

Αναστάσιος Χ. Μπάρλας

Άλγεβρα

Β' Λυκείου

Τράπεζα
Θεμάτων
2022

ενημέρωση 6/5/2022

ΘΕΜΑΤΑ ΤΡΑΠΕΖΑΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

1.1 Γραμμικά συστήματα

1 Θέμα 2 - 15011

Ο Κώστας καταθέτει σε μια τράπεζα 15 χαρτονομίσματα των 20 € και 50€. Συμβολίζουμε με x και y το πλήθος των χαρτονομισμάτων των 20 € και 50 € αντίστοιχα.

α. i. Δίνονται οι εξισώσεις:

1. $y = 15 - x$

2. $y - x = 15$

Να επιλέξετε ποια από τις δύο παραπάνω εξισώσεις περιγράφει την σχέση των x και y . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ii. Η συνολική αξία των χρημάτων είναι 480 €.

Δίνονται, ακόμα, οι εξισώσεις:

3. $50y - 20x = 480$

4. $20x + 50y = 480$

Να επιλέξετε ποια από τις δύο παραπάνω εξισώσεις περιγράφει την συνολική αξία των χρημάτων σε σχέση με τα x και y . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β. Επιλύοντας το σύστημα των δύο εξισώσεων που επιλέξατε στα ερωτήματα **α.i.** και **α.ii.** να βρείτε πόσα χαρτονομίσματα των 20 € και 50€ κατάθεσε ο Κώστας.

2 Θέμα 2 - 15849

Σε μια συνεστίαση μεταξύ συγγενών παρευρίσκονται οι γονείς με τα παιδιά τους. Στο τραπέζι υπάρχουν 5 παιδιά επιπλέον από τους γονείς. Κάθε γονιός πλήρωσε 12€ και κάθε παιδί τα μισά. Ο συνολικός λογαριασμός ήταν 300€.

α. Αν x το πλήθος των γονιών και y το πλήθος των παιδιών, να διαλέξετε από τις παρακάτω επιλογές, ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους που εκφράζει τα δεδομένα του παραπάνω προβλήματος.

A. $\begin{cases} x + y + 5 = 0 \\ 12x + 6y = 300 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x - y = 5 \\ 6x + 12y = 300 \end{cases}$

Γ. $\begin{cases} y = x + 5 \\ 12x + 6y = 300 \end{cases}$

Δ. $\begin{cases} y = x + 5 \\ 6x + 12y = 300 \end{cases}$

β. Από τη λύση του συστήματος που επιλέξατε στο **α.** ερώτημα να βρείτε πόσοι γονείς και πόσα παιδιά υπήρχαν στο τραπέζι.

3 Θέμα 2 - 14321

Δίνονται οι ευθείες: $\varepsilon_1: 2x + y = 6$ και $\varepsilon_2: x - 2y = -2$.

α. Να προσδιορίσετε αλγεβρικά το κοινό τους σημείο M .

β. Να δείχθεί ότι η ευθεία $\varepsilon_3: 3x + y = 8$ διέρχεται από το M .

4 Θέμα 2 - 15195

α. Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} 5x - y = -1 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$.

β. Να σχεδιάσετε τις ευθείες $(\varepsilon_1): 5x - y = -1$ και $(\varepsilon_2): 3x + y = 2$ και να ερμηνεύσετε γραφικά το αποτέλεσμα του **α.** ερωτήματος.

5 Θέμα 2 - 15006

α. Να λύσετε το σύστημα
$$\begin{cases} 2x - 4y = -2 \\ 5x - 10y = 3 \end{cases}$$

β. Τι συμπεραίνετε για τη σχετική θέση των ευθειών $\varepsilon_1: 2x - 4y = -2$ και $\varepsilon_2: 5x - 10y = 3$;

6 Θέμα 2 - 15016

Δίνεται το γραμμικό σύστημα
$$\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

α. Να αιτιολογήσετε γιατί το ζεύγος $(0, 4)$ δεν αποτελεί λύση του παραπάνω συστήματος.

β. Να λύσετε το παραπάνω σύστημα.

γ. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών $(\varepsilon_1): 3x + 2y = 8$ και $(\varepsilon_2): 2x - y = 3$.

7 Θέμα 4 - 15117

Μια παρέα τεσσάρων φίλων παραγγέλνει σάντουιτς. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η παραγγελία τους. Τα συστατικά των σάντουιτς είναι βιολογικά και το ψωμί είναι ολικής άλεσης (βιολογικό). Το ψωμί για κάθε σάντουιτς έχει κόστος 0,3 ευρώ. Το πρώτο σάντουιτς έχει 2 φέτες ζαμπόν, 4 φέτες τυρί, δεν έχει γαλοπούλα και κοστίζει 3,8 ευρώ. Το δεύτερο έχει 1 φέτα ζαμπόν, 2 φέτες τυρί, 3 φέτες γαλοπούλα και κοστίζει 3,55 ευρώ. Το τρίτο έχει 3 φέτες ζαμπόν, δεν έχει τυρί, έχει 3 φέτες γαλοπούλα και κοστίζει 4,05 ευρώ. Ο σερβιτόρος δεν έχει προλάβει να συμπληρώσει το κόστος του τελευταίου σάντουιτς.

σάντουιτς	φέτες ζαμπόν	φέτες τυρί	φέτες γαλοπούλα	ψωμί	κόστος
1 ^ο	2	4	0	0,3 €	3,8 €
2 ^ο	1	2	3	0,3 €	3,55 €
3 ^ο	3	0	3	0,3 €	4,05 €
4 ^ο	2	2	1	0,3 €	
				Σύνολο	

α. Να εκφράσετε τα δεδομένα του προβλήματος με ένα σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους.

β. Να βρείτε πόσο κοστίζει η μία φέτα τυρί, η μία φέτα γαλοπούλα και η μία φέτα ζαμπόν.

γ. Πόσα χρήματα θα πληρώσουν συνολικά οι τέσσερις φίλοι για την παραγγελία τους;

1.2 Μη γραμμικά συστήματα**8 Θέμα 4 - 14289**

Ο Κώστας έχει τρία παιδιά. Δύο δίδυμα κορίτσια και ένα αγόρι. Στην ερώτηση πόσων χρονών είναι τα παιδιά του, απάντησε ως εξής.

1. Το άθροισμα των ηλικιών και των τριών παιδιών είναι 14.

2. Το γινόμενο της ηλικίας της κόρης μου επί την ηλικία του γιου μου είναι 24.

3. Το άθροισμα των ηλικιών των κοριτσιών είναι μικρότερο από την ηλικία του αγοριού.

α. Να γράψετε τις εξισώσεις που περιγράφουν τα στοιχεία 1. και 2. που έδωσε ο Κώστας.

β. Να βρείτε τις ηλικίες των παιδιών του Κώστα.

9 Θέμα 4 - 15118

α. Να λύσετε το σύστημα $(\Sigma_1): \begin{cases} xy = 6 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$.

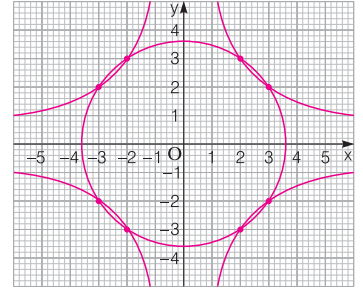
β. Είναι όλες οι λύσεις του συστήματος (Σ_1) λύσεις και του $(\Sigma_2): \begin{cases} |xy| = 6 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ. Η γεωμετρική αναπαράσταση του συστήματος (Σ_2) φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Με βάση το σχήμα,

i. να βρείτε τις λύσεις του (Σ_2) .

ii. να παραστήσετε γεωμετρικά το σύστημα (Σ_1) σημειώνοντας τις λύσεις του.



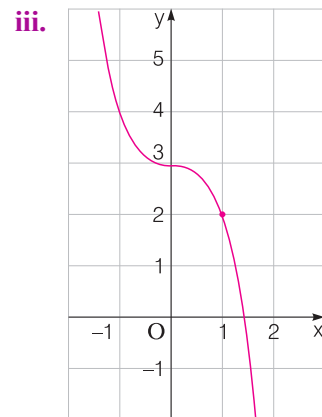
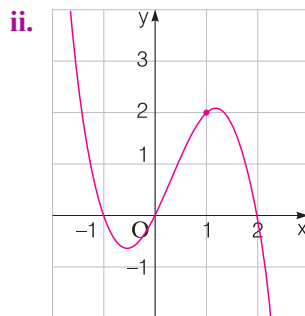
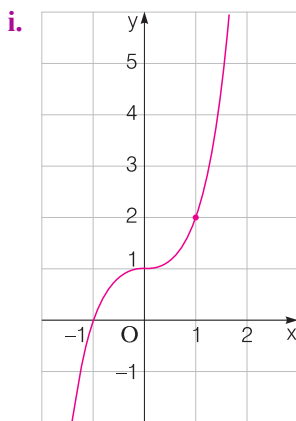
2.1 Μονοτονία – Ακρότατα – Συμμετρίες συνάρτησης

10 Θέμα 2 - 15114

Δίνεται μια συνάρτηση f γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} με σύνολο τιμών το \mathbb{R} της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(1, 2)$.

α. Θα μπορούσε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται και από το σημείο $B(2, 9)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

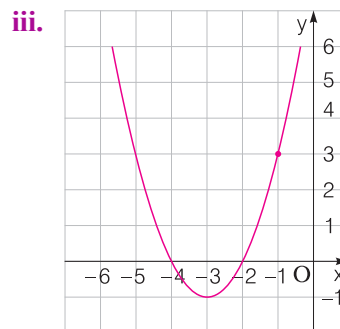
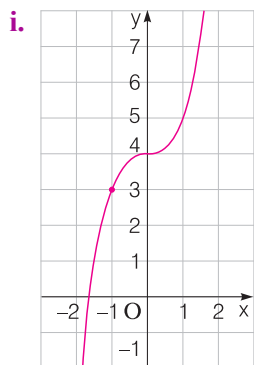
β. Ποια από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις θα μπορούσε να είναι η γραφική παράσταση της f ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



11 Θέμα 2 - 15115

Δίνεται μια συνάρτηση f γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} με σύνολο τιμών το \mathbb{R} της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(-1, 3)$.

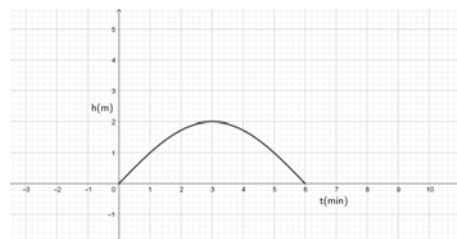
- α. Θα μπορούσε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται και από το σημείο $B(2, 5)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- β. Ποια από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις θα μπορούσε να είναι η γραφική παράσταση της f ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



12 Θέμα 2 - 15645

Αντικείμενο κινείται κατακόρυφα. Το διπλανό σχήμα αναπαριστά το ύψος h του αντικειμένου από το έδαφος για κάθε χρονική στιγμή t . Να βρείτε:

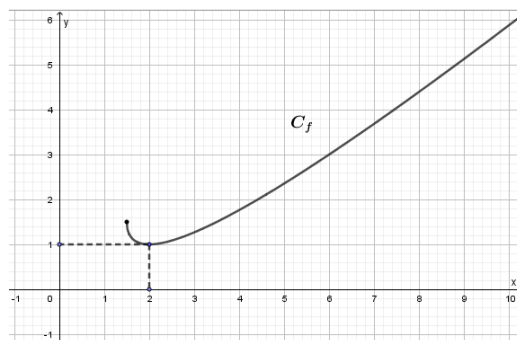
- α. Ποιες χρονικές στιγμές το αντικείμενο απέχει 1m από το έδαφος.
- β. Ποια είναι η μέγιστη απόσταση του αντικειμένου από το έδαφος και ποια χρονική στιγμή την επιτυγχάνει.
- γ. Ποιο χρονικό διάστημα το αντικείμενο απομακρύνεται από το έδαφος.



13 Θέμα 2 - 15437

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - \sqrt{2x - 3}$, της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα:

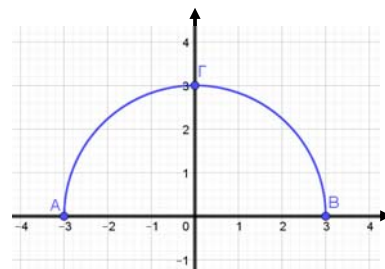
- α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
- β. Να προσδιορίσετε το ολικό ελάχιστο της συνάρτησης, καθώς και τη θέση αυτού.
- γ. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση είναι
- γνησίως φθίνουσα
 - γνησίως αύξουσα



14 Θέμα 2 - 16129

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f(x)$.

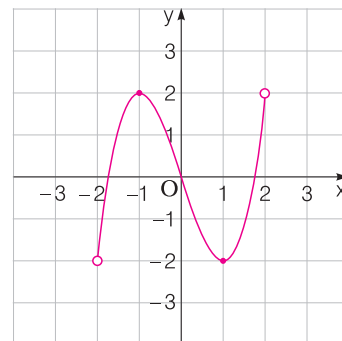
- α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- β. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή.
- γ. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα ακρότατα της f και τις θέσεις των ακροτάτων.



15 Θέμα 2 - 15112

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το διάστημα $(-2, 2)$.

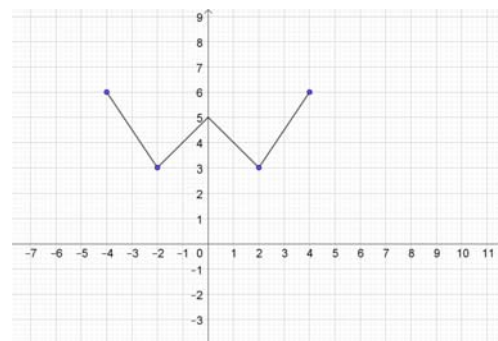
- Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- Να γράψετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα.
- Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f καθώς και τις θέσεις των ακρότατων αυτών.



16 Θέμα 2 - 15024

Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $[-4, 4]$ φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

- Να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση είναι άρτια.
- Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f .
- Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της f καθώς και για ποιες τιμές του x τις παρουσιάζει.



17 Θέμα 2 - 15019

Δίνεται μία συνάρτηση f για την οποία ισχύει ότι $f(-1) = 2$ και $f(1) = 0$.

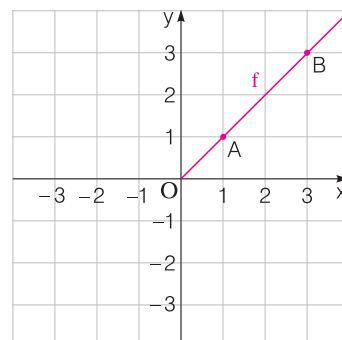
Να αιτιολογήσετε (αλγεβρικά ή γραφικά)

- γιατί η συνάρτηση f δεν είναι άρτια.
- γιατί η συνάρτηση f δεν είναι περιττή.
- γιατί η συνάρτηση f δεν είναι γνησίως αύξουσα.

18 Θέμα 2 - 14971

Δίνονται τα σημεία του επιπέδου $A(1, 1)$, $B(3, 3)$.

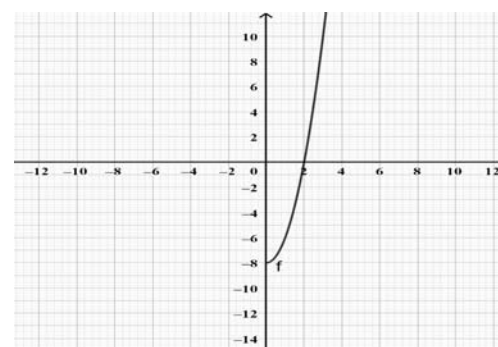
- Να αιτιολογήσετε ποιες από τις επόμενες ιδιότητες θα μπορούσε και ποιες δε θα μπορούσε να έχει μία συνάρτηση f , που ορίζεται σε όλους τους πραγματικούς αριθμούς και της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα A και B .
 - είναι σταθερή συνάρτηση
 - είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση
- Να συμπληρώσετε τη διπλανή γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f , η οποία διέρχεται από τα A , B και είναι περιττή.



19 Θέμα 2 - 15372

Στο διπλανό σχήμα δίνεται ένα τμήμα της γραφικής παράστασης μιας άρτιας συνάρτησης με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} .

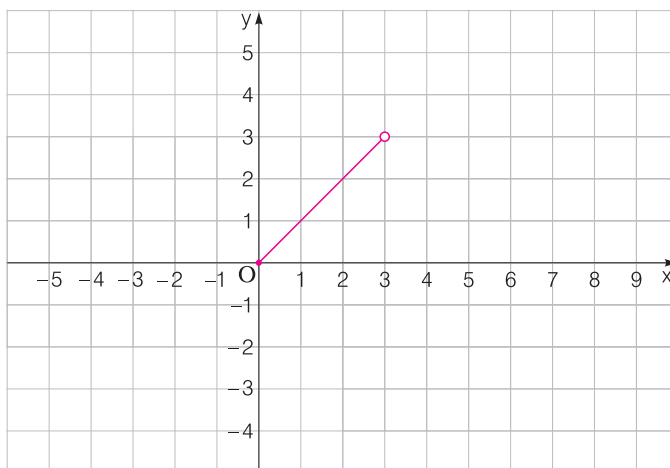
- Να μεταφέρεται το σχήμα στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση με το κομμάτι της καμπύλης που λείπει. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- Να βρείτε:
 - Τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f .
 - Το είδος του ακροτάτου και τη θέση που το παρουσιάζει.



20 Θέμα 2 - 15017

Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $(\alpha, 3)$ είναι άρτια και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $(2, 2)$.

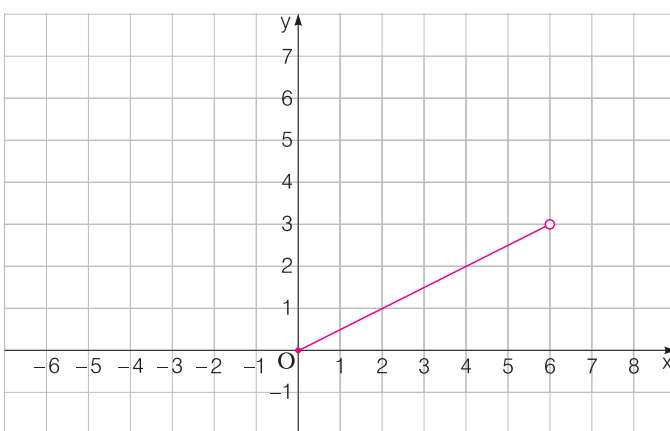
- Να βρείτε την τιμή του α .
- Να βρείτε το $f(-2)$.
- Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο διάστημα $[0, 3)$. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f στο πεδίο ορισμού της.



21 Θέμα 2 - 15018

Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $(\alpha, 6)$ είναι περιττή και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $(4, 2)$.

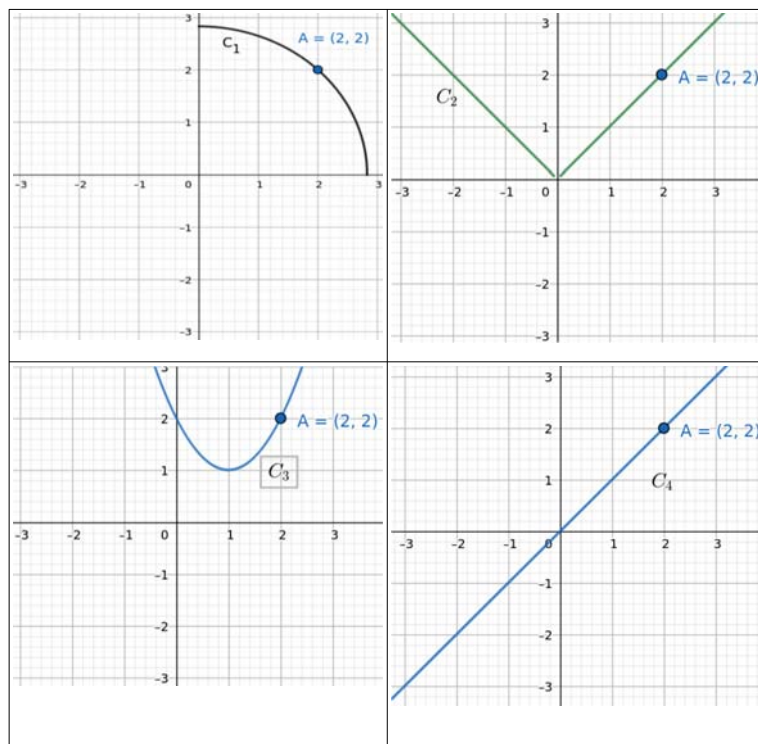
- Να βρείτε την τιμή του α .
- Να βρείτε το $f(-4)$.
- Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο διάστημα $[0, 6)$. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f στο πεδίο ορισμού της.



22 Θέμα 2 - 14976

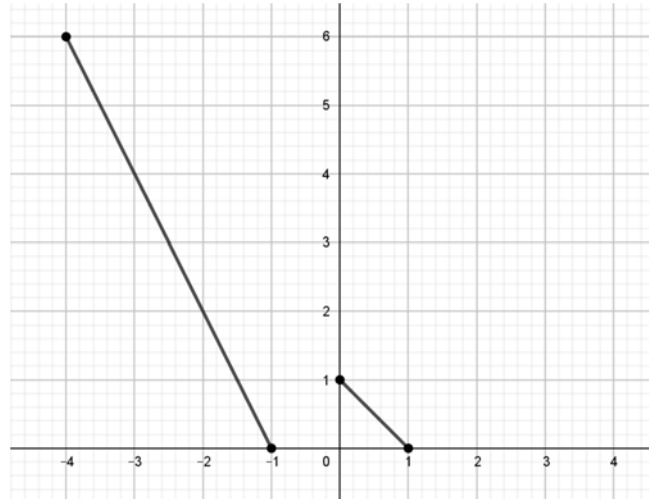
Δίνονται τα διπλανά σχήματα.

- Να αιτιολογήσετε ποιες από τις γραφικές παραστάσεις C_1 , C_2 , C_3 , C_4 αναπαριστούν άρτιες ή περιττές συναρτήσεις, ποιες όχι και γιατί. Δίνεται ότι τουλάχιστον μία είναι άρτια και τουλάχιστον μία είναι περιττή.
- Για τις συναρτήσεις C_2 , C_4 να βρείτε την τεταγμένη του σημείου τους $B(-2, k)$, αιτιολογώντας την τιμή που βρήκατε από την ιδιότητα συμμετρίας καθεμιάς συνάρτησης.



23 Θέμα 2 - 15116

Στο διπλανό σχήμα δίνονται ορισμένα τμήματα της γραφικής παράστασης μιας άρτιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[-4, 4]$.

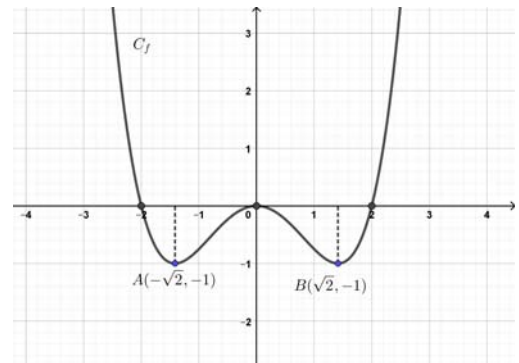


- α. Να μεταφέρετε το σχήμα στην κόλλα σας και να χαράξετε τα υπόλοιπα τμήματα της γραφικής παράστασης της f .
- β. Να βρείτε
 - i. τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
 - ii. τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f καθώς και τις θέσεις των ακρότατων αυτών.

24 Θέμα 2 - 15349

Δίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} , όπως φαίνεται στο σχήμα.

- α. Να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση είναι άρτια.
- β. Αν γνωρίζετε ότι τα σημεία $A(-\sqrt{2}, -1)$ και $B(\sqrt{2}, -1)$ ανήκουν στη γραφική παράσταση της f να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f .
- γ. Να λύσετε γραφικά την εξίσωση $f(x) = 0$.



25 Θέμα 4 - 15022

Θεωρούμε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[-3, 3]$. Η συνάρτηση f είναι άρτια, γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-3, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, 3]$.

- α. Να αποδείξετε ότι $f(-1) < f(-2)$.
- β. Να αποδείξετε ότι $f(3) \geq f(x) \geq f(0)$ για κάθε $x \in [-3, 3]$.
- γ. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο και μέγιστο και να βρείτε τις θέσεις μεγίστου και ελαχίστου.
- δ. Παρακάτω δίνονται 4 τύποι, από τους οποίους ένας μόνο μπορεί να είναι ο τύπος της συνάρτησης f . Να επιλέξετε το σωστό τύπο αιτιολογώντας την απάντησή σας.

α. $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$

β. $f(x) = -\sqrt{9 - x^2}$

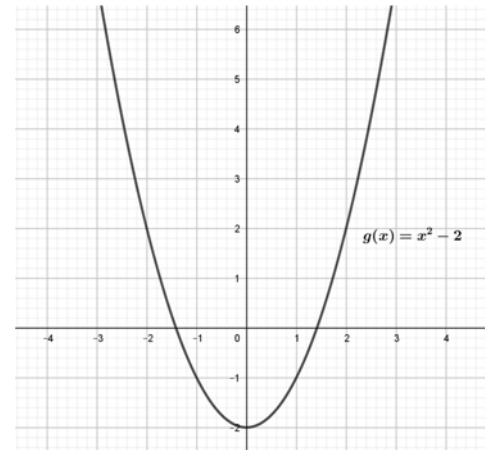
γ. $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$

δ. $f(x) = -\sqrt{x^2 - 9}$

2.2 Κατακόρυφη – Οριζόντια μετατόπιση καμπύλης

26 Θέμα 2 - 15811

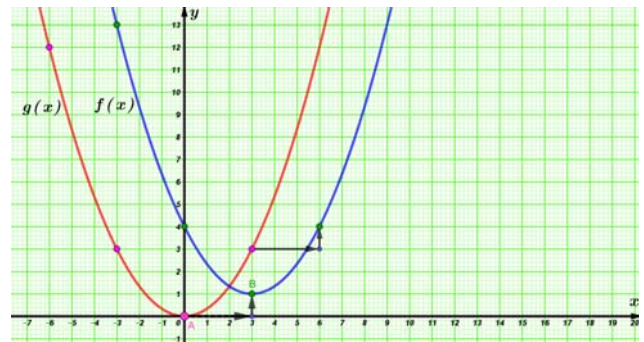
Στο διπλανό σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = x^2 - 2$, $x \in \mathbb{R}$



- α.** Με βάση τη γραφική της παράσταση,
- να αιτιολογήσετε γιατί η g είναι άρτια.
 - να βρείτε το ελάχιστο της g και τη θέση αυτού.
- β.** Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της $f(x) = x^2$ μετατοπίζοντας κατάλληλα την γραφική παράσταση της g που φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

27 Θέμα 2 - 14983

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \frac{1}{3}x^2$, $x \in \mathbb{R}$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$ η οποία προκύπτει από μία οριζόντια μετατόπιση της $g(x)$ κατά 3 μονάδες προς τα δεξιά και μετά κατά μία μονάδα προς τα πάνω.

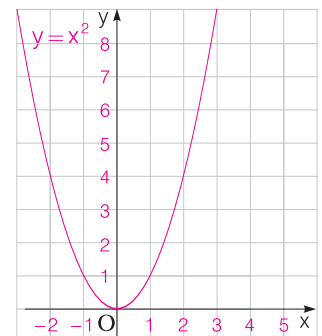


- α.** Να επιλέξετε την σωστή απάντηση όσον αφορά τον τύπο της $f(x)$.
- $f(x) = g(x+3) + 1$
 - $f(x) = g(x+3) - 1$
 - $f(x) = g(x-3) + 1$
 - $f(x) = g(x-3) - 1$
- β.** Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x)$ και την θέση ελαχίστου.
- γ.** Να γράψετε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.

28 Θέμα 2 - 14230

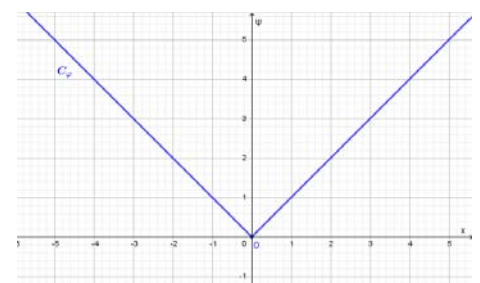
Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 5$, $x \in \mathbb{R}$.

- α.** Να αποδείξετε ότι η f γράφεται στη μορφή $f(x) = (x-2)^2 + 1$.
- β.** Να αναφέρετε τις μετατοπίσεις της $y = x^2$ ώστε να προκύψει η γραφική παράσταση της συνάρτησης f , την οποία και να χαράξετε στο διπλανό σύστημα συντεταγμένων.



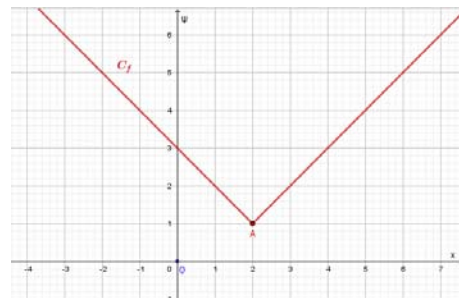
29 Θέμα 2 - 14972

Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$ με γραφική παράσταση που φαίνεται στο σχήμα. Επιπλέον οι συναρτήσεις $g(x) = |x-2|$, $x \in \mathbb{R}$ και $f(x) = |x-2| + 1$, $x \in \mathbb{R}$



- α.** Να παραστήσετε γραφικά στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τις συναρτήσεις g , f και να εξηγήσετε πώς προκύπτουν μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της φ .

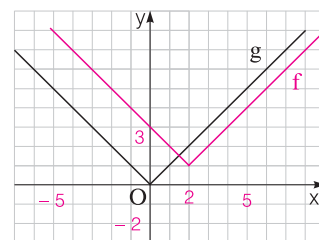
β. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της f , η οποία δίνεται δίπλα, να βρείτε:



- Τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνήσια αύξουσα και γνήσια φθίνουσα.
- Το ολικό ακρότατο της f και τη θέση του. Τι είδους ακρότατο είναι;

30 Θέμα 2 - 14325

Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g , που ορίζονται στους πραγματικούς αριθμούς. Η γραφική παράσταση της g προκύπτει από τη γραφική παράσταση της f με οριζόντια και κατακόρυφη μετατόπιση. Από τις γραφικές παραστάσεις να βρείτε:



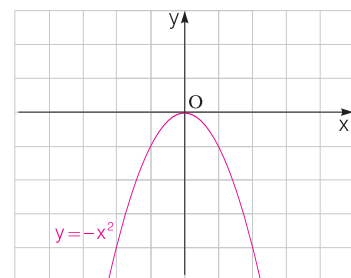
- Τα διαστήματα μονοτονίας της f , το είδος του ακρότατου της f και την τιμή του.
- Αν $g(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$ να επιλέξετε ποιος από τους παρακάτω είναι ο τύπος της συνάρτησης f . Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

$$f(x) = |x+2|+1 \quad f(x) = |x-2|-1 \quad f(x) = |x+2|-1 \quad f(x) = |x-2|+1$$

31 Θέμα 4 - 14293

Δίνονται οι συναρτήσεις $\varphi(x) = -x^2$, $x \in \mathbb{R}$ και $f(x) = -x^2 + 2x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

- Να αποδείξετε ότι $f(x) = -(x-1)^2 + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και στη συνέχεια, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ , που φαίνεται στο διπλανό σχήμα, να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f .



- Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f να βρείτε:
 - Τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη.
 - Το ολικό ακρότατο της f καθώς και τη θέση του.
 - Το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \kappa$, $\kappa < 2$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

32 Θέμα 4 - 14973

Δίνονται οι συναρτήσεις $\varphi(x) = 3x^2$, $x \in \mathbb{R}$ και $f(x) = 3x^2 - 6x + 8$, $x \in \mathbb{R}$.

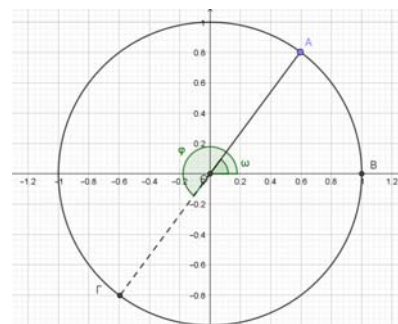
- Να ελέγξετε αν η συνάρτηση φ είναι άρτια ή περιττή και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.
- Να αποδείξετε ότι $f(x) = 3(x-1)^2 + 5$, $x \in \mathbb{R}$. Στη συνέχεια, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ , να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f , αιτιολογώντας την απάντησή σας.
- Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , να βρείτε:
 - Τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνήσια μονότονη και τον άξονα συμμετρίας της συνάρτησης f .
 - Το ολικό ακρότατο της f και τη θέση του. Τι είδους ακρότατο είναι;
 - Το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f και της ευθείας με εξίσωση $y = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ .

3.1 Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας

33 Θέμα 2 - 15079

Στο διπλανό τριγωνομετρικό κύκλο σχεδιάσαμε γωνία $\hat{\omega} = \text{B}\hat{\text{O}}\text{A}$.

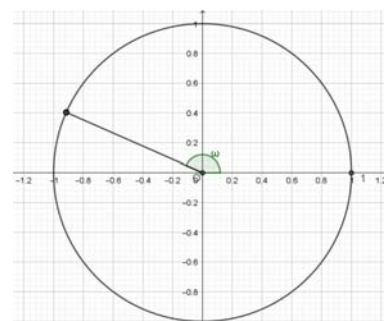
- α.** Με βάση το σχήμα, να αιτιολογήσετε γιατί $\sin \omega = \frac{3}{5}$.
- β.** Η προέκταση του τμήματος AO τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο Γ , όπως φαίνεται στο σχήμα.
- i.** Να εκφράσετε την γωνία $\hat{\phi} = \text{B}\hat{\text{O}}\Gamma$ με την βοήθεια της γωνίας $\hat{\omega}$.
- ii.** Με την βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο θέλετε να υπολογίσετε το $\sin \phi$.



34 Θέμα 2 - 15191

Στο διπλανό τριγωνομετρικό κύκλο σχεδιάσαμε γωνία $\hat{\omega}$, με $\sin \omega = 0,4$.

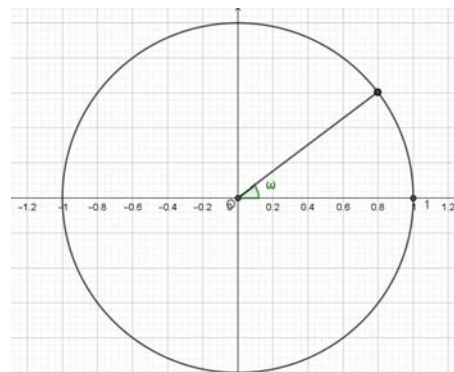
- α.** Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να σχεδιάσετε την γωνία $-\hat{\omega}$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- β.** Με την βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε το $\sin(-\omega)$.



35 Θέμα 2 - 15193

Στο διπλανό τριγωνομετρικό κύκλο σχεδιάσαμε γωνία $\hat{\omega}$, με $\sin \omega = 0,8$.

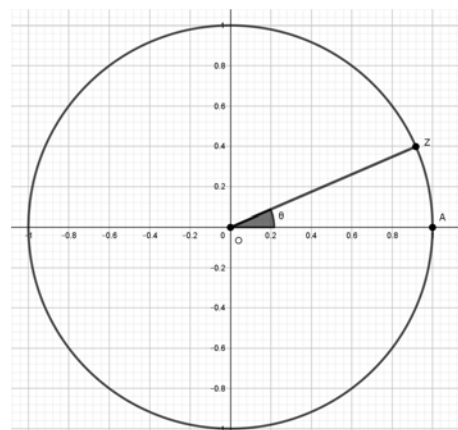
- α.** Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να σχεδιάσετε τις γωνίες στο διάστημα $[0, 2\pi]$, των οποίων το συνημίτονο είναι $-0,8$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- β.** Να βρείτε την σχέση των γωνιών που βρήκατε στο **α.** ερώτημα με την γωνία $\hat{\omega}$.



36 Θέμα 2 - 17933

Στο διπλανό τριγωνομετρικό κύκλο δίνεται η γωνία $\text{A}\hat{\text{O}}\text{Z} = \theta$.

- α.** Να μεταφέρετε τον κύκλο στην κόλλα σας και να φέρετε σε αυτόν τις τελικές πλευρές των γωνιών $3\pi + \theta$ και $4\pi - \theta$.
- β. i.** Να αιτιολογήσετε γιατί $\sin \theta = 0,4$.
- ii.** Με χρήση του **β.i.** ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς: $\sin(3\pi + \theta)$ και $\sin(4\pi - \theta)$.



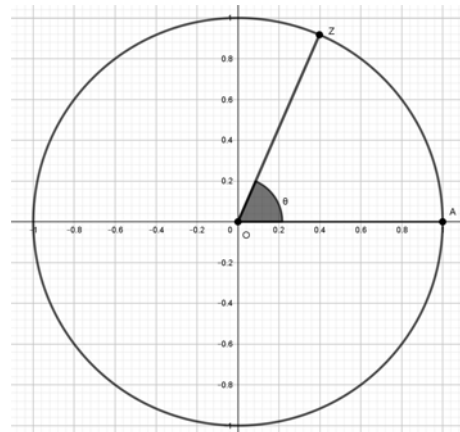
37 Θέμα 2 - 17936

Στο διπλανό τριγωνομετρικό κύκλο δίνεται η γωνία $\widehat{AOZ} = \theta$.

α. Να μεταφέρετε τον κύκλο στην κόλλα σας και να φέρετε σε αυτόν τις τελικές πλευρές των γωνιών $3\pi + \theta$ και $\frac{\pi}{2} + \theta$.

β. i. Να αιτιολογήσετε γιατί $\sin \theta = 0,4$.

ii. Με χρήση του **β.i.** ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς: $\sin(3\pi + \theta)$ και $\eta\mu(\frac{\pi}{2} + \theta)$.



3.2 Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες

38 Θέμα 2 - 15046

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $\sin A = -\frac{3}{5}$.

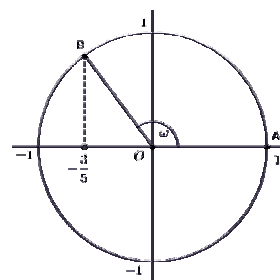
α. Να αιτιολογήσετε γιατί το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο.

β. Να βρείτε το $\eta\mu A$.

39 Θέμα 2 - 15185

α. Να βρείτε το συνημίτονο της γωνίας ω του διπλανού σχήματος και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β. Αν $\sin \omega = -\frac{3}{5}$, να βρείτε το $\eta\mu \omega$.



40 Θέμα 2 - 15814

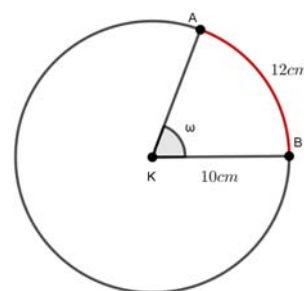
Δίνεται ο κύκλος του παρακάτω σχήματος με κέντρο K και ακτίνα 10cm . Επίσης δίνεται το τόξο \widehat{AB} με μήκος 12cm και η αντίστοιχη επίκεντρη γωνία ω .

α. i. Να αιτιολογήσετε γιατί το μέτρο της γωνίας ω είναι $1,2\text{ rad}$.

ii. Με χρήση του **α.i.** ερωτήματος, να αιτιολογήσετε γιατί η γωνία ω είναι οξεία.

β. Αν $\sin \omega = \frac{9}{25}$, να βρείτε το $\eta\mu \omega$.

(Δίνεται ότι $\sqrt{544} = 4\sqrt{34}$).



41 Θέμα 2 - 15192

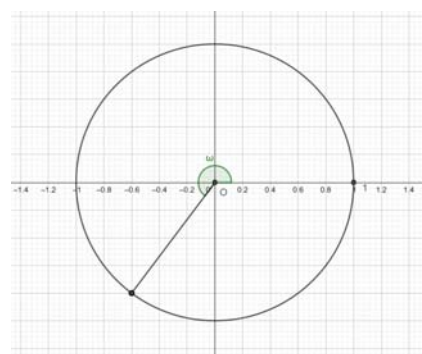
Στο διπλανό τριγωνομετρικό κύκλο σχεδιάσαμε γωνία $\hat{\omega}$.

α. Να αιτιολογήσετε με βάση το σχήμα γιατί $\sin \omega = -\frac{3}{5}$.

β. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς

i. $\eta\mu \omega$

ii. $\epsilon\phi \omega$



42 Θέμα 2 - 15429

α. Να αποδείξετε ότι $\eta\mu 476^\circ = \eta\mu 116^\circ$.

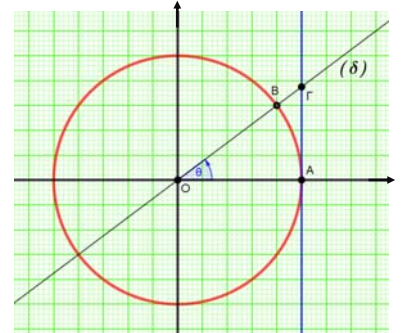
β. Αν γνωρίζουμε ότι το $\eta\mu 116^\circ$ είναι περίπου $\frac{9}{10}$, να υπολογίσετε το $\sigma\upsilon\nu 116^\circ$.

43 Θέμα 2 - 15092

Στο διπλανό σχήμα έχει σχεδιασθεί ο τριγωνομετρικός κύκλος και η ευθεία (δ) η οποία είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Α. Η τελική πλευρά OB της θετικής γωνίας $\widehat{AOB} = \hat{\theta}$, αν προεκταθεί τέμνει την ευθεία (δ) στο σημείο Γ. Γνωρίζουμε ότι $\eta\mu\theta = \frac{3}{5}$.

α. Με τη βοήθεια του σχήματος ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε τον αριθμό $\sigma\upsilon\nu\theta$ και στη συνέχεια τον αριθμό $\epsilon\phi\theta$.

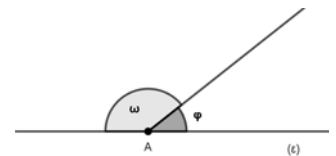
β. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των σημείων Β και Γ.

**44 Θέμα 2 - 15652**

Δίνεται $\eta\mu\varphi = \frac{3}{5}$, όπου φ η οξεία γωνία που σχηματίζεται με κορυφή το σημείο Α της ευθείας (ε) του διπλανού σχήματος.

α. Να βρείτε το συνημίτονο της γωνίας φ .

β. Να βρείτε το ημίτονο και το συνημίτονο της αμβλείας γωνίας ω .

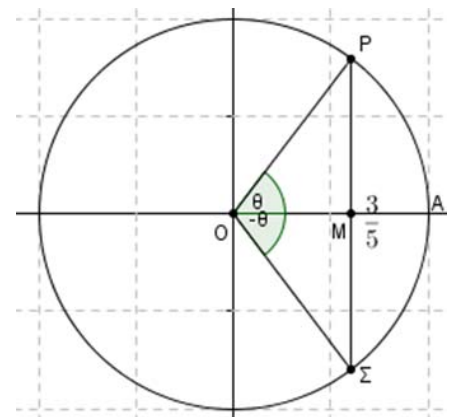
**45 Θέμα 2 - 15266**

Στο διπλανό σχήμα δίνεται ο τριγωνομετρικός κύκλος και οι γωνίες θ και $-\theta$.

α. Να αιτιολογήσετε γιατί $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{3}{5}$.

β. Να βρείτε το $\eta\mu\theta$.

γ. Να βρείτε το ημίτονο και το συνημίτονο της γωνίας $-\theta$.

**3.4 Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις****46 Θέμα 2 - 15091**

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{2} \cdot \sigma\upsilon\nu x$, $x \in \mathbb{R}$.

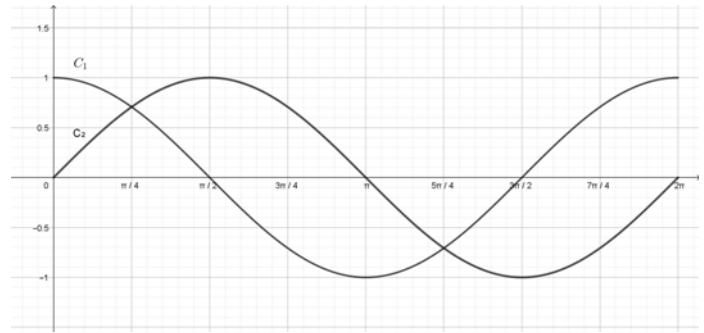
α. i. Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης.

ii. Να βρείτε την μέγιστη και ελάχιστη τιμή της.

β. Να υπολογίσετε τον αριθμό $f(2025\pi)$.

47 Θέμα 2 - 15644

Στο διπλανό σύστημα συντεταγμένων έχουμε σχεδιάσει δύο γραφικές παραστάσεις C_1 και C_2 για $x \in [0, 2\pi]$.



α. Αν οι γραφικές παραστάσεις είναι των συναρτήσεων $f(x) = \sin x$ και $g(x) = \eta \mu x$ για $x \in [0, 2\pi]$, ποια από τις C_1 , C_2 είναι η γραφική παράσταση της $f(x) = \sin x$ και ποια της $g(x) = \eta \mu x$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β. Με την βοήθεια του σχήματος να λύσετε την εξίσωση $\eta \mu x = \sin x$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

48 Θέμα 2 - 15009

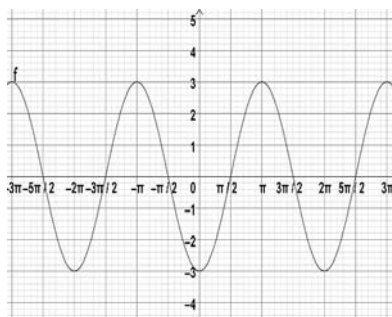
Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -3\sin x$, $x \in \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f .

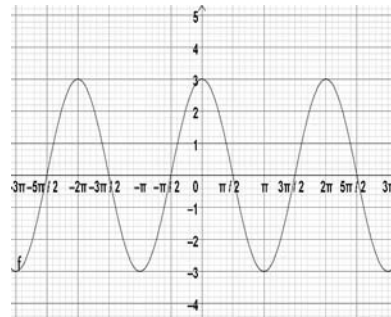
β. Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης f .

γ. Από τις παρακάτω τέσσερις γραφικές παραστάσεις μία μόνο αντιστοιχεί στη γραφική παράσταση της f , να επιλέξετε αυτή που αντιστοιχεί στη συνάρτηση $f(x) = -3\sin x$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

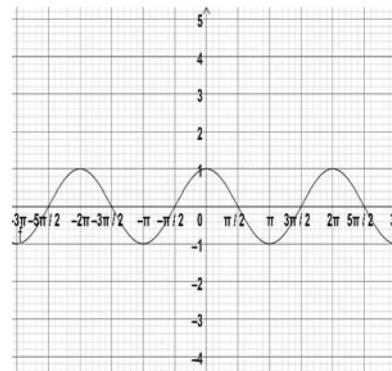
A)



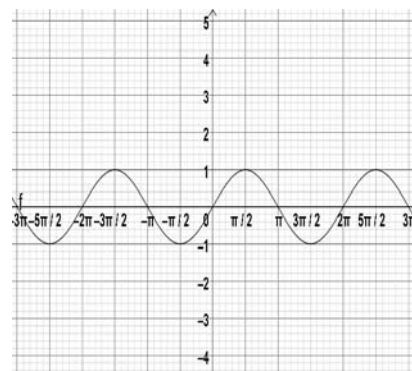
B)



Γ)



Δ)



49 Θέμα 2 - 15172

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4\eta \mu(11\pi - x)$, $x \in \mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι:

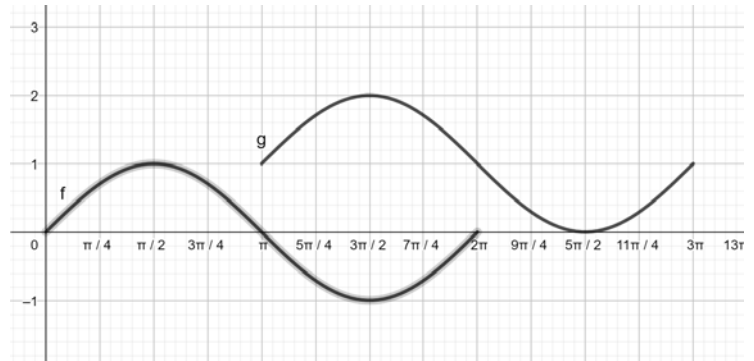
i. $\eta \mu(11\pi - x) = \eta \mu x$, $x \in \mathbb{R}$

ii. $f(x) = 4\eta \mu x$, $x \in \mathbb{R}$

β. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 4\eta \mu x$, όταν $x \in [0, 2\pi]$.

50 Θέμα 2 - 15788

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu x$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης g που προέκυψε από την f με δύο διαδοχικές μετατοπίσεις. Με την βοήθεια του σχήματος να βρείτε:



- α.** το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g , την μέγιστη τιμή της και σε ποια θέση την αποκτά.
- β. i.** τις δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της f από τις οποίες προέκυψε η g .
- ii.** τον τύπο της g .

51 Θέμα 3 - 15789

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu x$, με $x \in [0, \pi]$.



- α. i.** Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και μετατοπίζοντας κατάλληλα την f να σχεδιάσετε την συνάρτηση $g(x) = f\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.
- ii.** Ποιος είναι ο τύπος της g και σε ποιο διάστημα ορίζεται;
- β.** Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$.

52 Θέμα 2 - 15809

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

- α.** Να βρείτε την περίοδο καθώς και τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της f .
- β. i.** Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$					
$f(x) = \eta\mu 2x$					

- ii.** Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f σε διάστημα μίας περιόδου.

3.5 Βασικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις**53 Θέμα 2 - 15810**

Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \sigma\upsilon\nu 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

- α.** Να βρείτε την περίοδο καθώς και τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της g .
- β. i.** Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$					
$g(x) = \sigma\upsilon\nu 2x$					

- ii.** Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της g σε διάστημα μίας περιόδου.

54 Θέμα 2 - 14323

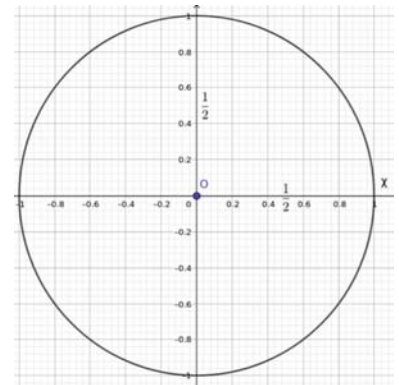
Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -3\sin 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

- α. Να βρείτε την περίοδο, τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f .
 β. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα και να παραστήσετε γραφικά την f σε διάστημα μιας περιόδου.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$					
$\sin 2x$					
$f(x) = -3\sin 2x$					

55 Θέμα 2 - 14977

- α. Στο διπλανό τριγωνομετρικό κύκλο να σημειώσετε τις τελικές πλευρές δύο γωνιών που ανήκουν στο διάστημα $[0, 2\pi)$, με αρχική πλευρά την ημιευθεία Ox , οι οποίες να έχουν ημίτονο ίσο με $\frac{1}{2}$ και άλλες δύο οι οποίες να έχουν συνημίτονο ίσο με $\frac{1}{2}$.
 β. Να λύσετε την εξίσωση $\eta\mu x = \frac{1}{2}$ για $x \in \mathbb{R}$.

**56 Θέμα 2 - 14324**

Έστω γωνία x για την οποία ισχύουν: $0 < x < \frac{\pi}{2}$ και $\eta\mu x + \eta\mu(\pi - x) = 1$.

- α. Να αποδείξετε ότι $\eta\mu x = \frac{1}{2}$.
 β. Να βρείτε την γωνία x .

57 Θέμα 2 - 15969

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\sin(13\pi + x) - 2\eta\mu(\frac{\pi}{2} - x)$.

- α. Να δείξετε ότι $\sin(13\pi + x) = -\sin x$.
 β. Να δείξετε ότι $f(x) = -4\sin x$.
 γ. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = -2$.

58 Θέμα 2 - 15036

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3\sin 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

- α. i. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f .
 ii. Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης f .
 β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = -3$ στο \mathbb{R} .

59 Θέμα 2 - 14280

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

- α. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f .
 β. Για ποια τιμή του $x \in [0, 2\pi]$ η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστη τιμή;

60 Θέμα 4 - 15050

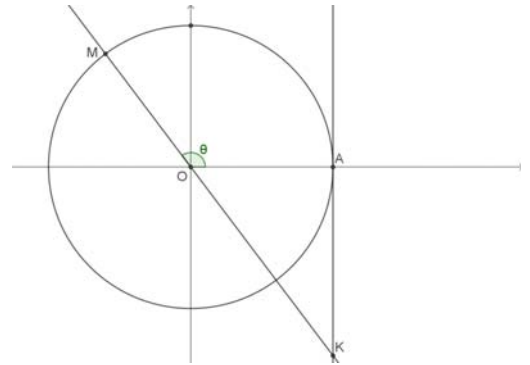
Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\sin x$, $x \in \mathbb{R}$.

- α. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της.
- β. Να βρείτε δυο κοινά σημεία της γραφικής παράστασης C_f της f με την ευθεία $y = 1$.
- γ. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(\frac{\pi}{3})$ και $f(\frac{2\pi}{5})$.
- δ. Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση, στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

61 Θέμα 4 - 15025

Στο διπλανό σχήμα δίνεται μια γωνία $\theta = \angle AOM$ με $\eta\mu\theta = \frac{4}{5}$, της οποίας η τελική πλευρά τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο M και την ευθεία $x = 1$ στο σημείο K .

- α. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\sin\theta$, $\epsilon\phi\theta$, $\sigma\phi\theta$.
- β. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων M και K .
- γ. Έστω μια γωνία $\varphi \in [0, 2\pi]$ για την οποία ισχύει $\eta\mu\varphi = \frac{3}{5}$ και $\sigma\upsilon\eta\varphi < 0$.
 - i. Να αιτιολογήσετε γιατί η γωνία φ έχει την τελική πλευρά της στο 2ο τεταρτημόριο.
 - ii. Να αιτιολογήσετε γιατί $\theta < \varphi$.

**62 Θέμα 4 - 14240**

- α. Να λύσετε το σύστημα:
$$\begin{cases} x + y = -1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$
.
- β. Με τη βοήθεια του ερωτήματος α. και του τριγωνομετρικού κύκλου, να βρείτε όλες τις γωνίες ω , με $0 \leq \omega \leq 2\pi$, που ικανοποιούν τη σχέση $\sigma\upsilon\eta\omega + \eta\mu\omega = -1$ και να τις απεικονίσετε πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο.

63 Θέμα 4 - 15289

Δίνεται το σύστημα: $(\Sigma): \begin{cases} -x + 2y = 1 \\ x + \lambda y = \lambda \end{cases}$ με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α. i. Αν $\lambda = -1$, να λύσετε το σύστημα.
 ii. Αν (x_0, y_0) είναι η λύση του συστήματος για $\lambda = -1$, να βρείτε γωνία $\theta \in [0, 2\pi]$ τέτοια ώστε $x_0 = \sin\theta$ και $y_0 = \eta\mu\theta$.
- β. Αν $\lambda = 1$ και (x_1, y_1) είναι η αντίστοιχη λύση του συστήματος, να δείξετε ότι δεν υπάρχει γωνία ω , τέτοια ώστε $x_1 = \sin\omega$ και $y_1 = \eta\mu\omega$.
- γ. Αν γνωρίζουμε ότι το σύστημα (Σ) έχει μοναδική λύση την (x_2, y_2) με $x_2 = \sin\varphi$ και $y_2 = \eta\mu\varphi$, $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$.
 - i. Να δείξετε ότι $\sin\varphi = \frac{3}{5}$ και $\eta\mu\varphi = \frac{4}{5}$.
 - ii. Να υπολογίσετε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.

64 Θέμα 4 - 15347

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\sin^2(\pi - x) - 3\eta\mu(\frac{\pi}{2} + x) + \alpha$, με $\alpha \in \mathbb{R}$.

- α.** Να δείξετε ότι $f(x) = 2\sin^2 x - 3\sin x + \alpha$.
- β.** Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι άρτια ή περιττή.
- γ.** Να βρείτε το α αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M(\frac{\pi}{3}, 1)$.
- δ.** Για $\alpha = 2$ και $g(x) = 2\eta\mu^2 x + 9\sin x - 9$, να εξετάσετε (αν υπάρχουν) κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .

65 Θέμα 4 - 15014

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha \cdot \eta\mu\beta x$, με α, β ακέραιους θετικούς αριθμούς.

- α.** Να βρείτε την τιμή του α , αν η μέγιστη τιμή της συνάρτησης είναι 2.
- β.** Αν $\alpha = 2$, να δείξετε ότι η μικρότερη τιμή του β για την οποία είναι $f\left(\frac{\pi}{16}\right) = 2$ είναι $\beta = 8$.
- γ.** Αν $\alpha = 2$ και $\beta = 8$, να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 1$ στο διάστημα $[0, \frac{\pi}{2}]$.

66 Θέμα 4 - 15049

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \eta\mu(\pi + x)$, $x \in \mathbb{R}$.

- α.** Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sin x - \eta\mu x$.
- β.** Να αποδείξετε ότι $-2 \leq f(x) \leq 2$. Κατόπιν να εξετάσετε αν ο αριθμός 2 είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης.
- γ.** Να βρείτε:
 - i.** Το σημείο τομής της γραφικής παράστασης C_f της f με τον άξονα $y'y$.
 - ii.** Δυο σημεία τομής της C_f με τον $x'x$.

67 Θέμα 4 - 15026

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 1 + 2\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)$, $x \in \mathbb{R}$.

- α.** Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης f .
- β.** Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f .
- γ.** Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα xx' .
- δ.** Να αποδείξετε ότι $(f(x) - 1)^2 + (f(1 - x) - 1)^2 = 4$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

68 Θέμα 4 - 15992

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \rho \eta\mu x$, $g(x) = \eta\mu(\omega x)$, όπου $\rho, \omega > 0$.

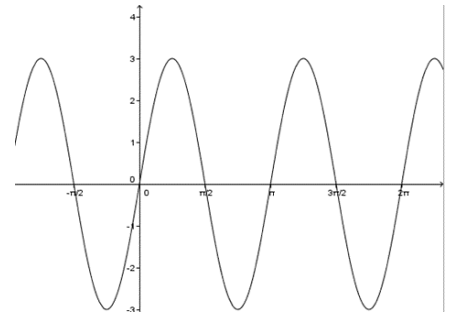
- α.** Να βρεθούν οι τιμές των ρ, ω , αν είναι γνωστό ότι η ελάχιστη τιμή της f είναι -2 και η περίοδος της g είναι π . Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.
- β. i.** Να κάνετε, στο ίδιο σύστημα αξόνων, τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = 2\eta\mu x$, $x \in [0, \pi]$ και $g(x) = \eta\mu(2x)$, $x \in [0, \pi]$.
- ii.** Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να αποδείξετε ότι $2\eta\mu\frac{5\pi}{9} > \eta\mu\frac{10\pi}{9}$.

69 Θέμα 4 - 15062

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f που είναι της μορφής

$$f(x) = \rho \eta \mu(ax), \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad a, \rho > 0$$

- α.** Να βρείτε, με βάση το σχήμα, την περίοδο της, την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της.
- β.** Με βάση τις απαντήσεις στο προηγούμενο ερώτημα, να βρείτε τους αριθμούς a και ρ .



Έστω $\rho = 3$ και $a = 2$. Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $g(x) = x^4 - 2x^2 + 5$, $x \in \mathbb{R}$.

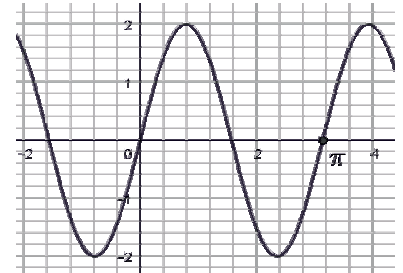
- γ.** Να αποδείξετε ότι η ελάχιστη τιμή της είναι ίση με 4.
- δ.** Να αιτιολογήσετε γιατί οι γραφικές παραστάσεις των f , g δεν έχουν κοινό σημείο.

70 Θέμα 4 - 15003

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \eta \mu ax \cdot \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - ax\right) + 2 \right] - \sigma \nu ax \cdot \sin(\pi - ax) - 1, \quad \text{με} \quad a \in \mathbb{R}.$$

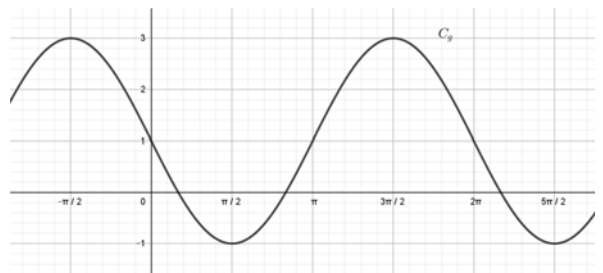
- α. i.** Να δείξετε ότι $f(x) = 2 \cdot \eta \mu ax$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- ii.** Δίνεται επιπλέον ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι αυτή που φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να δείξετε ότι $a = 2$.
- β.** Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με την ευθεία $\varepsilon: y = 1$ για $x \in [0, \pi]$.



71 Θέμα 4 - 15288

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\eta \mu 3x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

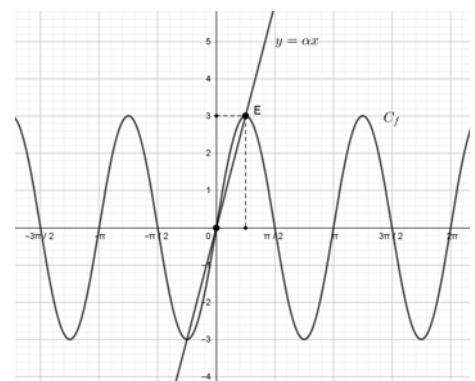
- α.** Να βρείτε την περίοδο T , τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f .
- β.** Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = a\eta \mu b + \gamma$, με $a, b, \gamma \in \mathbb{R}$ και πεδίο ορισμού το \mathbb{R} .
- i.** Με βάση το σχήμα, να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς a , b και γ . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- ii.** Για $a = -2$, $b = 1$ και $\gamma = 1$, να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$ στο διάστημα $[0, \pi]$.



72 Θέμα 4 - 15287

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η ευθεία $y = ax$, $a \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \rho \eta \mu(\omega x)$, όπου $\omega > 0$, $\rho > 0$ και $x \in \mathbb{R}$. Με βάση το σχήμα,

- α.** Να δείξετε ότι $\rho = 3$ και $\omega = 2$.
- β.** Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό a .
- γ.** Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $3\eta \mu(2x) - \frac{12}{\pi}x = 0$.



73 Θέμα 4 - 15422

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) - 2\eta\mu(\pi + 2x)$ με $\alpha > 0$.

- α. Να δείξετε ότι $f(x) = (\alpha + 2)\eta\mu 2x$.
- β. i. Αν η μέγιστη τιμή της f είναι 4, να δείξετε ότι $\alpha = 2$.
ii. Να βρείτε την περίοδο της f .
- γ. Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f σε διάστημα μιας περιόδου.
- δ. Αν $g(x) = 5 - \sin^2 2x$, να βρείτε, αν υπάρχουν, τα κοινά σημεία της C_f με την C_g , όπου C_f , C_g οι γραφικές παραστάσεις των f , g αντίστοιχα.

74 Θέμα 4 - 14239

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f η οποία είναι της μορφής $f(x) = \rho \eta\mu(\omega x) + k$, με ρ, k πραγματικές σταθερές και $\omega > 0$.



- α. Με βάση τη γραφική παράσταση, να βρείτε:
 - i. τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f
 - ii. την περίοδο T της συνάρτησης f .
- β. Να προσδιορίσετε τις τιμές των σταθερών ρ , k και ω . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- γ. Θεωρώντας γνωστό ότι $\rho = 3$, $\omega = \frac{1}{2}$ και $k = 2$, να προσδιορίσετε αλγεβρικά την τετμημένη x_0 του σημείου A της γραφικής παράστασης, που δίνεται στο σχήμα.

4.2 Διαίρεση πολυωνύμων**75 Θέμα 2 - 15113**

Δίνονται τα πολυώνυμα:

$$P(x) = -2x^3 + 4x^2 + 2(x^3 - 1) + 9 \text{ και } Q(x) = \alpha x^2 + 7, \alpha \in \mathbb{R}.$$

- α. Είναι το πολυώνυμο $P(x)$ 3^{ου} βαθμού; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- β. Να βρείτε την τιμή του α , ώστε τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ να είναι ίσα.

76 Θέμα 2 - 15012

Η διαίρεση ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x - 3$ έχει πηλίκο $x^2 + 2$ και υπόλοιπο 4.

- α. Να γράψετε την ταυτότητα της παραπάνω διαίρεσης.
- β. Να δείξετε ότι $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 2$.
- γ. Είναι το $x = 3$ ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

77 Θέμα 2 - 15096

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + x^2 - 3x + 1$.

- α. Να αποδείξετε ότι το 1 και το -1 δεν είναι ρίζες του πολυωνύμου.
- β. Να κάνετε τη διαίρεση του $P(x) : (x^2 + x - 1)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

78 Θέμα 2 - 14981

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - x + 6$.

- α. Να υπολογίσετε το $P(-2)$.
- β. Να αποδείξετε ότι το $x + 2$ είναι παράγοντας του $P(x)$.
- γ. Να παραγοντοποιήσετε το $P(x)$.

79 Θέμα 2 - 15047

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - x^3 - 5x^2 + 7x - 2$.

- α. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου.
- β. Να εξετάσετε αν το πολυώνυμο έχει και άλλη ακέραια ρίζα.

80 Θέμα 2 - 15642

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2(x-1)^{20} - 3(x-1)^{10} + 5x^2 - 3x - 2$.

- α. Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-1$.
- β. i. Να υπολογίσετε την τιμή $P(0)$.
ii. Είναι το x παράγοντας του πολυωνύμου $P(x)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

4.3 Πολυωνυμικές εξισώσεις και ανισώσεις**81 Θέμα 2 - 18230**

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + x^2 - 8x - 4$.

- α. Να αποδείξετε ότι έχει παράγοντα το $(x-2)$.
- β. Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο.
- γ. Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

82 Θέμα 2 - 15618

α. Να γράψετε το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + x^2 - x$ ως γινόμενο ενός πρωτοβάθμιου και ενός δευτεροβάθμιου πολυωνύμου.

β. Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

83 Θέμα 2 - 15695

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + 2x - 3$, $x \in \mathbb{R}$.

- α. Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x+1)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.
- β. Να λύσετε την εξίσωση $P(x) + 6 = 0$.

84 Θέμα 2 - 15175

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - x^2 + x - 1$.

- α. Να αποδείξετε ότι το 1 είναι μία ρίζα του πολυωνύμου.
- β. Να αποδείξετε ότι $P(x) = (x-1) \cdot (x^2 + 1)$.
- γ. Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

85 Θέμα 2 - 15040

Δίνεται η εξίσωση $x^3 - 7x + 6 = 0$.

α. Να εξετάσετε αν ο αριθμός 1 είναι ρίζα της.

β. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης $(x^3 - 7x + 6) : (x - 1)$

και να γράψετε την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης.

γ. Να λύσετε την εξίσωση $x^3 - 7x + 6 = 0$.

86 Θέμα 2 - 15248

Ένα πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με το πολυώνυμο $2x - 1$ δίνει πηλίκο $x^2 - 2$ και υπόλοιπο 1.

α. Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$.

β. Αν $P(x) = 2x^3 - x^2 - 4x + 3$.

i. να αποδείξετε ότι το $P(x)$ έχει ρίζα το 1 και γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x) : (x - 1)$.

ii. να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

87 Θέμα 2 - 15654

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 7x + 6$.

α. Να δείξετε ότι το $x - 2$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

β. Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

88 Θέμα 2 - 17241

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + x + 2$.

α. i. Να αποδείξετε ότι το $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x + 1)$.

ii. Να κάνετε τη διαίρεση $P(x) : (x + 1)$.

β. Αν $P(x) = (x + 1)(x^2 - x + 2)$, να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.

89 Θέμα 2 - 15176

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 2$.

α. Να αποδείξετε ότι το $x - 1$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου.

β. Αν $P(x) = (x - 1)(x^2 - x + 2)$, να βρείτε για ποιες τιμές του x είναι $P(x) > 0$.

90 Θέμα 2 - 15653

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + x^2 + 2x + 2$.

α. i. Να κάνετε τη διαίρεση του $P(x)$ με το $(x + 1)$.

ii. Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x) : (x + 1)$.

β. Αν $P(x) = (x + 1)(x^2 + 2)$, να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.

91 Θέμα 2 - 15674

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 3x^3 - x^2 - x + 2$.

α. Να κάνετε τη διαίρεση $P(x) : (x - 1)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

β. Αν $P(x) = (x - 1)(3x^2 + 2x + 1) + 3$ να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 3$.

92 Θέμα 2 - 15247

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 1$.

- α. Να παραγοντοποιήσετε το $P(x)$.
- β. Αν $P(x) = (2x - 1)(x^2 + 1)$ να λύσετε την ανίσωση $P(x) \geq 0$.

93 Θέμα 2 - 15246

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + x^2 - x - 1$.

- α. Να παραγοντοποιήσετε το $P(x)$.
- β. Αν $P(x) = (x + 1)^2(x - 1)$ να λύσετε την ανίσωση $P(x) \geq 0$.

94 Θέμα 4 - 15677

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + ax + \beta$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- α. Να βρείτε τις τιμές των α, β , αν είναι γνωστό ότι το $P(x)$ διαιρείται με το πολυώνυμο $Q(x) = x^2 - 2x + 1$.
- β. Για $\alpha = 4, \beta = -2$.
- Να κάνετε τη διαίρεση $P(x) : (x^2 + 5)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.
 - Αν $P(x) = (x^2 + 5)(x^2 - 2x - 6) + 14x + 28$ να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 14(x + 2)$.

95 Θέμα 4 - 15250

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^5 - 4x^3 - x^2 + ax + \beta$ το οποίο διαιρούμενο με το $x^2 - 4$ δίνει υπόλοιπο $4x + 1$.

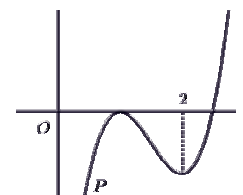
- α. Να κάνετε τη διαίρεση $P(x) : (x^2 - 4)$.
- β. Να βρείτε τις τιμές των α και β .
- γ. Έστω $\alpha = 4$ και $\beta = 5$. Αν το πηλίκο της διαίρεσης $P(x) : (x^2 - 4)$ είναι το $\pi(x) = x^3 - 1$, τότε:
- να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x) : (x^2 - 4)$.
 - να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 4x + 1$.

96 Θέμα 4 - 15431

- α. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + ax^2 + \beta x - 5$ με $x \in \mathbb{R}$.
- Αν το πολυώνυμο έχει παράγοντα το $(x - 1)$ και το υπόλοιπο της διαίρεσής του με $(x - 2)$ είναι -1 , να δείξετε ότι:

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = -6 \\ \text{και} \\ \alpha + \beta = 3 \end{cases}.$$

- Να δείξετε ότι $\alpha = -9$ και $\beta = 12$.
- β. Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης $P(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$ είναι κάτω από τον άξονα $x'x$.
- γ. Αν η γραφική παράσταση της $P(x)$ είναι η διπλανή, να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της.



97 Θέμα 4 - 15174

Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = x^4 + x^3 + ax - 4$ και $\delta(x) = x^2 - 3x + 2$. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $\delta(x)$, είναι το πολυώνυμο $υ(x) = 24x - 24$.

- α.** Να υπολογίσετε την τιμή του πραγματικού αριθμού a .
- β.** Για $a = 2$,
 - i.** να υπολογίσετε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x - 1$.
 - ii.** να βρείτε τα σημεία τομής του άξονα $x'x$ με την γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$.
 - iii.** να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες, η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

98 Θέμα 4 - 15066

Θεωρούμε το πολυώνυμο $P(x) = 2x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 5x + 2$.

- α.** Να αποδείξετε ότι:
 - i.** Ο αριθμός 0 δεν είναι ρίζα του.
 - ii.** Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα του, τότε και ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι επίσης ρίζα του.
- β.** Να βρείτε ένα θετικό ακέραιο αριθμό που να είναι ρίζα του.
- γ.** Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.
- δ.** Να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.

99 Θέμα 4 - 14955

Η μέση θερμοκρασία T (σε βαθμούς Κελσίου) στην επιφάνεια ενός πλανήτη, μετά από x εκατομμύρια χρόνια, έχει εκτιμηθεί ότι είναι $T(x) = x^3 - 10x^2 + 31x - 30$.

- α.** Αποδείξτε ότι 2 εκατομμύρια χρόνια μετά, η μέση θερμοκρασία στον πλανήτη θα είναι μηδέν $^{\circ}\text{C}$.
- β.** Να βρείτε τους αριθμούς α, β, γ με $\alpha < \beta < \gamma$ ώστε να ισχύει

$$T(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$$

- γ.** Θεωρούμε ότι μια χρονική περίοδος παγετώνων στον πλανήτη είναι αυτή στην οποία η μέση θερμοκρασία T είναι συνεχώς κάτω από μηδέν $^{\circ}\text{C}$. Ποιες χρονικές περιόδους θα έχουμε παγετώνες στον πλανήτη;

100 Θέμα 4 - 15960

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 + kx - 1$, με $k \in \mathbb{R}$.

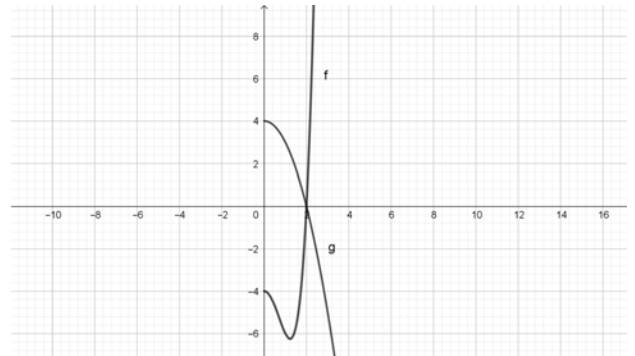
- α.** Να βρείτε την τιμή του $k \in \mathbb{R}$ για την οποία $f(-x) = f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- β.** Για $k = 0$,
 - i.** να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$,
 - ii.** να δείξετε ότι $f(x) \geq -1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,
 - iii.** να βρείτε τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

101 Θέμα 4 - 15790

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^4 - 3x^2 - 4$ και $g(x) = -x^2 + 4$ με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} .

α. Να δείξετε ότι $f(-x) = f(x)$ και $g(-x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β. Στο διπλανό σχήμα δίνεται μέρος των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g . Αφού μεταφέρετε το σχήμα στην κόλλα σας, να συμπληρώσετε τις γραφικές παραστάσεις σε όλο το \mathbb{R} . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



γ. Να λύσετε, αλγεβρικά ή γραφικά:

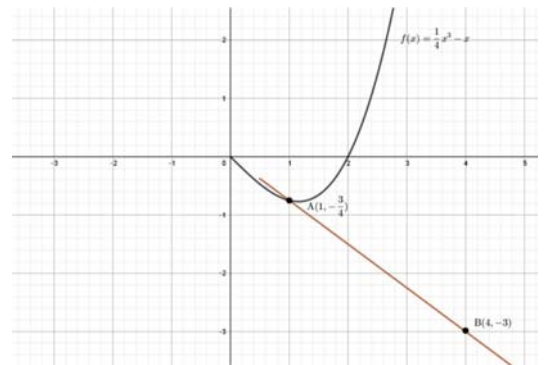
i. την εξίσωση $f(x) = g(x)$.

ii. την ανίσωση $f(x) < g(x)$.

102 Θέμα 4 - 17919

Στο διπλανό σχήμα δίνεται τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - x$, $x \in \mathbb{R}$ και η ευθεία που διέρχεται

από τα σημεία $A\left(1, -\frac{3}{4}\right)$ και $B(4, -3)$.



α. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας AB.

β. i. Να αποδείξετε ότι $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση της f για $x < 0$.

γ. Αν η ευθεία AB έχει εξίσωση $y = -\frac{3}{4}x$, με χρήση του β. ερωτήματος ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε τα κοινά σημεία της ευθείας με την γραφική παράσταση της f .

103 Θέμα 4 - 17925

Στο διπλανό σχήμα δίνεται τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + ax^2$, $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ και το σημείο

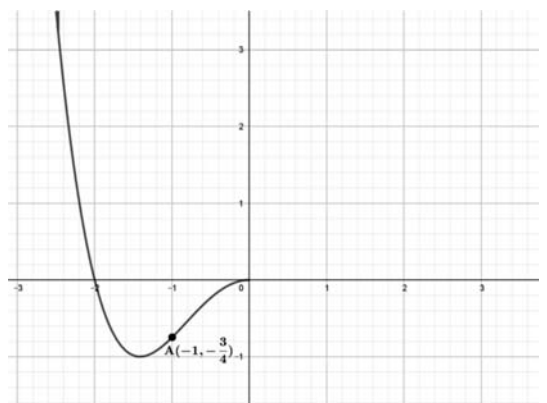
$A\left(-1, -\frac{3}{4}\right)$ αυτής.

α. Να δείξετε ότι $a = -1$.

β. Για $a = -1$,

i. Να αποδείξετε ότι $f(-x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση της f για $x > 0$.



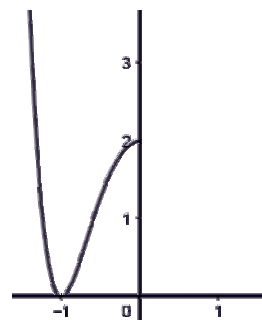
γ. Αφού επιβεβαιώσετε ότι $f(-\sqrt{3}) = -\frac{3}{4}$, με χρήση του β. ερωτήματος ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε, να

βρείτε τα κοινά σημεία της ευθείας $y = -\frac{3}{4}x$ με την γραφική παράσταση της f .

104 Θέμα 4 - 15005

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^6 - 3x^2 + 2$.

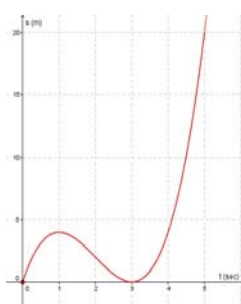
- Να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια.
- Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $x'x$.
- Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της f για $x \leq 0$. Να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f για $x > 0$.
- Με βάση τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα και τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως φθίνουσα.



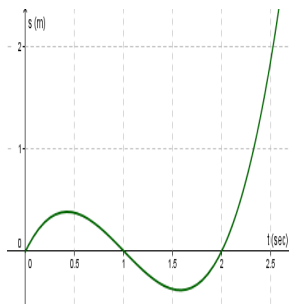
105 Θέμα 4 - 15094

Το διάστημα $S(t)$ σε μέτρα που έχει διανύσει ένα κινητό τη χρονική στιγμή t σε δευτερόλεπτα, δίνεται από τη σχέση: $S(t) = 2t^3 - 6t^2 + 10t$.

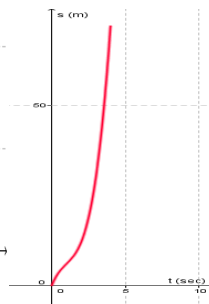
- Να βρείτε το διάστημα που έχει διανύσει το κινητό τις χρονικές στιγμές $t = 0$ και $t = 2$.
- Να βρείτε πόσο χρόνο χρειάζεται το κινητό για να διανύσει απόσταση 30 μέτρων.
- Επειδή το $S(t)$ εκφράζει το διάστημα που διανύει το κινητό, θα πρέπει να είναι πάντα μη αρνητικό. Να αποδείξετε αλγεβρικά αυτόν τον ισχυρισμό.
- Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις τριών πολυωνύμων $S(t)$. Μία από αυτές εκφράζει το διάστημα $S(t)$ της εκκίνησης. Να βρείτε ποια από τις τρεις είναι αυτή, δικαιολογώντας την απάντησή σας.



(I)



(II)



(III)

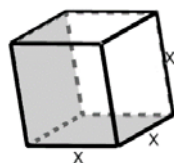
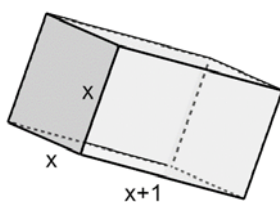
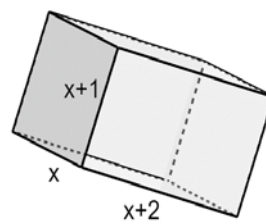
106 Θέμα 4 - 15377

Μία κυβική δεξαμενή A έχει ακμή με μήκος x μέτρα.

Αν αυξηθεί η μία μόνο ακμή της κατά μία μονάδα θα μετατραπεί στη δεξαμενή B σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου με τετράγωνη βάση.

- Να βρείτε τη διαφορά $\Delta(x)$ των όγκων των δύο δεξαμενών ως συνάρτηση του x .
- Αν ο όγκος της δεξαμενής B είναι 36 κυβικά μέτρα να βρείτε:
 - Τις διαστάσεις των δεξαμενών A και B .
 - Τη διαφορά των όγκων $\Delta(x)$.
- Αν επιπλέον αυξηθεί η μία ακμή της βάσης της δεξαμενής B κατά 2 μονάδες, να βρείτε τη μικρότερη τιμή του x ώστε ο όγκος της νέας δεξαμενής Γ να είναι τουλάχιστον 60 κυβικά μέτρα.

Βοηθητικά δίνονται τα σχήματα των δεξαμενών A , B και Γ .

Δεξαμενή A Δεξαμενή B Δεξαμενή Γ 

107 Θέμα 4 - 17943

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο με εμβαδόν $E = 60 \text{ cm}^2$, του οποίου η υποτείνουσα είναι κατά 2 cm μεγαλύτερη από τη μία κάθετη πλευρά. Αν ονομάσουμε x το μήκος αυτής της κάθετης πλευράς και y το μήκος της άλλης κάθετης (σε cm), τότε:

- α. Να δείξετε ότι ο αριθμός x ικανοποιεί την εξίσωση:

$$x^3 + x^2 - 3600 = 0$$

- β. Αν γνωρίζετε ότι το μήκος της πλευράς x είναι αριθμός ακέραιος και μικρότερος του 16 , να βρείτε την τιμή του x καθώς και τα μήκη των άλλων πλευρών του τριγώνου.
- γ. Να βρείτε το πλήθος των ορθογωνίων τριγώνων που ικανοποιούν τα αρχικά δεδομένα του προβλήματος. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

108 Θέμα 4 - 15187

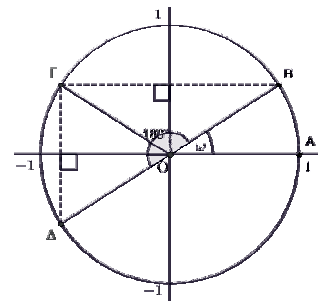
Για τη γωνία ω του διπλανού σχήματος ισχύει

$$5\eta\mu^3\omega - 8\eta\mu^2\omega - 7\eta\mu\omega + 6 = 0$$

- α. Να δείξετε ότι $\eta\mu\omega = \frac{3}{5}$.

- β. Να βρείτε:

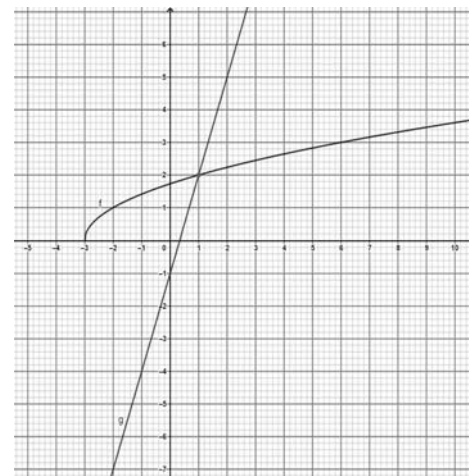
- την τιμή του $\sigma\upsilon\nu\omega$,
- τις συντεταγμένες των σημείων B , Γ και Δ ,
- το ημίτονο και το συνημίτονο των θετικών γωνιών $\hat{A}\hat{O}B$, $\hat{A}\hat{O}\Gamma$ και $\hat{A}\hat{O}\Delta$.



109 Θέμα 4 - 15037

Στο σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \sqrt{x+3}$ και $g(x) = 3x-1$.

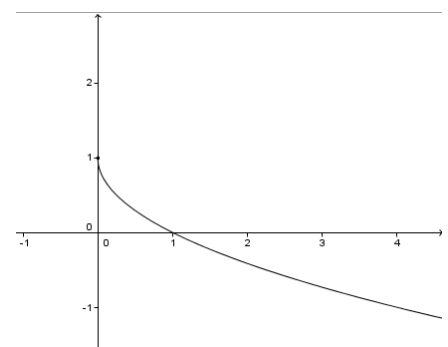
- α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τη μονοτονία των συναρτήσεων f , g .
- β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$.
- γ. i. Να λύσετε γραφικά την ανίσωση $f(x) < g(x)$.
- ii. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το αποτέλεσμα του i. ερωτήματος.



110 Θέμα 4 - 15270

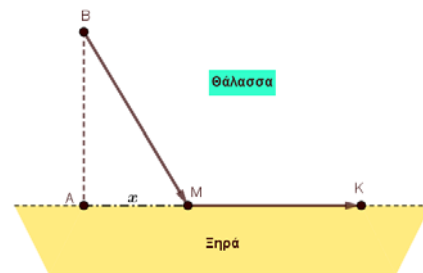
Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

- α. Να βρείτε την μονοτονία της και την μέγιστη τιμή της.
- β. Αν $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$, και $0 < \alpha < \frac{1}{4} < \beta$, να βρείτε το πρόσημο του γινομένου $P = (2f(\alpha) - 1)(2f(\beta) - 1)$.
- γ. Έστω ότι η συνάρτηση του προβλήματος είναι η $f(x) = 1 - \sqrt{x}$, $x \geq 0$. Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής της παράστασης με την ευθεία $y = 2x$.



111 Θέμα 4 - 15436

Ένας κολυμβητής βρίσκεται στη θάλασσα, στο σημείο B σε απόσταση 2 km από το κοντινότερο σημείο A μιας ευθύγραμμης ακτής. Ο προορισμός του είναι ένα σημείο K της ακτής, το οποίο απέχει 4 km από το A . Η διαδρομή που κάνει είναι η BM κολυμπώντας στη θάλασσα με σταθερή ταχύτητα 3 km/h και η MK τρέχοντας στην ακτή με σταθερή ταχύτητα 5 km/h .



Γνωρίζουμε ότι η σχέση μεταξύ του διαστήματος s που διανύεται, της ταχύτητας v και του αντίστοιχου χρόνου κίνησης t , είναι $v = \frac{s}{t} \Leftrightarrow t = \frac{s}{v}$.

Αν το σημείο M απέχει από το A απόσταση $x\text{ km}$, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι $BM = \sqrt{4 + x^2}$.

β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση που εκφράζει τον χρόνο κίνησης t (σε h) του κολυμβητή – δρομέα ως προς την απόσταση x (σε km) είναι η:

$$t(x) = \frac{\sqrt{4 + x^2}}{3} + \frac{4 - x}{5}, \quad x \in [0, 4].$$

γ. Να βρείτε τη θέση του σημείου M της ακτής, έτσι ώστε ο χρόνος της διαδρομής του κολυμβητή να είναι $\frac{4}{3}$ ώρες.

5.1 Εκθετική συνάρτηση

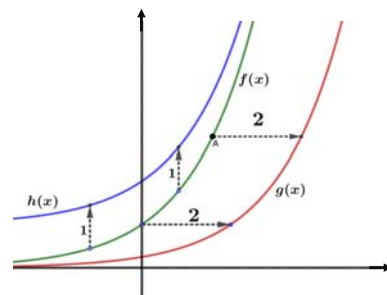
112 Θέμα 2 - 15393

Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = 2^x$, $x \in \mathbb{R}$ και δύο άλλων συναρτήσεων $g(x)$ και $h(x)$, $x \in \mathbb{R}$ που προέκυψαν από μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της $f(x)$.

α. Να εξηγήσετε με τι είδους μετατοπίσεις προέκυψαν οι γραφικές παραστάσεις των $g(x)$ και $h(x)$ από την γραφική παράσταση της $f(x)$.

β. Να γράψετε τους τύπους των συναρτήσεων $g(x)$ και $h(x)$.

γ. Να βρείτε την τετμημένη του σημείου A της γραφικής παράστασης της f του οποίου η τεταγμένη είναι 16 .



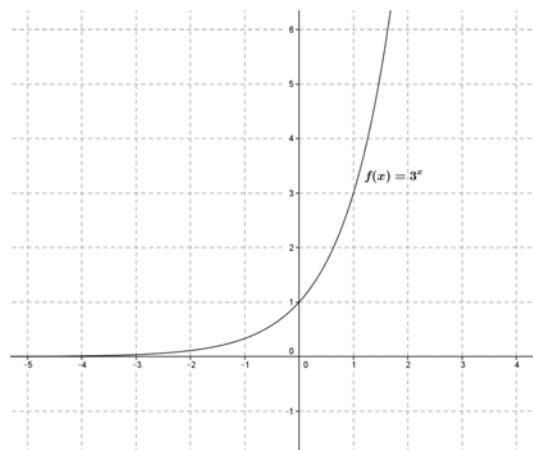
113 Θέμα 2 - 21451

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = 3^x, \quad \text{με } x \in \mathbb{R}.$$

α. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(x) = 3^x + 1$ και $h(x) = 3^x - 1$, μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

β. Ποια είναι η ασύμπτωτη ευθεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g και ποια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης h ;



114 Θέμα 4 - 21448

Όταν ένας ασθενής παίρνει μια δόση ενός φαρμάκου τη χρονική στιγμή $t=0$, τότε ο οργανισμός του το μεταβολίζει έτσι ώστε η ποσότητά του $f(t)$ (σε mg) να μειώνεται μετά από t ημέρες σύμφωνα με τη συνάρτηση

$$f(t) = q_0 \cdot \alpha^t, \quad t \geq 0$$

όπου οι αριθμοί α , q_0 είναι κατάλληλες θετικές σταθερές.

- α.** Να εξηγήσετε τι παριστάνει η σταθερά q_0 στο πλαίσιο του προβλήματος και να αιτιολογήσετε γιατί ισχύει $0 < \alpha < 1$.
- β.** Υποθέτουμε τώρα ότι μία ημέρα μετά τη λήψη του φαρμάκου, η ποσότητά του στον οργανισμό του ασθενούς έχει υποδιπλασιαστεί.
- i.** Να αποδείξετε ότι $\alpha = \frac{1}{2}$.
- ii.** Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών της συνάρτησης f , εκφράζοντας τις τιμές $f(t)$ ως συνάρτηση της αρχικής τιμής q_0 .

t	0	1	2	3	4	5	6
$f(t)$	q_0	$\frac{q_0}{2}$					

- γ.** Υποθέτουμε τώρα ότι $\alpha = \frac{1}{2}$ και ότι η ποσότητα του φαρμάκου που παραμένει στον οργανισμό στο τέλος της 4^{ης} ημέρας είναι 25 mg.
- i.** Να υπολογίσετε την ποσότητα της δόσης που πήρε ο ασθενής.
- ii.** Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο διάστημα $[0, 6]$.

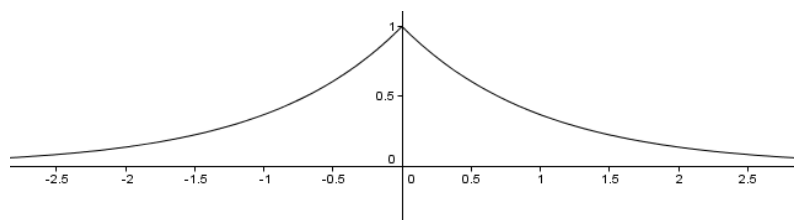
115 Θέμα 4 - 21471

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha \cdot 2^x + \beta$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(1, 3)$ και $B(2, 13)$.

- α.** Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β .
- Αν $\alpha = 5$ και $\beta = -7$:
- β.** Να βρείτε το κοινό σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $y'y$.
- γ.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .
- δ.** Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 4^x - 3$.

116 Θέμα 4 - 15269

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f διπλού τύπου.



- α.** Αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση αντιστοιχεί σε μια ακριβώς από τις παρακάτω συναρτήσεις να επιλέξετε ποιος είναι ο τύπος της συνάρτησης f .

$$A. f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0 \\ e^{-x}, & x \geq 0 \end{cases} \quad B. f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x < 0 \\ e^x, & x \geq 0 \end{cases}$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

- β.** Να βρείτε τη μονοτονία και την μέγιστη τιμή της.
- γ.** Να βρείτε, για τις διάφορες τιμές του α , το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης C_f της f με την ευθεία $y = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
- δ.** Να αιτιολογήσετε γιατί το μοναδικό κοινό σημείο της γραφικής παράστασης C_f της f με την παραβολή $y = x^2 + 1$, $x \in \mathbb{R}$ είναι το σημείο $(0, 1)$.

117 Θέμα 4 - 21470

Μια ποσότητα Q ραδιενεργού υλικού (σε κιλά) θάβεται και με την πάροδο του χρόνου t (σε έτη), μειώνεται ακολουθώντας το νόμο της εκθετικής μεταβολής $Q(t) = Q_0 \cdot e^{ct}$. Γνωρίζουμε ότι μετά από δύο χρόνια έχει απομείνει το $\frac{1}{3}$ της αρχικής ποσότητας και μετά από τέσσερα χρόνια έχει απομείνει 1 κιλό.

α. Να δείξετε ότι $Q(t) = Q_0 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^t$.

β. Να βρείτε την αρχική ποσότητα που θάφτηκε (για $t = 0$).

γ. Να βρείτε μετά από πόσα χρόνια η ποσότητα που θα έχει απομείνει θα είναι $\frac{1}{81}$ κιλά.

5.2 Λογάριθμοι**118 Θέμα 2 - 15687**

Δίνεται η παράσταση $A = \log_4 3 + \log_4 \alpha - \log_4 \beta$, όπου α, β θετικοί αριθμοί.

α. Να αποδείξετε ότι $A = \log_4 \frac{3\alpha}{\beta}$.

β. Αν για τους αριθμούς α, β ισχύει $3\alpha = 16\beta$, να βρείτε την τιμή της παράστασης A .

119 Θέμα 2 - 15816

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \ln 2$, $\beta = \ln 4$, $\gamma = \ln 8$.

α. Να αποδείξετε ότι $2\beta = \alpha + \gamma$.

β. Να αποδείξετε ότι $\beta + \gamma = 5\alpha$.

120 Θέμα 2 - 15817

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \ln 2$ και $\beta = \ln 3$.

α. Να αιτιολογήσετε γιατί $0 < \alpha < \beta$.

β. Να αποδείξετε ότι $\beta - \alpha < 1$.

Δίνεται $e \approx 2,71$.

5.3 Λογαριθμική συνάρτηση**121 Θέμα 2 - 15808**

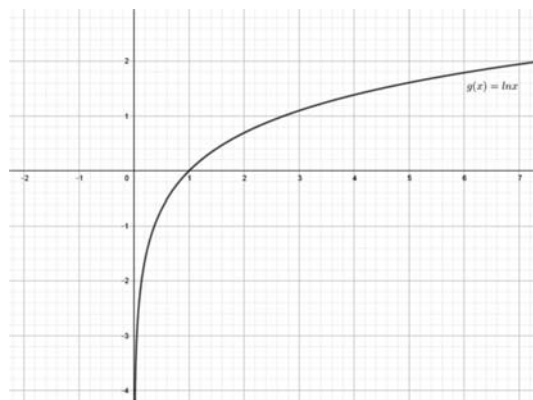
Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x+2)$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

β. Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$.

γ. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \ln x$.

Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να χαράξετε τη γραφική παράσταση της $f(x) = \ln(x+2)$ μετατοπίζοντας κατάλληλα την γραφική παράσταση της g .



122 Θέμα 2 - 21449

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x+1)$.

- α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- β. Να βρείτε τα σημεία τομής (αν υπάρχουν) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.
- γ. Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της $y = \ln x$.

123 Θέμα 2 - 15675

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - 1)$.

- α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

124 Θέμα 2 - 15267

Δίνεται η εξίσωση $\log(x^2 + 1) = 1 + \log 3 - \log 6$.

- α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση γράφεται $\log(x^2 + 1) = \log 5$.
- β. Να λύσετε την εξίσωση.

125 Θέμα 2 - 17318

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 3)$, με $x \in \mathbb{R}$.

- α. Να βρείτε το $f(3)$.
- β. Να δείξετε ότι $\ln 3 + 3 \ln 2 - f(3) = \ln 4$.
- γ. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \ln 4$.

126 Θέμα 2 - 21450

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(x^2 + 4)$ και $g(x) = \ln x + \ln 4$.

- α. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g .
- β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$.

127 Θέμα 4 - 21446

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - 2)$.

- α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + x = 3 \ln 2$.
- γ. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) + x \geq 3 \ln 2$.

128 Θέμα 4 - 21445

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log \frac{4^x - 1}{2^x + 5}$.

- α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \log 3 - \log 7$.
- γ. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > \log 3 - \log 7$.

129 Θέμα 4 - 15021

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$.

- α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
- β. Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας το $O(0, 0)$.
- γ. Να υπολογίσετε την παράσταση $f(\ln 2) + f(\ln \frac{1}{2})$.
- δ. Να αποδείξετε ότι $f(\eta\mu\theta) + f(\eta\mu(\pi + \theta)) = 0$, για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$.

130 Θέμα 4 - 15823

Ένα πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με το πολυώνυμο $4x^2 - 1$ δίνει πηλίκο $3x - 2$ και υπόλοιπο 1.

- α. Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 1$.
- β. Να αποδείξετε ότι $P(\log 5) \neq 1$.
- γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $P(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1, 0)$.

131 Θέμα 4 - 15474

Δίνεται η πολωνυμική συνάρτηση $P(x) = e^{\ln e} x^3 + 4x^2 \ln \sqrt{e} + 2$.

- α. Να δείξετε ότι $P(x) = ex^3 + 2x^2 + 2$.
- β. Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της πολωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ με την ευθεία $\varepsilon: y = ex + 4$.
- γ. Να βρείτε τα διαστήματα του x που η γραφική παράσταση της πολωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ είναι πάνω από την ευθεία $\varepsilon: y = ex + 4$.
- δ. Να βρείτε το πρόσημο της παράστασης: $P(e) - e^2 - 4$.

132 Θέμα 4 - 15251

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - 9x^2 + (a - 2)x - 6$ το οποίο έχει παράγοντα το $x - 1$.

- α. Να βρείτε τον αριθμό a .
- β. Για $a = 15$.
 - i. να κάνετε τη διαίρεση $P(x) : (x^2 - 3x + 2)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.
 - ii. αν $P(x) = (x^2 - 3x + 2)(2x - 3)$ να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.
 - iii. να αποδείξετε ότι $P(\ln 2) < 0$.

133 Θέμα 4 - 15822

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = ax^3 + \beta x^2 + x$, με $a, \beta \in \mathbb{Z}$ και $a \neq 0$, το οποίο έχει 3 ακέραιες ρίζες διαφορετικές ανά δύο.

- α. Να βρείτε τις ακέραιες ρίζες του $P(x)$.
- β. Να αποδείξετε ότι $a = -1$ και $\beta = 0$.
- γ. Με $a = -1$ και $\beta = 0$,
 - i. να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 0$.
 - ii. να αποδείξετε ότι $P(\log \sqrt{10}) > 0$.

134 Θέμα 4 - 15093

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log(10^x - 1)$.

- α.** Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το διάστημα $(0, +\infty)$.
- β.** Να βρείτε το διάστημα στο οποίο η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.
- γ.** Να αποδείξετε ότι $f(x) + x = \log(10^{2x} - 10x)$, $x > 0$.
- δ.** Να βρείτε τις συντεταγμένες του μοναδικού κοινού σημείου της γραφικής παράστασης της f και της ευθείας $y = -x$.

135 Θέμα 4 - 15690

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{2} \ln x^2$, $x \neq 0$.

- α.** Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$.
- β.** Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $f(x) = \ln x$.
- γ.** Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της $f(x) = \frac{1}{2} \ln x^2$, $x \neq 0$.
- δ.** Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική της παράσταση είναι κάτω από την ευθεία $y = 2$.

136 Θέμα 4 - 15015

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - x^2 - 2x$.

- α.** Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.
- β.** Να λύσετε την εξίσωση $\ln^3 x - \ln^2 x - 2 \ln x = 0$.
- γ.** Να λύσετε την ανίσωση $\ln^3 x - \ln^2 x - 2 \ln x > 0$.

137 Θέμα 4 - 15679

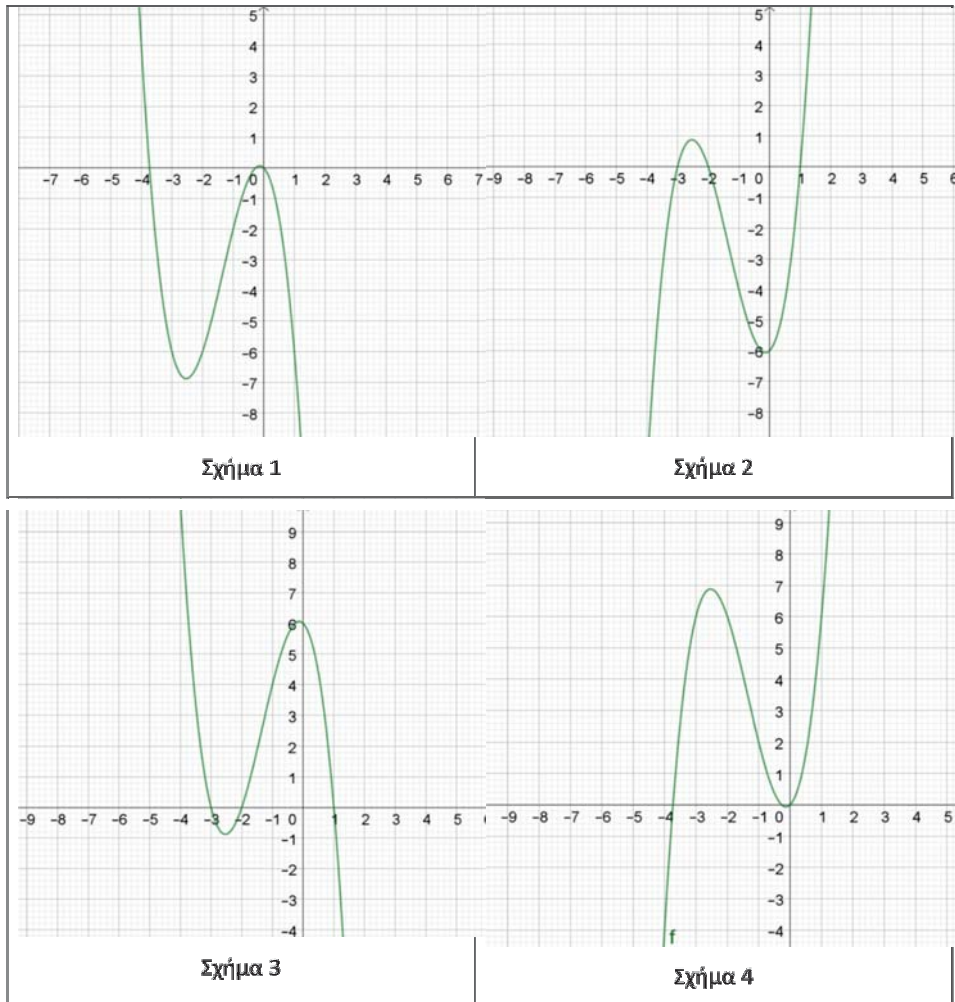
Δίνεται η παράσταση $A = \ln \left(\frac{e^{2x} - 1}{e^x - 3} \right)$.

- α.** Να λύσετε την ανίσωση $\frac{\omega^2 - 1}{\omega - 3} > 0$.
- β.** Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A .
- γ.** Να λύσετε την εξίσωση $A = -\ln 3$.

138 Θέμα 4 - 15678

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = -x^3 - 4x^2 - x + 6$.

- α. Να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.
- β. Από τα παρακάτω σχήματα, ένα μόνο μπορεί να αντιστοιχεί στην γραφική παράσταση της πολωνυμικής συνάρτησης $P(x)$. Να βρείτε ποιο αιτιολογώντας την απάντησή σας.
- γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $P(x) = \ln x$ έχει μοναδική λύση την $x = 1$.



139 Θέμα 4 - 16001

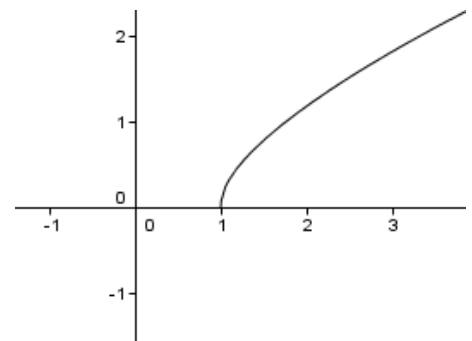
Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x \ln x}$ και $g(x) = \sqrt{\ln x}$.

- α. Να βρείτε τα πεδία ορισμού τους.
- β. Να αιτιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση της f είναι από τη γραφική παράσταση της g και πάνω.

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της f .

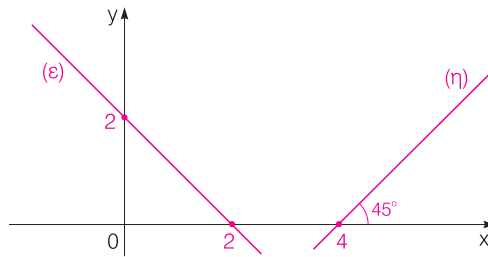
- γ. i. Να βρείτε τη μονοτονία της.
- ii. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f\left(\frac{3}{5}\right)$ και $f\left(\frac{7}{5}\right)$.

- δ. Να σχεδιάσετε την ευθεία $y = 1 - x$ και να βρείτε γραφικά τη λύση της εξίσωσης $f(x) = 1 - x$.



140 Θέμα 3 - 14235

α. Με βάση τα δεδομένα του παρακάτω σχήματος, να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών (ε) και (η).



β. Να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών (ε) και (η).

141 Θέμα 3 - 14237

Για τις ηλικίες των μελών μιας τριμελούς οικογένειας ισχύουν τα παρακάτω:

Η ηλικία της μητέρας είναι τριπλάσια από την ηλικία του παιδιού, ο λόγος της ηλικίας του πατέρα προς την ηλικία του παιδιού είναι ίσος με $\frac{11}{3}$ και επιπλέον το άθροισμα των ηλικιών και των τριών ισούται με 115 χρόνια.

α. Να εκφράσετε τα δεδομένα με ένα σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους.

β. Να βρείτε την ηλικία του καθενός.

142 Θέμα 3 - 14979

Δίνεται το σύστημα: $(\Sigma): \begin{cases} y = -x + 2 \\ y = \frac{1}{x} \end{cases}$.

α. Να λύσετε το σύστημα (Σ).

β. Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά, σε κατάλληλο σχήμα, τις λύσεις του συστήματος (Σ) που βρήκατε στο ερώτημα α.

143 Θέμα 3 - 15392

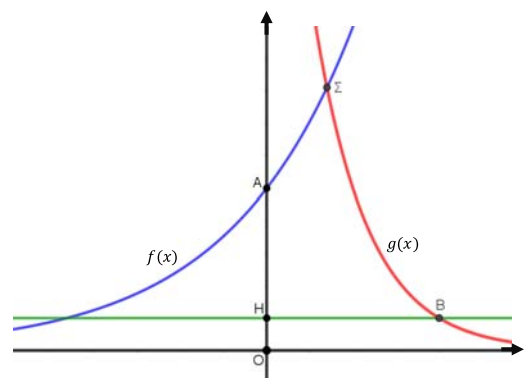
Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = 2^x$ και $g(x) = 5^{1-x}$, $x \in \mathbb{R}$. Μια ευθεία παράλληλη προς τον άξονα $x'x$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $H(0, \frac{1}{5})$.

σημείο $H(0, \frac{1}{5})$.

α. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α και Β.

β. Να βρείτε την τετμημένη του σημείου Σ.

γ. Αν είναι x_B , x_Σ οι τετμημένες των σημείων Β, Σ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $x_B - x_\Sigma = \log 20$

**144 Θέμα 3 - 15676**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - 1)$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$.

γ. Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τον $x'x$.