το α) ερώτημα γνωρίζουμε επίσης ότι $Q(t)=Q_0\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^t$. Ζητούμενη είναι η αρχική ποσότητα που θάφτηκε, δηλαδή το Q_0.

Επομένως: $Q(4)=1\Leftrightarrow Q_0\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4=1\Leftrightarrow Q_0\cdot\left(\frac{1}{9}\right)=1\Leftrightarrow Q_0=9$ κιλά.

118 Θέμα 2 - 15687

α) Από τις ιδιότητες των λογαρίθμων, έχουμε:

$$A=\log_4 3+\log_4 \alpha-\log_4 \beta=\log_4(3\alpha)-\log_4\beta=\log_4\frac{3\alpha}{\beta}.$$

β) Η παράσταση Α με $3\alpha=16\beta$, γράφεται:

$$A=\log_4\frac{16\beta}{\beta}=\log_4 16=\log_4 4^2=2\log_4 4=2.$$

119 Θέμα 2 - 15816

α) Είναι

$\alpha+\gamma=\ln 2+\ln 8=\ln(2\cdot 8)=\ln 16=\ln 4^2=2\ln 4=2\beta$.

β) Είναι $\beta+\gamma=\ln 4+\ln 8=\ln(4\cdot 8)=\ln 32=\ln 2^5=5\ln 2=5\alpha$.

Σημείωση :

Οι αριθμοί $2,4,8$ είναι με αυτή τη σειρά διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου αφού $4^2=2\cdot 8$, ενώ οι αριθμοί $\alpha=\ln 2$, $\beta=\ln 4$, $\gamma=\ln 8$ είναι με αυτή τη σειρά διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αφού όπως δείξαμε $2\beta=\alpha+\gamma$.

Γενικά αν α,β,γ είναι με αυτή τη σειρά θετικοί διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, τότε οι αριθμοί $\ln\alpha$, $\ln\beta$, $\ln\gamma$ είναι με αυτή τη σειρά διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

120 Θέμα 2 - 15817

α) Είναι $1<2<3 \Leftrightarrow \ln 1<\ln 2<\ln 3 \Leftrightarrow 0<\alpha<\beta$.

β) Είναι $\beta-\alpha=\ln 3-\ln 2=\ln \frac{3}{2}<\ln e=1$, οπότε πράγματι $\beta-\alpha<1$.

121 Θέμα 2 - 15808

α) Η συνάρτηση f ορίζεται για όλες τις πραγματικές τιμές του x για τις οποίες ισχύει:

$$\begin{aligned} &x+2>0 \Leftrightarrow \\ &x>-2 \end{aligned}$$

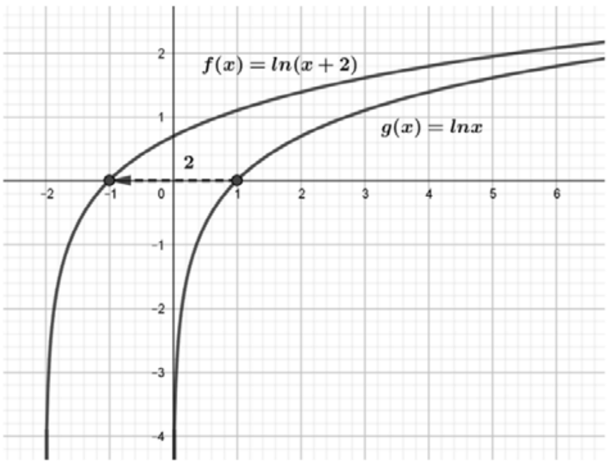
Συνεπώς το πεδίο ορισμού της f είναι το $(-2,+\infty)$.

β) Η τετμημένη του σημείου τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα xx', είναι η λύση της εξίσωσης:

$$\begin{aligned} &f(x)=0 \Leftrightarrow \\ &\ln(x+2)=0 \overset{\ln x=y \Leftrightarrow e^y=x}{\Leftrightarrow} \\ &x+2=e^0 \Leftrightarrow \\ &x+2=1 \Leftrightarrow \\ &x=-1. \end{aligned}$$

Συνεπώς το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα xx' είναι το $(-1,0)$.

γ) Η γραφική παράσταση της $f(x)=g(x+2)=\ln(x+2)$ θα προκύψει από μετατόπιση της γραφικής παράστασης της g κατά δυο μονάδες αριστερά, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

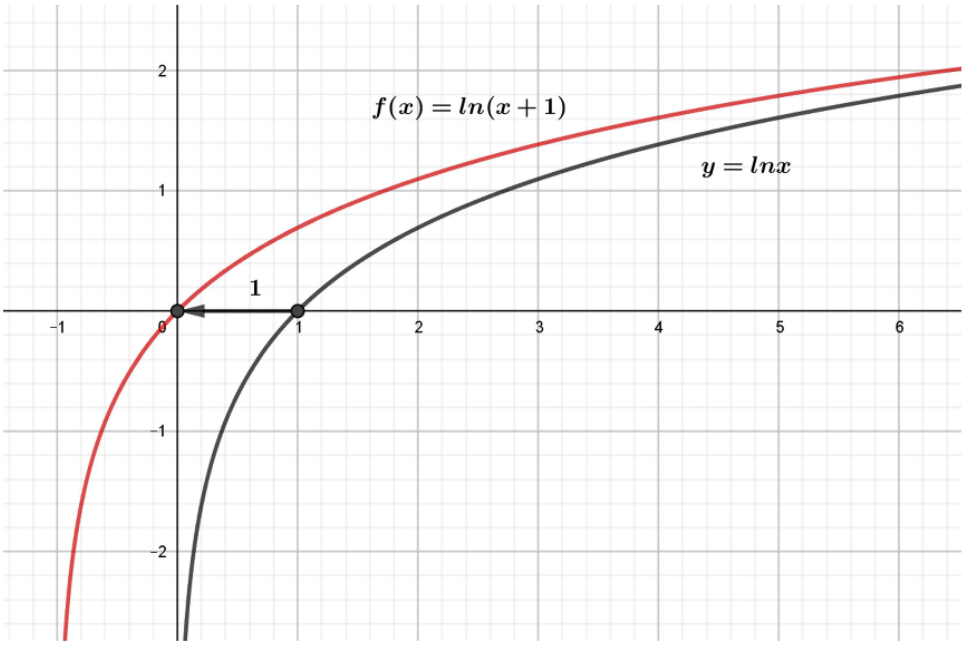


122 Θέμα 2 - 21449

α) Η συνάρτηση ορίζεται για τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $x+1>0 \Leftrightarrow x>-1$. Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $\mathrm{A}=(-1,+\infty)$.

β) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από την αρχή των αξόνων $(0,0)$, αφού για $x=0$, έχουμε $f(0)=\ln(0+1)=\ln 1=0$. Δεν τέμνει τον $x'x$ σε άλλο σημείο, αφού για $y=0$, έχουμε $\ln(x+1)=0 \Leftrightarrow x+1=1 \Leftrightarrow x=0$.

γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f προκύπτει από μετατόπιση της $y=\ln x$ κατά 1 μονάδα αριστερά, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



123 Θέμα 2 - 15675

α) Η συνάρτηση f ορίζεται για όλες τις πραγματικές τιμές του x για τις οποίες ισχύει

$$\begin{aligned}&e^x-1>0\Leftrightarrow\\&e^x>1\Leftrightarrow\\&e^x>e^0\Leftrightarrow\\&x>0\end{aligned}$$

Συνεπώς το πεδίο ορισμού της f είναι το $(0,+\infty)$.

β) Είναι

$$\begin{aligned}&f(x)=0\Leftrightarrow\\&\ln\left(e^x-1\right)=\ln 1\Leftrightarrow\\&e^x-1=1\Leftrightarrow\\&e^x=2\Leftrightarrow\\&x=\ln 2\end{aligned}$$

Η λύση $\ln 2$ είναι δεκτή αφού $\ln 2>\ln 1\Leftrightarrow \ln 2>0$.

124 Θέμα 2 - 15267

α) Από τις ιδιότητες των λογαρίθμων έχουμε:

$$1+\log 3-\log 6=\log 10+\log 3-\log 6=\log\frac{10\cdot 3}{6}=\log 5$$

οπότε η εξίσωση γράφεται $\log(x^2+1)=\log 5$.

β) Η εξίσωση ορίζεται για κάθε $x\in\mathbb{R}$, αφού $x^2+1>0$. Έτσι με $x\in\mathbb{R}$ και με τη βοήθεια του ερωτήματος α) η εξίσωση γράφεται:

$$\log(x^2+1)=\log 5\Leftrightarrow x^2+1=5\Leftrightarrow x^2=4\Leftrightarrow x=2 \text{ ή } x=-2$$

125 Θέμα 2 - 17318

α) Είναι $f(3) = \ln(3^2 - 2 \cdot 3 + 3) = ln6$.

β) Είναι $ln3 + 3ln2 - f(3) = ln3 + ln2^3 - ln6 = ln\frac{24}{6} = ln4$.

γ) Με $x \in \mathbb{R}$, είναι:

$$f(x) = ln4 \Leftrightarrow \ln(x^2 - 2x + 3) = ln4 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 3 = 4 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0.$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου $x^2 - 2x - 1$ είναι: $\Delta = 4 + 4 = 8 = 4 \cdot 2$ και

οι ρίζες: $x_{1,2} = \frac{2\pm2\sqrt{2}}{2} = \frac{2(1\pm\sqrt{2})}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$.

Άρα: $x_1 = 1 + \sqrt{2}$ και $x_2 = 1 - \sqrt{2}$.

126 Θέμα 2 - 21450

α) Ισχύει $x^2 + 4 > 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x, οπότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $\mathrm{A}_f = \mathbb{R}$. Η συνάρτηση g ορίζεται για τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $x > 0$. Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι το $\mathrm{A}_g = (0, +\infty)$.

β) Γνωρίζουμε ότι για $\alpha > 0, \alpha \neq 1$ και $x_1, x_2 > 0$ ισχύει η ισοδυναμία:

$$\log_\alpha x_1 = \log_\alpha x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2.$$

Οπότε έχουμε:

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow$

$\ln(x^2 + 4) = \ln x + \ln 4 \Leftrightarrow$

$\ln(x^2 + 4) = \ln(4x) \Leftrightarrow$

$x^2 + 4 = 4x \Leftrightarrow$

$x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow$

$(x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$x = 2 > 0$, δεκτή.

127 Θέμα 4 - 21446

α) Η συνάρτηση ορίζεται για τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $e^x - 2 > 0$

Δηλαδή: $e^x > 2 \overset{\ln x \nearrow}{\Leftrightarrow} \ln e^x > \ln 2 \Leftrightarrow x > \ln 2$.

Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι $\mathrm{A} = (\ln 2, +\infty)$.

β) Έχουμε

$$\begin{aligned}
&f(x) + x = 3\ln 2 \Leftrightarrow \\
&\ln\left(e^x - 2\right) + x = \ln 2^3 \Leftrightarrow \\
&\ln\left(e^x - 2\right) + \ln e^x = \ln 8 \Leftrightarrow \\
&\ln\left[\left(e^x - 2\right) \cdot e^x\right] = \ln 8 \Leftrightarrow \\
&\left(e^x\right)^2 - 2e^x = 8 \overset{e^x = y}{\Leftrightarrow} \\
&y^2 - 2y - 8 = 0.
\end{aligned}$$

Η τελευταία είναι εξίσωση 2^{ου} βαθμού με διακρίνουσα $\Delta=(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-8)=36>0$ και ρίζες $y=4$, $y=-2$. Άρα $e^x=4 \Leftrightarrow x=\ln 4$ (η εξίσωση $e^x=-2$ είναι αδύνατη, διότι $e^x>0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x). Η λύση $x=\ln 4$ είναι δεκτή, διότι $\ln 4>\ln 2$.

Τελικά η εξίσωση $f(x)+x=3\ln 2$ έχει λύση $x=\ln 4$.

γ) Έχουμε

$$
\begin{aligned}
& f(x)+x\ge 3\ln 2 \Leftrightarrow \\
& \ln\left(e^x-2\right)+x\ge \ln 2^3 \Leftrightarrow \\
& \ln\left(e^x-2\right)+\ln e^x\ge \ln 8 \Leftrightarrow \\
& \ln\left[\left(e^x-2\right)\cdot e^x\right]\ge \ln 8 \Leftrightarrow \\
& \left(e^x\right)^2-2e^x\ge 8 \overset{e^x=y}{\Leftrightarrow} \\
& y^2-2y-8\ge 0 \qquad (1).
\end{aligned}
$$

Από το β) ερώτημα γνωρίζουμε ότι το τριώνυμο y^2-2y-8 έχει ρίζες $y=4$ και $y=-2$. Άρα η ανίσωση (1) αληθεύει για $y\le -2$ ή $y\ge 4$, δηλαδή $e^x\le -2$ (που είναι αδύνατη) ή $e^x\ge 4 \Leftrightarrow \ln e^x\ge \ln 4 \Leftrightarrow x\ge \ln 4$. Πρέπει και $x>\ln 2$, οπότε τελικά η ανίσωση $f(x)+x\ge 3\ln 2$ αληθεύει για $x\ge \ln 4$.

128 Θέμα 4 - 21445

α) Πρέπει

$$
\begin{aligned}
& \frac{4^x-1}{2^x+5}>0 \overset{2^x+5>0}{\Leftrightarrow} \\
& 4^x-1>0 \Leftrightarrow \\
& 4^x>1 \Leftrightarrow \\
& 4^x>4^0 \Leftrightarrow \\
& x>0.
\end{aligned}
$$

Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $A=(0,+\infty)$.

β) Γνωρίζουμε ότι για $\alpha>0, \alpha\ne 1$ και $x_1, x_2>0$ ισχύει η ισοδυναμία: $\log_\alpha x_1=\log_\alpha x_2 \Leftrightarrow x_1=x_2$. Οπότε έχουμε:

$$
\begin{aligned}
& f(x)=\log 3-\log 7 \Leftrightarrow \\
& \log\frac{4^x-1}{2^x+5}=\log\frac{3}{7} \Leftrightarrow \\
& \frac{4^x-1}{2^x+5}=\frac{3}{7} \Leftrightarrow \\
& 7\cdot 4^x-7=3\cdot 2^x+15 \Leftrightarrow \\
& 7\cdot\left(2^x\right)^2-3\cdot 2^x-22=0 \overset{2^x=y}{\Leftrightarrow} \\
& 7\cdot y^2-3\cdot y-22=0.
\end{aligned}
$$

Η τελευταία είναι εξίσωση 2^{ου} βαθμού με διακρίνουσα $\Delta=(-3)^2-4\cdot 7\cdot(-22)=625>0$ και ρίζες $y_1=\frac{3+25}{14}=\frac{28}{14}=2$, $y_2=\frac{3-25}{14}=\frac{-22}{14}=-\frac{11}{7}$.

Οπότε $2^x = 2 \Leftrightarrow x = 1$, που είναι δεκτή διότι $x > 0$ (η εξίσωση $2^x = -\frac{11}{7}$ είναι αδύνατη).

γ) Έχουμε

$$f(x) > \log 3 - \log 7 \Leftrightarrow$$
$$\log\frac{4^x - 1}{2^x + 5} > \log\frac{3}{7} \Leftrightarrow$$
$$\frac{4^x - 1}{2^x + 5} > \frac{3}{7} \overset{2^x+5>0}{\Leftrightarrow}$$
$$7 \cdot 4^x - 7 > 3 \cdot 2^x + 15 \Leftrightarrow$$
$$7 \cdot \left(2^x\right)^2 - 3 \cdot 2^x - 22 > 0 \overset{2^x = y}{\Leftrightarrow}$$
$$7 \cdot y^2 - 3 \cdot y - 22 > 0 \qquad (1)$$

Από το β) ερώτημα γνωρίζουμε ότι το τριώνυμο $7 \cdot y^2 - 3 \cdot y - 22$ έχει ρίζες $y = 2$ και $y = -\frac{11}{7}$. Οπότε η ανίσωση (1) αληθεύει για $y < -\frac{11}{7}$ ή $y > 2$, δηλαδή $2^x < -\frac{11}{7}$ (αδύνατη διότι $2^x > 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x) ή $2^x > 2 \Leftrightarrow x > 1$.

Τελικά η ανίσωση αληθεύει για $x > 1$.

129 Θέμα 4 - 15021

α) Η συνάρτηση f ορίζεται για κάθε πραγματική τιμή του x για την οποία ισχύει $x \neq 0$. Συνεπώς το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathrm{A} = \left(-\infty, 0\right) \cup \left(0, +\infty\right)$.

β) Για κάθε $x \in \mathrm{A}$ και $-x \in \mathrm{A}$. Επίσης,

$f(-x) = \frac{(-x)^2 + 1}{-x} = -\frac{x^2 + 1}{x} = -f(x)$, για κάθε $x \in \mathrm{A}$, που σημαίνει ότι η συνάρτηση f είναι περιττή, δηλαδή η γραφική της παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας το $\mathrm{O}(0,0)$.

γ) Είναι $\ln\frac{1}{2} = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2$ και αφού f περιττή είναι $f(\ln\frac{1}{2}) = f(-\ln 2) = -f(\ln 2)$, δηλαδή $f(\ln 2) + f(\ln\frac{1}{2}) = 0$.

δ) Για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$ είναι $\eta\mu(\pi + \theta) = -\eta\mu\theta$ και αφού f περιττή είναι $f(\eta\mu(\pi + \theta)) = f(-\eta\mu\theta) = -f(\eta\mu\theta)$, δηλαδή $f(\eta\mu\theta) + f(\eta\mu(\pi + \theta)) = 0$.

130 Θέμα 4 - 15823

α) Από την ταυτότητα της διαίρεσης έχουμε $P(x) = (4x^2 - 1)(3x - 2) + 1$, οπότε η ζητούμενη εξίσωση γίνεται ισοδύναμα

$$P(x) = 1 \Leftrightarrow (4x^2 - 1)(3x - 2) + 1 = 1 \Leftrightarrow (4x^2 - 1)(3x - 2) = 0$$

Εύκολα πλέον βρίσκουμε ότι οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί $\pm\frac{1}{2}$ και $\frac{2}{3}$.

β) Δείξαμε στο α) ότι αριθμοί που ικανοποιούν την εξίσωση $P(x)=1$ είναι οι $\pm\frac{1}{2}$ και $\frac{2}{3}$.

Συνεπώς για να ήταν $P(\log 5)=1$, θα έπρεπε $\log 5=\frac{1}{2}$ ή $\log 5=-\frac{1}{2}$ ή $\log 5=\frac{2}{3}$.

Όμως $\log 5\neq -\frac{1}{2}$ αφού $5>1 \Leftrightarrow \log 5>0$.

Επίσης $\log 5=\frac{1}{2} \Leftrightarrow 5=10^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 5=\sqrt{10}$ το οποίο είναι άτοπο .

Τέλος $\log 5=\frac{2}{3} \Leftrightarrow 5=10^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow 5=\sqrt[3]{10^2}$ το οποίο επίσης είναι άτοπο.

Συνεπώς $P(\log 5)\neq 1$.

γ) Είναι $P(x)=(4x^2-1)(3x-2)+1$, οπότε $P(-1)=(4(-1)^2-1)(3(-1)-2)+1=-14$ και $P(0)=(-1)(-2)+1=3$.

Αφού οι τιμές $P(-1), P(0)$ είναι ετερόσημες, η εξίσωση $P(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(-1,0)$.

131 Θέμα 4 - 15474

α) Έχουμε: $P(x)=e^{lne}x^3+4x^2ln\sqrt{e}+2=ex^3+4x^2lne^{\frac{1}{2}}+2=$

$$=ex^3+4x^2\cdot\frac{1}{2}lne+2=ex^3+2x^2+2.$$

β) Οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ με την ευθεία ε: $y=ex+4$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$P(x)-(ex+4)=0 \Leftrightarrow ex^3+2x^2+2-ex-4=0 \Leftrightarrow ex^3+2x^2-ex-2=0 \Leftrightarrow$
$x^2(ex+2)-(ex+2)=0 \Leftrightarrow (ex+2)\cdot(x^2-1)=0.$

Άρα οι τετμημένες των σημείων τομής είναι: $x=1$, $x=-1$ και $x=-\frac{2}{e}$.

γ) Για να βρούμε τα διαστήματα του x που η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ είναι πάνω από την ευθεία ε: $y=ex+4$ θα λύσουμε την ανίσωση:

$P(x)-(ex+4)>0 \Leftrightarrow (ex+2)\cdot(x^2-1)>0.$

Οι ρίζες του $(ex+2)\cdot(x^2-1)$ είναι $x=1$, $x=-1$ και $x=-\frac{2}{e}$.

Το πρόσημο του $(ex+2)\cdot(x^2-1)$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		-1		$-\frac{2}{e}$		1		$+\infty$
$(ex+2)\cdot(x^2-1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα $x\in(-1,-\frac{2}{e})\cup(1,+\infty)$.

δ) Παρατηρούμε ότι το $P(e)-e^2-4$ είναι η τιμή του $P(x)-(ex+4)$ για $x=e$.

Σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα θα έχουμε $P(e)-e^2-4>0$, αφού $e>1$.

132 Θέμα 4 - 15251

α) Αφού το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-1$, θα ισχύει ότι $P(1)=0$.

Είναι $P(1)=0 \Leftrightarrow 2-9+\alpha-2-6=0 \Leftrightarrow \alpha=15$.

β) Για $\alpha = 15$ έχουμε $P(x) = 2x^3 - 9x^2 + 13x - 6$.

i. Η διαίρεση $P(x):\left(x^2 - 3x + 2\right)$ φαίνεται παρακάτω.

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - 9x^2 + 13x - 6 & x^2 - 3x + 2 \\ \cline{2-2} -2x^3 + 6x^2 - 4x \phantom{{}-6} & 2x - 3 \\ \cline{1-1} -3x^2 + 9x - 6 & \\ 3x^2 - 9x + 6 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Η ταυτότητα της διαίρεσης είναι η εξής: $P(x) = \left(x^2 - 3x + 2\right)(2x - 3)$.

ii. Αξιοποιώντας την παραπάνω ταυτότητα διαίρεσης έχουμε :

$P(x) < 0 \Leftrightarrow \left(x^2 - 3x + 2\right)(2x - 3) < 0$

Το πρόσημο του πολυωνύμου $P(x) = \left(x^2 - 3x + 2\right)(2x - 3)$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
$x^2 - 3x + 2$		+	0	-		-	0	+	
$2x - 3$		-		-	0	+		+	
$P(x)$		-	0	+	0	-	0	+	

Συνεπώς η ανίσωση $P(x) < 0 \Leftrightarrow \left(x^2 - 3x + 2\right)(2x - 3) < 0$ αληθεύει για κάθε $x \in (-\infty, 1) \cup \left(\frac{3}{2}, 2\right)$.

iii. Είναι $\ln 2 < \ln e \Leftrightarrow \ln 2 < 1$ οπότε αφού δείξαμε παραπάνω ότι $P(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 1) \cup \left(\frac{3}{2}, 2\right)$, είναι $P(\ln 2) < 0$.

133 Θέμα 4 - 15822

α) Είναι $P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + x = x\left(\alpha x^2 + \beta x + 1\right)$, οπότε έχει μία ρίζα τη $x = 0$. Συνεπώς οι άλλες δύο ακέραιες ρίζες, θα είναι ρίζες του τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + 1$, που επειδή έχει ακέραιους συντελεστές, θα πρέπει οι δύο αυτές ακέραιες ρίζες να είναι διαιρέτες του σταθερού όρου, δηλαδή του 1. Δεδομένου ότι οι μόνοι διαιρέτες του 1 είναι το 1 και το -1, συμπεραίνουμε ότι οι άλλες δύο ακέραιες ρίζες είναι το 1 και το -1.

Τελικά το $P(x)$ έχει ρίζες τους αριθμούς 0 , 1 και -1.

β) Είναι $P(1)=0 \Leftrightarrow \alpha+\beta+1=0$ (1).

Επίσης $P(-1)=0 \Leftrightarrow -\alpha+\beta-1=0$ (2).

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) έχουμε ότι $2\beta=0 \Leftrightarrow \beta=0$ και με αντικατάσταση στην (1) έχουμε ότι $\alpha=-1$.

γ) Με $\alpha=-1$ και $\beta=0$ είναι $P(x)=-x^3+x=x(1-x^2)$

i. Το πρόσημό του $P(x)$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x		-		-	0	+		+	
$1-x^2$		-	0	+		+	0	-	
$P(x)$		+	0	-	0	+	0	-	

Συνεπώς η ανίσωση $P(x)>0$ αληθεύει για κάθε $x \in (-\infty,-1) \cup (0,1)$.

ii. Είναι $\log\sqrt{10}=\log 10^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\log 10=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$, οπότε $P(\log\sqrt{10})=P(\frac{1}{2})>0$, αφού όπως δείξαμε παραπάνω $P(x)>0$ για $x \in (0,1)$.

134 Θέμα 4 - 15093

α) Καθώς υπάρχουν λογάριθμοι μόνο θετικών αριθμών, απαιτούμε $10^x-1>0$, άρα $10^x>1 \Leftrightarrow 10^x>10^0 \Leftrightarrow x>0$, αφού η συνάρτηση $g(x)=10^x$ είναι γνησίως αύξουσα στο R.

β) Πρέπει $f(x)>0 \Leftrightarrow log(10^x-1)>0 \Leftrightarrow log(10^x-1)>log1$ και καθώς η συνάρτηση $h(x)=logx$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ παίρνουμε $10^x-1>1 \Leftrightarrow 10^x>2$ σχέση που γράφεται $10^x>10^{log2}$. Ώστε $x>log2$, δηλαδή $x \in (log2,+\infty)$.

γ) Έχουμε $f(x)+x=log(10^x-1)+log10^x=log[10^x(10^x-1)]=$
$log(10^x\cdot 10^x-10^x)=log(10^{2x}-10^x)$.

δ) Πρέπει να λύσουμε την εξίσωση $f(x)=-x \Leftrightarrow f(x)+x=0 \Leftrightarrow log(10^{2x}-10^x)=0$ άρα $10^{2x}-10^x=1 \Leftrightarrow (10^x)^2-10^x-1=0$. Θέτοντας $10^x=y>0$, παίρνουμε την δευτεροβάθμια εξίσωση $y^2-y-1=0$ με διακρίνουσα $\Delta=(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-1)=5$, οπότε $y=\frac{-(-1)\pm\sqrt{5}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Έτσι $y=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, αφού $y>0$.

Τελικά $10^x=\frac{\sqrt{5}+1}{2} \Leftrightarrow x=log\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$.

Άρα το ζητούμενο σημείο είναι το $\left(log\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right),-log\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\right)$.

135 Θέμα 4 - 15690

α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $A = \mathbb{R} - \{0\}$.

Για κάθε $x \in A$, είναι φανερό ότι $-x \in A$ και

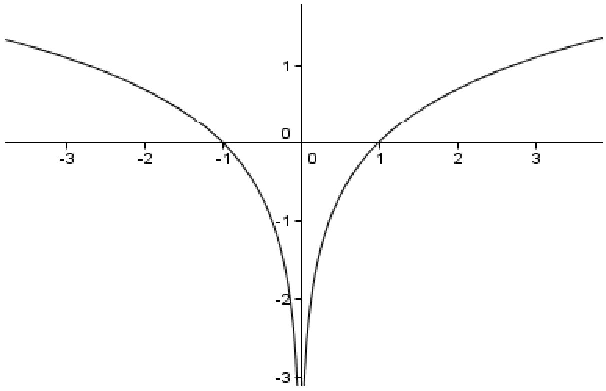
$$f(-x) = \frac{1}{2}\ln(-x)^2 = \frac{1}{2}\ln x^2 = f(x)$$

Επομένως η f είναι άρτια, οπότε η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$.

β) Για κάθε $x > 0$ έχουμε:

$$f(x) = \frac{1}{2}\ln x^2 = \frac{1}{2}\ln|x|^2 = 2\cdot\frac{1}{2}\ln|x| = \ln|x| = \ln x$$

γ) Η γραφική παράσταση της f φαίνεται στο διπλανό σχήμα και, σύμφωνα με τα προηγούμενα ερωτήματα, προκύπτει αν σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \ln x,\ x > 0$ και στη συνέχεια θεωρήσουμε το συμμετρικό του σχήματος ως προς τον άξονα $y'y$.



δ) Η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από την ευθεία $y = 2$, μόνο όταν $f(x) < 2$. Με $x \neq 0$ έχουμε:

$$f(x) < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln x^2 < 2 \Leftrightarrow \ln x^2 < 4 \Leftrightarrow x^2 < e^4 \Leftrightarrow |x| < e^2 \Leftrightarrow -e^2 < x < e^2$$

Άρα, η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από την ευθεία $y = 2$ για κάθε x με $x \in (-e^2, 0) \cup (0, e^2)$

136 Θέμα 4 - 15015

α) Έχουμε $P(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - x - 2) = 0$. Οπότε $x = 0$ ή $x^2 - x - 2 = 0$ που έχει $\Delta = 9$ και ρίζες $x = -1$ και $x = 2$. Τελικά ρίζες της εξίσωσης $P(x) = 0$ είναι οι $x = 0$, $x = -1$ και $x = 2$.

β) Για να ορίζεται η εξίσωση, πρέπει $x > 0$. Θέτουμε $\ln x = \omega$ και η εξίσωση γίνεται $P(\omega) = 0$.

Από το α) ερώτημα έχουμε τις ρίζες $\omega = 0$, $\omega = -1$, $\omega = 2$. Οπότε προκύπτουν τρείς εξισώσεις:

i) $\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = \ln 1 \Leftrightarrow x = 1$ δεκτή.

ii) $\ln x = -1 \Leftrightarrow \ln x = \ln e^{-1} \Leftrightarrow x = e^{-1}$ δεκτή.

iii) $\ln x = 2 \Leftrightarrow \ln x = \ln e^2 \Leftrightarrow x = e^2$ δεκτή.

γ) Η ανίσωση $x^3-x^2-2x>0 \Leftrightarrow P(x)>0 \Leftrightarrow x(x^2-x-2)>0$ αληθεύει για $x\in(-1,0)\cup(2,+\infty)$, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
x^2-x-2		+	0	−		−	0	−	
x		−		−	0	+		+	
$P(x)$		−	0	+	0	−	0	+	

Οπότε για την ανίσωση $(\ln x)^3-(\ln x)^2-2(\ln x)>0 \Leftrightarrow P(\ln x)>0$, προκύπτει ότι $\ln x\in(-1,0)\cup(2,+\infty)$. Λύνουμε τις δύο ανισώσεις:

i) $-1<\ln x<0 \Leftrightarrow \ln e^{-1}<\ln x<\ln 1 \overset{\nearrow}{\Leftrightarrow} \frac{1}{e}<x<1$

ii) $2<\ln x \Leftrightarrow \ln e^2<\ln x \overset{\nearrow}{\Leftrightarrow} e^2<x$.

Τελικά $x\in\left(\frac{1}{e},1\right)\cup\left(e^2,+\infty\right)$.

137 Θέμα 4 - 15679

α) Η ανίσωση $\frac{\omega^2-1}{\omega-3}>0$ με $\omega\neq 3$ είναι ισοδύναμη με την $(\omega^2-1)(\omega-3)>0$.

Το πρόσημο του $(\omega^2-1)(\omega-3)$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

ω	-∞		-1		1		3		+∞
ω-3		-		-		-	0	+	
ω^2-1		+	0	-	0	+		+	
$(\omega-3)(\omega^2-1)$		-	0	+	0	-	0	+	

Συνεπώς η ανίσωση $\frac{\omega^2-1}{\omega-3}>0$ αληθεύει για κάθε $\omega\in(-1,1)\cup(3,+\infty)$.

β) Η παράσταση A ορίζεται για κάθε πραγματική τιμή του x για την οποία ισχύει $\frac{e^{2x}-1}{e^x-3}>0$. Αν θέσουμε $e^x=\omega$ η ανίσωση $\frac{e^{2x}-1}{e^x-3}>0$ γίνεται $\frac{\omega^2-1}{\omega-3}>0$ που όπως δείξαμε στο α) αληθεύει για $\omega\in(-1,1)\cup(3,+\infty)$.

Συνεπώς θα πρέπει $-1<\omega<1 \Leftrightarrow -1<e^x<1 \Leftrightarrow x<0$ ή $\omega>3 \Leftrightarrow e^x>3 \Leftrightarrow x>\ln 3$

Τελικά η παράσταση A ορίζεται για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(\ln 3,+\infty)$.

γ) Η εξίσωση $A=-\ln 3$ ορίζεται για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(\ln 3,+\infty)$ και γίνεται ισοδύναμα

$$\ln\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{x}-3}\right)=\ln 3^{-1}\Leftrightarrow$$
$$\frac{e^{2x}-1}{e^{x}-3}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow$$
$$3e^{2x}-3=e^{x}-3\Leftrightarrow$$
$$3e^{2x}-e^{x}=0\Leftrightarrow$$
$$e^{x}\left(3e^{x}-1\right)=0\overset{e^{x}\neq 0}{\Leftrightarrow}$$
$$3e^{x}-1=0\Leftrightarrow$$
$$e^{x}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow$$
$$x=\ln\frac{1}{3}$$

και επειδή $\frac{1}{3}<1\Leftrightarrow \ln\frac{1}{3}<0$ η λύση $x=\ln\frac{1}{3}$ είναι δεκτή.

138 Θέμα 4 - 15678

α) Το $P(x)=-x^3-4x^2-x+6$ έχει άθροισμα συντελεστών ίσο με το 0, οπότε έχει ρίζα το 1.

Το σχήμα Horner για τη διαίρεση $P(x):(x-1)$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα

-1	-4	-1	6	1
	-1	-5	-6	
-1	-5	-6	0	

Συνεπώς η ανίσωση $P(x)<0$ γίνεται ισοδύναμα $(x-1)(-x^2-5x-6)<0$.

Ο πίνακας προσήμου του $(x-1)(-x^2-5x-6)$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα προσήμων

x	$-\infty$		-3		-2		1		$+\infty$
x-1		-		-		-	0	+	
$-x^2-5x-6$		-	0	+	0	-		-	
$(x-1)(-x^2-5x-6)$		+	0	-	0	+	0	-	

Συνεπώς η ανίσωση $P(x)<0$ αληθεύει για κάθε $x\in(-3,-2)\cup(1,+\infty)$.

β) Με βάση το α) ερώτημα, η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ θα πρέπει να είναι κάτω από τον άξονα xx', για κάθε $x\in(-3,-2)\cup(1,+\infty)$. Το μόνο από τα δοσμένα σχήματα που ικανοποιεί αυτήν την απαίτηση είναι το γ.

Εναλλακτικά, αφού $P(0)=6$ θα πρέπει η γραφική παράσταση να διέρχεται από το σημείο (0,6) και το μόνο σχήμα που ικανοποιεί αυτήν την απαίτηση είναι το γ.

Εναλλακτικά, αφού $P(0)=6$ θα πρέπει η γραφική παράσταση να διέρχεται από το σημείο (0,6) και το μόνο σχήμα που ικανοποιεί αυτήν την απαίτηση είναι το γ.

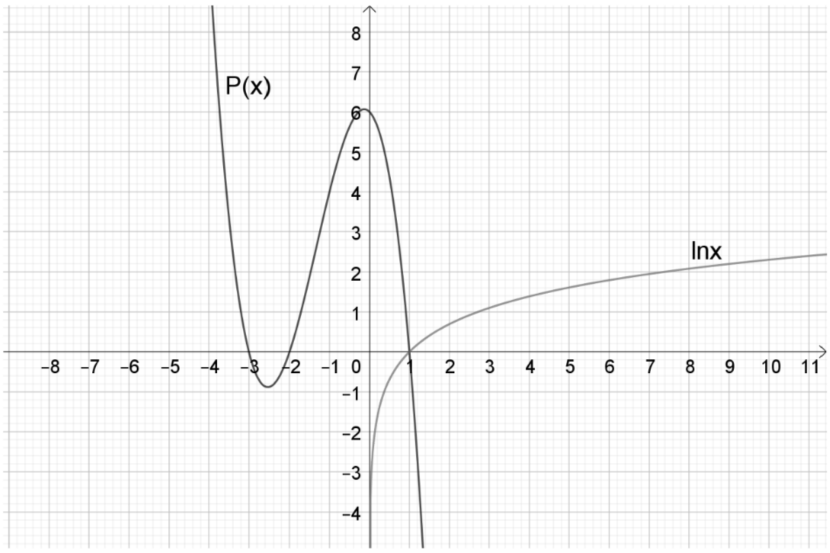
γ) Αν στο σχήμα γ συμπληρώσουμε τη γραφική παράσταση της $\ln x$ όπως φαίνεται παρακάτω, θα διαπιστώσομε ότι έχουν ένα μόνο κοινό σημείο με τετμημένη 1, που σημαίνει ότι η εξίσωση $P(x)=\ln x$ έχει μοναδική λύση την $x=1$.

Εναλλακτικά, η εξίσωση $P(x)=\ln x$ ορίζεται για $x>0$.

Για $x>1$ έχουμε ότι $P(x)<0<\ln x$ που σημαίνει ότι η εξίσωση $P(x)=\ln x$ δεν έχει ρίζα στο $(1,+\infty)$.

Επίσης για $0<x<1$ έχουμε ότι $\ln x<0<P(x)$ που σημαίνει ότι η εξίσωση $P(x)=\ln x$ δεν έχει ρίζα στο $(0,1)$.

Τέλος $P(1)=\ln 1=0$ που σημαίνει ότι η εξίσωση $P(x)=\ln x$ έχει μοναδική λύση την $x=1$.



139 Θέμα 4 - 16001

α) Η συνάρτηση f ορίζεται μόνο όταν $x>0$ και $x\ln x\geq 0$, δηλαδή μόνο όταν $x\geq 1$, οπότε $A_f=[1,+\infty)$. Ομοίως η g ορίζεται μόνο όταν $x>0$ και $\ln x\geq 0$, δηλαδή μόνο όταν $x\geq 1$, οπότε $A_g=[1,+\infty)$.

β) Με $x\geq 1$ έχουμε:

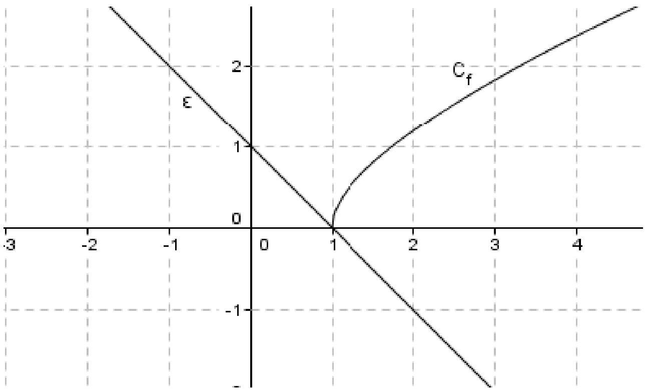
$$f(x)-g(x)=\sqrt{x\ln x}-\sqrt{\ln x}=\left(\sqrt{x}-1\right)\sqrt{\ln x}\geq 0$$

αφού καθένας από τους όρους του γινομένου είναι μη αρνητικός. Επομένως, η γραφική παράσταση της f είναι από τη γραφική παράσταση της g και πάνω.

γ) i. Από τη γραφική παράσταση της f προκύπτει ότι η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της $A_f=[1,+\infty)$.

ii. Επειδή $\frac{5}{3}-\frac{7}{5}=\frac{25-21}{15}=\frac{4}{15}>0$, ισχύει $\frac{5}{3}>\frac{7}{5}$ και αφού η f είναι γνησίως αύξουσα συμπεραίνουμε ότι $f\left(\frac{5}{3}\right)>f\left(\frac{7}{5}\right)$.

δ) Η ευθεία $\varepsilon: y = 1 - x$ τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία $(1,0)$ και $(0,1)$ αντίστοιχα όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, απ' όπου προκύπτει ότι το μοναδικό κοινό σημείο της με την C_f είναι το $(1,0)$. Αυτό σημαίνει ότι η εξίσωση $f(x) = 1 - x$ έχει μοναδική ρίζα την $x = 1$.



Επισήμανση.

Στο πλαίσιο μιας αλγεβρικής λύσης θα μπορούσαμε να αναζητήσουμε ρίζες στο διάστημα $[1, +\infty)$, να διαπιστώσουμε ότι ο αριθμός 1 είναι η μία ρίζα της και να αποδείξουμε ότι αν $x > 1$ έχουμε $f(x) > f(1)$, δηλαδή $f(x) > 0$ και $1 - x < 0$, οπότε η εξίσωση δεν έχει ρίζα μεγαλύτερη από τη μονάδα.

γ) Στα ερωτήματα α) και β) δείξαμε ότι $Q(t) = 9 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^t$. Έχουμε

$$Q(t) = \frac{1}{81} \Leftrightarrow$$

$$9 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^t = \frac{1}{81} \Leftrightarrow$$

$$3^2 \cdot \left(3^{-\frac{1}{2}}\right)^t = 3^{-4} \Leftrightarrow$$

$$3^{2-\frac{t}{2}} = 3^{-4} \Leftrightarrow$$

$$2 - \frac{t}{2} = -4 \Leftrightarrow$$

$$\frac{t}{2} = 6 \Leftrightarrow t = 12.$$

Συνεπώς μετά από 12 χρόνια η ποσότητα που θα έχει απομείνει θα είναι $\frac{1}{81}$ κιλά.

140 Θέμα 3 - 14235

α. • Η ευθεία (ε) τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0,2)$, οπότε έχει εξίσωση $y = \alpha x + 2$. Επειδή επιπλέον διέρχεται από το σημείο $(2, 0)$ έχουμε $0 = \alpha \cdot 2 + 2 \Leftrightarrow \alpha = -1$. Άρα $\varepsilon: y = -x + 2$.

• Η ευθεία (η) σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega = 45^\circ$, οπότε $\lambda_\eta = \varepsilon\varphi\omega = 1$, οπότε $\eta: y = x + \beta$. Επειδή επιπλέον διέρχεται από το σημείο $(4, 0)$ έχουμε $0 = 4 + \beta \Leftrightarrow \beta = -4$. Άρα $\eta: y = x - 4$.

β. Οι συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών (ε) και (η) είναι η λύση του συστήματος

$$\begin{cases} y = -x + 2 \\ y = x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2 = x - 4 \\ y = x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$$

Άρα το κοινό σημείο των ευθειών (ε) και (ζ) είναι το $(3, -1)$.

141 Θέμα 3 - 14237

α. Έστω x , y , z οι ηλικίες της μητέρας, του παιδιού και του πατέρα αντίστοιχα.

Έχουμε $\begin{cases} x=3y \\ \dfrac{z}{y}=\dfrac{11}{3} \\ x+y+z=115 \end{cases}$ (Σ)

β. Το σύστημα (Σ) γράφεται $\begin{cases} x=3y \\ z=\dfrac{11}{3}y \\ x+y+z=115 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3y & (1) \\ z=\dfrac{11}{3}y & (2) \\ 3y+y+\dfrac{11}{3}y=115 & (3) \end{cases}$

Η $(3) \Leftrightarrow 9y+3y+11y=345 \Leftrightarrow 23y=345 \Leftrightarrow y=\dfrac{345}{23} \Leftrightarrow y=15$.

Οπότε $x=3\cdot 15=45$ και $z=\dfrac{11}{3}\cdot 15=55$.

Άρα η μητέρα είναι 45 ετών, το παιδί 15 ετών και ο πατέρας 55 ετών.

142 Θέμα 3 - 14979

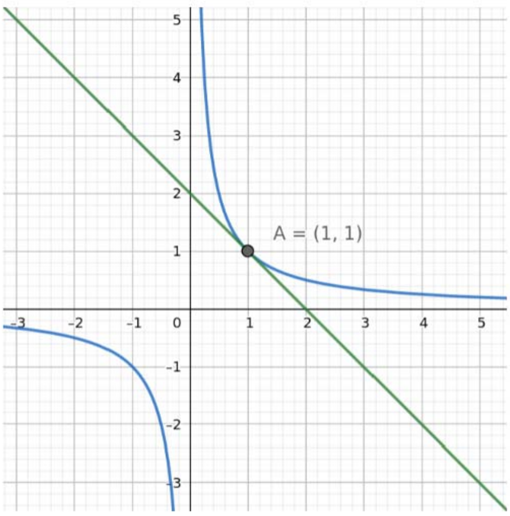
α) Το σύστημα (Σ) έχει νόημα για $x\neq 0$. Αντικαθιστώντας το y από την πρώτη εξίσωση στη δεύτερη έχουμε:

$$-x+2=\frac{1}{x} \Leftrightarrow -x^2+2x=1 \Leftrightarrow x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow (x-1)^2=0 \Leftrightarrow x=1.$$

Για $x=1$ η πρώτη εξίσωση δίνει $y=-1+2 \Leftrightarrow y=1$.

Συνεπώς το σύστημα έχει μοναδική λύση την $(x,y)=(1,1)$.

β) Η εξίσωση $y=-x+2$ παριστάνει μία ευθεία, ενώ η εξίσωση $y=\dfrac{1}{x}$ παριστάνει μία υπερβολή. Η λύση του συστήματος $(x,y)=(1,1)$ είναι οι συντεταγμένες του μοναδικού σημείου τομής τους, όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



143 Θέμα 3 - 15392

α) Το σημείο Α έχει τετμημένη μηδέν και τεταγμένη $f(0) = 2^0 = 1$, έτσι είναι $A(0,1)$.

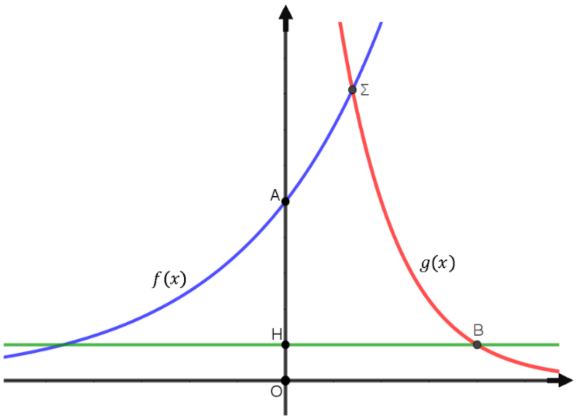
Το σημείο Β έχει τεταγμένη $\frac{1}{5}$ και τετμημένη x για την οποία ισχύει $g(x) = \frac{1}{5} \Leftrightarrow 5^{1-x} = 5^{-1}$.

Άρα $1 - x = -1$, έτσι $x = 2$. Ώστε $B(2, \frac{1}{5})$.

β) Το σημείο Σ έχει τετμημένη x ώστε $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2^x = 5^{1-x} \Leftrightarrow 2^x = \frac{5}{5^x} \Leftrightarrow$

$2^x \cdot 5^x = 5$. Έτσι $10^x = 5$ άρα $x = log5$.

γ) Είναι $x_B - x_\Sigma = 2 - \log 5 = \log(10^2) - \log 5 = \log\left(\frac{100}{5}\right) = \log 20$.



144 Θέμα 3 - 15676

α) Η συνάρτηση f ορίζεται για όλες τις πραγματικές τιμές του x για τις οποίες ισχύει

$$\begin{aligned} &e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow \\ &e^x > 1 \Leftrightarrow \\ &e^x > e^0 \Leftrightarrow \\ &x > 0 \end{aligned}$$

Συνεπώς το πεδίο ορισμού της f είναι το $(0, +\infty)$.

β) Οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα xx', είναι οι λύσεις της εξίσωσης

$$\begin{aligned} &f(x) = 0 \Leftrightarrow \\ &\ln(e^x - 1) = \ln 1 \Leftrightarrow \\ &e^x - 1 = 1 \Leftrightarrow \\ &e^x = 2 \Leftrightarrow \\ &x = \ln 2 \end{aligned}$$

Η λύση $\ln 2$ είναι δεκτή αφού $\ln 2 > \ln 1 \Leftrightarrow \ln 2 > 0$.

Συνεπώς το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα xx' είναι το $(\ln 2, 0)$.

γ) Η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τον άξονα xx', για όλες τις τιμές του x που είναι λύσεις της ανίσωσης

$$\begin{aligned}
&f(x)<0 \Leftrightarrow \\
&\ln\left(e^x-1\right)<\ln 1 \Leftrightarrow \\
&e^x-1<1 \Leftrightarrow \\
&e^x<2 \Leftrightarrow \\
&x<\ln 2
\end{aligned}$$

Όμως πρέπει εξ αρχής $x>0$, οπότε τελικά η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τον xx' όταν $0<x<\ln 2$.