

Αναστάσιος Χ. Μπάρλας

Γεωμετρία

Β' Λυκείου

Τράπεζα
Θεμάτων
2022

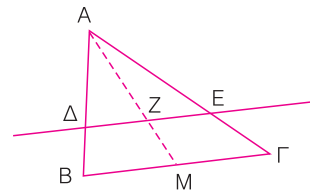
ενημέρωση 6/5/2022

ΘΕΜΑΤΑ ΤΡΑΠΕΖΑΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

1. Αναλογίες

1 Θέμα 2 - 14534

Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=6$ και $A\Gamma=9$. AM είναι η διάμεσος του τριγώνου και το σημείο Z εσωτερικό στην AM ώστε να σχηματίζει λόγο $\frac{AZ}{AM} = \frac{2}{3}$. Από το σημείο Z φέρουμε ευθεία παράλληλη στην πλευρά $B\Gamma$, που τέμνει τις πλευρές AB και $A\Gamma$ στα σημεία Δ και E αντίστοιχα.

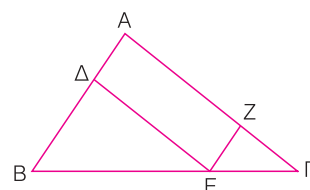


α. Να αποδείξετε ότι: $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{2}{3}$ και $\frac{AE}{E\Gamma} = 2$.

β. Να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων $A\Delta$ και $E\Gamma$.

2 Θέμα 2 - 14579

Δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα σημεία Δ , E και Z των πλευρών του AB , $B\Gamma$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα, ώστε η ΔE να είναι παράλληλη στην $A\Gamma$. Επίσης $AB=3A\Delta$.



α. Να βρείτε τους λόγους $\frac{B\Delta}{A\Delta}$ και $\frac{BE}{E\Gamma}$.

β. Αν επιπλέον γνωρίζετε ότι $A\Gamma=3,9$ και $\Gamma Z=1,3$ να αποδείξετε ότι η ZE είναι παράλληλη της AB .

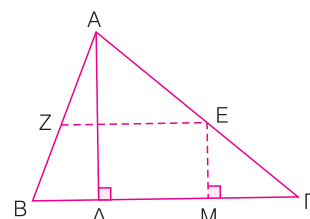
3 Θέμα 2 - 15830

Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ του διπλανού σχήματος, το $A\Delta$ είναι ύψος του τριγώνου. Η κάθετος στην πλευρά $B\Gamma$ σε ένα άλλο σημείο της M τέμνει την $A\Gamma$ στο E . Από το E φέρνουμε παράλληλη στην $B\Gamma$, που τέμνει την AB στο Z .

Να αποδείξετε ότι:

α. $\frac{ZA}{ZB} = \frac{EA}{E\Gamma}$

β. $\frac{ZA}{ZB} = \frac{M\Delta}{M\Gamma}$

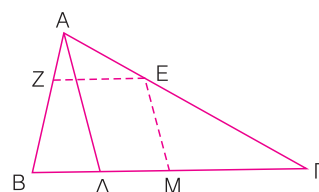


4 Θέμα 2 - 15831

Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ του διπλανού σχήματος, το M είναι μέσο της πλευράς $B\Gamma$ και το Δ είναι το μέσο του MB . Από το M φέρνουμε παράλληλη στην $A\Delta$, που τέμνει την $A\Gamma$ στο E . Από το E φέρνουμε παράλληλη στην $B\Gamma$, που τέμνει την AB στο Z . Να αποδείξετε ότι:

α. $\frac{EA}{E\Gamma} = \frac{1}{2}$

β. $\frac{ZA}{ZB} = \frac{1}{2}$



5 Θέμα 4 - 14499

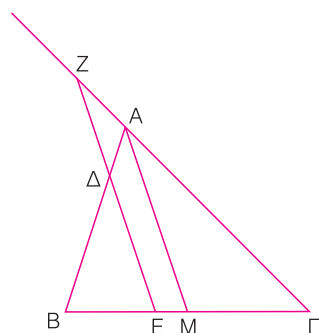
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Θεωρούμε AM τη διάμεσό του και E τυχαίο σημείο του τμήματος BM . Από το E φέρουμε ευθεία παράλληλη στην AM που τέμνει την πλευρά AB στο Δ και την προέκταση της ΓA στο Z .

α. Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας:

i. $\frac{\Delta E}{\dots} = \frac{\dots}{BM} = \frac{B\Delta}{\dots}$

ii. $\frac{\dots}{AM} = \frac{E\Gamma}{\dots} = \frac{\dots}{\Gamma A}$

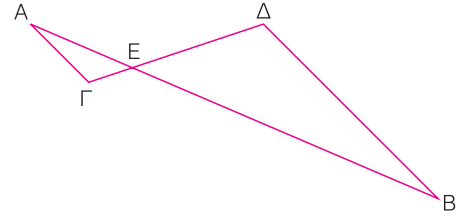
β. Να αποδείξετε ότι $\Delta E + EZ = 2AM$ για οποιαδήποτε θέση του E στο BM .



3. Ομοιότητα

6 Θέμα 2 - 16100

Στο διπλανό σχήμα δίνονται ότι $AE = 5$, $AG = 4$, $EG = 2$, $DE = 6$, $BE = 15$ και $BD = 12$.



α. Να υπολογίσετε τους λόγους

$$\frac{BD}{AG} , \frac{DE}{EG} , \frac{BE}{AE}$$

β. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα AEG και BED είναι όμοια.

γ. Να συμπληρώσετε τις ακόλουθες ισότητες οι οποίες προκύπτουν από την ομοιότητα των τριγώνων AEG και BED και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

$$\hat{A} = \dots , \quad \hat{G} = \dots , \quad \hat{AEG} = \dots$$

7 Θέμα 2 - 14535

Δίνονται δύο τρίγωνα ABG και DEZ για τα οποία γνωρίζουμε ότι:

$$AB = 9 , AG = 15 \text{ και } \hat{A} = 48^\circ , ZD = 12 , ZE = 20 \text{ και } \hat{Z} = 48^\circ .$$

α. Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα ABG και DEZ είναι όμοια.

β. i. Να γράψετε τους λόγους των ομόλογων πλευρών των δυο τριγώνων.

ii. Να βρείτε το λόγο ομοιότητάς τους.

8 Θέμα 2 - 14536

Για δύο ισοσκελή τρίγωνα ABG ($AB = AG$) και $EΔZ$ ($EΔ = EZ$) γνωρίζουμε ότι:

$$\hat{A} = 48^\circ , \hat{Z} = 66^\circ \text{ και } AB = 3EΔ$$

α. Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα ABG και $EΔZ$ είναι όμοια.

β. i. Να γράψετε τους ίσους λόγους που προκύπτουν από την ομοιότητα των δυο τριγώνων

ii. Να βρείτε το λόγο των βάσεων των δυο τριγώνων.

9 Θέμα 2 - 14537

Δίνονται δύο τρίγωνα ABG και $ΔEZ$ για τα οποία γνωρίζουμε ότι:

$$\hat{A} = 48^\circ , \hat{B} = 53^\circ , \hat{E} = 79^\circ \text{ και } \hat{Z} = 48^\circ$$

α. Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα ABG και $ΔEZ$ είναι όμοια.

β. i. Ποιες είναι οι ομόλογες πλευρές των δύο τριγώνων;

ii. Να γράψετε την ισότητα των λόγων των ομόλογων πλευρών των δυο τριγώνων.

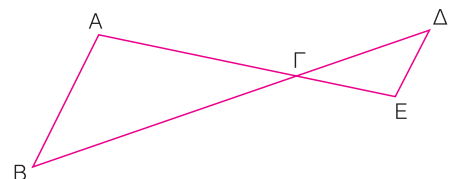
10 Θέμα 2 - 14538

Στο διπλανό σχήμα τα τμήματα AB και $ΔE$ είναι παράλληλα και τα τμήματα AG και $ΓE$ είναι τέτοια, ώστε $AG = 2ΓE$.

α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ABG και $EΔΓ$ είναι όμοια.

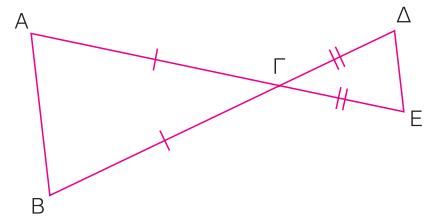
β. i. Να γράψετε τους λόγους των ομόλογων πλευρών των δύο τριγώνων.

ii. Ποιος είναι ο λόγος ομοιότητας των δύο τριγώνων;



11 Θέμα 2 - 14546

Στο διπλανό σχήμα τα ευθύγραμμα τμήματα AE και BD τέμνονται στο Γ , τα τρίγωνα ΓAB και ΓDE που σχηματίζονται είναι ισοσκελή και οι βάσεις τους AB και DE είναι τέτοιες, ώστε $AB = 2DE$.



α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΓAB και ΓDE είναι όμοια.

β. i. Να γράψετε την ισότητα των λόγων που προκύπτει από την ομοιότητα των τριγώνων του ερωτήματος **α.**

ii. Ποια σχέση συνδέει τις πλευρές AG και GE των δύο τριγώνων;

12 Θέμα 2 - 16086

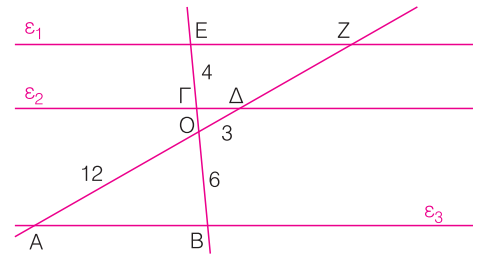
Στο διπλανό σχήμα οι ευθείες ε_1 , ε_2 και ε_3 είναι παράλληλες.

Δίνονται ότι $GE = 4$, $OD = 3$, $OA = 12$, $OB = 6$.

α. Να υπολογίσετε τα τμήματα OG και AZ .

β. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα OEZ και OBA είναι όμοια.

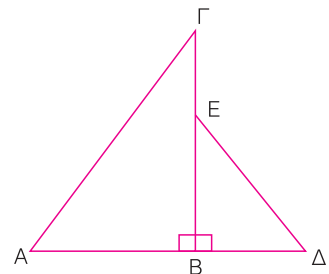
γ. Αν $OG = 1,5$ και $AZ = 8$, να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{EZ}{AB}$.

**13 Θέμα 2 - 16099**

Στο διπλανό σχήμα δίνονται ότι $\hat{A} = \hat{\Delta}$, $AG = 36$, $BD = 16$ και $ED = 24$.

α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔBE είναι όμοια.

β. Να υπολογίσετε την πλευρά AB .

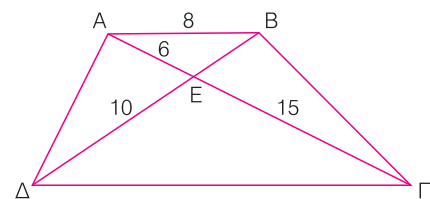
**14 Θέμα 2 - 16113**

Δίνεται το τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Delta\Gamma$, E σημείο τομής των διαγώνιων, $AE = 6$, $AB = 8$, $GE = 15$ και $DE = 10$.

α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα AEB και GED είναι όμοια.

β. Να γράψετε την αναλογία των ομόλογων πλευρών τους.

γ. Να υπολογίσετε τα τμήματα BE και $\Gamma\Delta$.

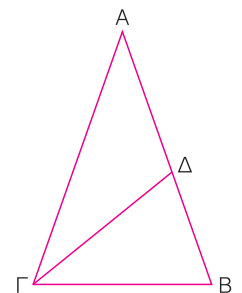
**15 Θέμα 2 - 16126**

Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB = AG = 36$ και $B\Gamma = 24$.

Το σημείο Δ της πλευράς AB είναι τέτοιο ώστε $B\Delta = 16$.

α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Gamma B\Delta$ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\frac{3}{2}$.

β. Να υπολογίσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος $\Gamma\Delta$.

**16 Θέμα 2 - 16755**

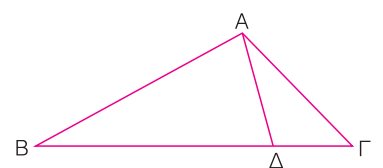
Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $B\Gamma = 2AG$ και σημείο Δ στην πλευρά $B\Gamma$ τέτοιο ώστε $AG = 2\Gamma\Delta$, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α. Να υπολογίσετε τους λόγους $\frac{B\Gamma}{AG}$ και $\frac{AG}{\Gamma\Delta}$.

β. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Delta A\Gamma$ είναι όμοια.

γ. Να συμπληρώσετε τις ακόλουθες ισότητες οι οποίες προκύπτουν από την ομοιότητα των τριγώνων $AB\Gamma$ και $\Delta A\Gamma$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

$$\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} = \dots, \quad \hat{B} = \dots$$

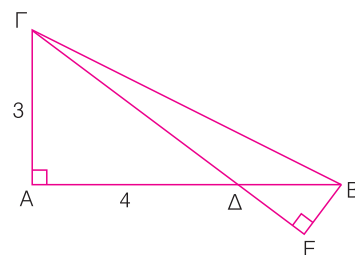


4. Το Πυθαγόρειο θεώρημα

17 Θέμα 2 - 16757

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A}=90^\circ$, $AB=6$ και $A\Gamma=3$. Θεωρούμε σημείο Δ στην πλευρά AB , τέτοιο ώστε $A\Delta=4$. Φέρουμε την απόσταση BE της κορυφής B από την $\Gamma\Delta$, όπως φαίνεται στο σχήμα.

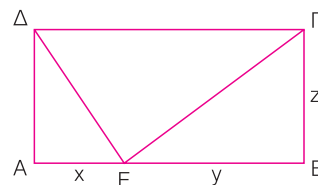
- α. Να υπολογίσετε το μήκος $\Gamma\Delta$.
 β. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $\Lambda\Delta\Gamma$ και $E\Delta B$ είναι όμοια.
 γ. Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος BE .



18 Θέμα 2 - 16805

Η περίμετρος του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ του σχήματος είναι 72 και το E είναι σημείο στην πλευρά AB . Τα μήκη των τμημάτων x , y , z είναι ανάλογα προς τους αριθμούς 2, 4, 3 αντίστοιχα.

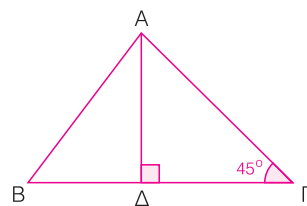
- α. Να αποδείξετε ότι $x=8$, $y=16$ και $z=12$.
 β. Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου $\Gamma E\Delta$.



19 Θέμα 2 - 17342

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $B\Gamma=7$, $\hat{\Gamma}=45^\circ$ και ύψος $A\Delta=4$.

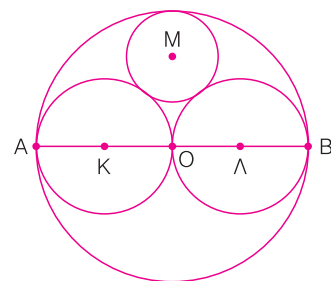
- α. Να αποδείξετε ότι:
 i. $\Gamma\Delta=4$. ii. $A\Gamma=4\sqrt{2}$
 β. Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς AB .



20 Θέμα 4 - 14500

Δύο ίσοι κύκλοι (K, R) και (Λ, R) εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο O . Ένας τρίτος κύκλος (M, ρ) εφάπτεται εξωτερικά με τους δύο κύκλους κέντρων K και Λ . Με κέντρο το σημείο O και ακτίνα $2R$ γράφουμε κύκλο, ο οποίος εφάπτεται εξωτερικά των 3 παραπάνω κύκλων, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

- α. Στον παρακάτω πίνακα, στη στήλη A είναι οι διάκεντροι KM , ΛM και OM των κύκλων με κέντρα K , Λ , M και O και στη στήλη B τα μήκη των διακέντρων αυτών. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία της στήλης A με τα αντίστοιχα της στήλης B , γράφοντας στην κόλλα σας μόνο τις αντιστοιχίες.

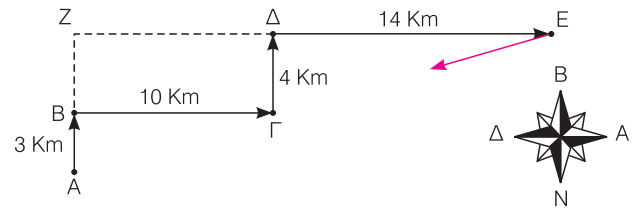


Στήλη A		Στήλη B	
Διάκεντρος		Μήκος	
1.	KΛ	i.	R
2.	ΛM	ii.	2R
3.	OM	iii.	R + ρ
		iv.	2R - ρ

- β. i. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $MK\Lambda$ είναι ισοσκελές και ότι το τμήμα MO είναι το ύψος προς τη βάση του.
 ii. Να βρείτε την ακτίνα ρ του κύκλου κέντρου M ως συνάρτηση του R , όπου R η ακτίνα των κύκλων κέντρων K και Λ .

21 Θέμα 4 - 14533

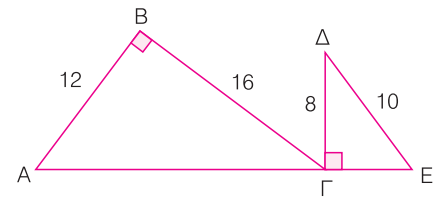
Δύο κινητά βρίσκονται στο σημείο Α και σκοπεύουν να μεταβούν στο σημείο Ε, που φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Το ένα κινητό ξεκινάει από ένα σημείο Α και κινείται βόρεια 3 χιλιόμετρα, κατόπιν συνεχίζει 10 χιλιόμετρα ανατολικά, στη συνέχεια 4 χιλιόμετρα βόρεια και τέλος 14 χιλιόμετρα ανατολικά καταλήγοντας στο σημείο Ε. Το δεύτερο κινητό ξεκινάει από το σημείο Α κινείται βόρεια μέχρι το σημείο Ζ και συνεχίζει ανατολικά μέχρι το σημείο Ε. Όταν συναντιούνται στο σημείο Ε επιστρέφουν μαζί στο σημείο Α κινούμενα ευθύγραμμα.



- α. i. Πόσα χιλιόμετρα διάνυσε το κάθε κινητό από το σημείο Α στο σημείο Ε με τον τρόπο που κινήθηκε;
 ii. Να βρείτε την απόσταση ΑΕ που διάνυσαν τα δύο κινητά κατά την επιστροφή από το σημείο Ε στο σημείο Α κινούμενα ευθύγραμμα.
- β. Επιστρέφοντας τα δύο κινητά από το σημείο Ε στο σημείο Α, θα περάσουν από το σημείο Γ; Να αιτιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας.

22 Θέμα 4 - 16133

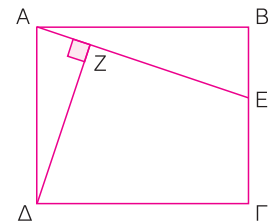
Στο διπλανό σχήμα, τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΕ έχουν μήκη αντίστοιχα 12, 16, 8 και 10, οι γωνίες ΑΒΓ και ΔΓΕ είναι ορθές και τα σημεία Α, Γ και Ε ανήκουν στην ίδια ευθεία.



- α. Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΑΕ.
- β. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΓΔ είναι όμοια.
- γ. Έστω ότι το σημείο τομής των ευθειών ΑΒ και ΕΔ είναι το Ζ και ΖΗ είναι το ύψος του τριγώνου ΖΑΕ από την κορυφή του Ζ. Να αποδείξετε ότι:
 - i. $EH = 13$
 - ii. $ZH = \frac{52}{3}$

23 Θέμα 4 - 17348

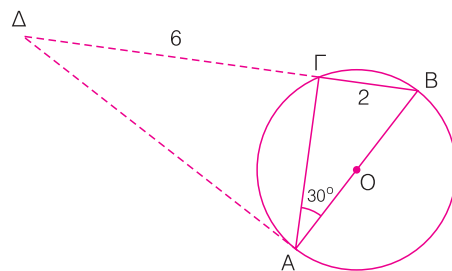
Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο με $AB = 6$ και το Ε σημείο της πλευράς ΒΓ, ώστε $BE = 2$. Έστω ΔΖ το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα από το σημείο Δ προς την ΑΕ.



- α. Να αποδείξετε ότι $AE = 2\sqrt{10}$.
- β. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΔΖΑ είναι όμοια και να γράψετε την αναλογία που προκύπτει από τους λόγους των ομολόγων πλευρών τους.
- γ. Αν $\Delta Z = ZE$, να υπολογίσετε το μήκος του ΑΔ.

24 Θέμα 4 - 21149

Σε κύκλο κέντρου O και ακτίνας R θεωρούμε διάμετρο AB και σημείο Γ του κύκλου τέτοιο ώστε $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = 30^\circ$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν $B\Gamma = 2$, τότε:

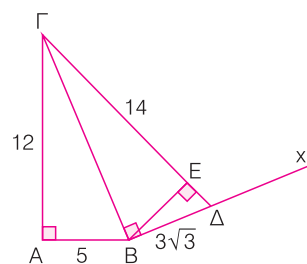


- α.** Να υπολογίσετε:
- Την ακτίνα R .
 - Το μήκος της πλευράς AG .
- β.** Θεωρούμε σημείο Δ στην προέκταση της $B\Gamma$ τέτοιο ώστε $\Gamma\Delta = 6$. Να εξετάσετε αν το τμήμα ΔA εφάπτεται του κύκλου στο σημείο A . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

5. Γενίκευση του Πυθαγορείου θεωρήματος**25 Θέμα 2 - 21067**

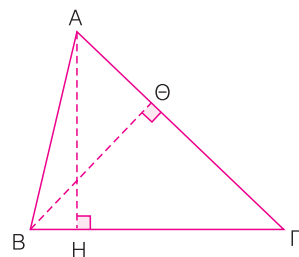
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$, $AG = 12$ και $AB = 5$.

- α.** Να αποδείξετε ότι $B\Gamma = 13$.
- β.** Φέρουμε ημιευθεία Bx κάθετη στη $B\Gamma$ στο σημείο B και παίρνουμε σε αυτή σημείο Δ , τέτοιο ώστε $\Delta\Gamma = 14$, όπως φαίνεται στο σχήμα.
- Να αποδείξετε ότι $B\Delta = 3\sqrt{3}$.
 - Να υπολογίσετε την προβολή της $B\Delta$ στην $\Delta\Gamma$.

**26 Θέμα 2 - 16804**

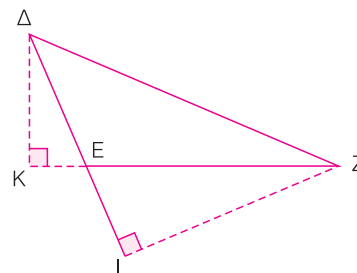
Στο διπλανό τρίγωνο $AB\Gamma$ φέρουμε τα ύψη του AH και $B\Theta$.

- α.** Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:
- Η προβολή της πλευράς $B\Gamma$ στην πλευρά AG είναι το τμήμα
 - Η προβολή της πλευράς AB στην πλευρά $B\Gamma$ είναι το τμήμα
 - Το τμήμα $H\Gamma$ είναι η προβολή της πλευράς στην πλευρά
 - Το τμήμα $A\Theta$ είναι η προβολή της πλευράς στην πλευρά
 - $AG^2 = AB^2 + \dots - 2B\Gamma \cdot \dots$
 - $B\Gamma^2 = \dots + AG^2 - 2 \cdot \dots \cdot A\Theta$
- β.** Αν $AB = 4$, $B\Gamma = 5$ και $AG = 6$, να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος $A\Theta$.

**27 Θέμα 2 - 17354**

Στο διπλανό τρίγωνο ΔEZ φέρουμε τα ύψη του ΔK και ZI .

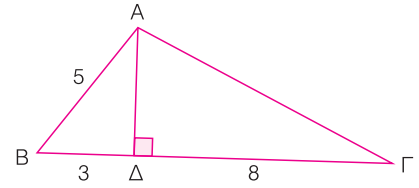
- α.** Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:
- Η προβολή της πλευράς ΔE στην πλευρά EZ είναι το τμήμα
 - Η προβολή της πλευράς ΔZ στην πλευρά EZ είναι το τμήμα
 - Το τμήμα ΔI είναι η προβολή της πλευράς στην πλευρά
 - Το τμήμα EI είναι η προβολή της πλευράς στην πλευρά
 - $\Delta Z^2 = \Delta E^2 + \dots + 2EZ \cdot \dots$
 - $EZ^2 = \dots + \Delta Z^2 - 2 \cdot \dots \cdot \Delta I$
- β.** Αν $\Delta E = 2$, $EZ = 4$ και $\Delta Z = 5$, να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΔI .



28 Θέμα 2 - 21302

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=5$ και $A\Delta$ το ύψος του από την κορυφή A .
Αν $B\Delta=3$ και $\Gamma\Delta=8$ να αποδείξετε ότι:

- $A\Delta=4$.
- $A\Gamma=\sqrt{80}$.
- το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι αμβλυγώνιο.

**29 Θέμα 2 - 14549**

Τα μήκη των πλευρών α, β, γ του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι: $\alpha=7$, $\beta=3$ και $\gamma=5$.

- Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι αμβλυγώνιο.
- Να σχεδιάσετε την προβολή της πλευράς AB στην πλευρά $A\Gamma$ και να υπολογίσετε το μήκος της.

30 Θέμα 2 - 16080

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=5$, $B\Gamma=\sqrt{41}$ και $A\Gamma=8$.

- Να σχεδιάσετε την προβολή $A\Delta$, της AB στην $A\Gamma$ και να υπολογίσετε το μήκος της.
- Αν $A\Delta=3$, να υπολογίσετε το μήκος του ύψους $B\Delta$.

31 Θέμα 2 - 16101

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $AB=8$, $A\Gamma=6$ και $B\Gamma=11$.

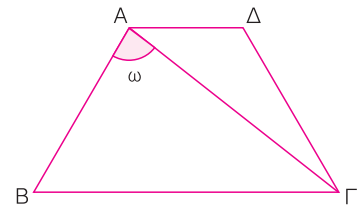
- Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι αμβλυγώνιο.
- Να σχεδιάσετε την προβολή της πλευράς $A\Gamma$ πάνω στην AB και να υπολογίσετε το μήκος της.

32 Θέμα 2 - 17343

Στο τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ του διπλανού σχήματος είναι $A\Delta=3$, $AB=\Gamma\Delta=5$, $B\Gamma=8$ και $\hat{A}=120^\circ$.

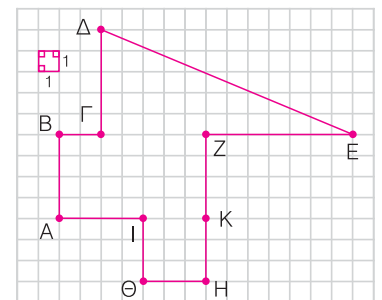
- Να αποδείξετε ότι $A\Gamma=7$.
- Να αποδείξετε ότι $\text{συν}\omega = \frac{1}{7}$, όπου ω είναι η γωνία $B\hat{A}\Gamma$.

Δίνεται ότι $\text{συν}120^\circ = -\frac{1}{2}$.

**8. Εμβαδόν βασικών σχημάτων****33 Θέμα 2 - 18558**

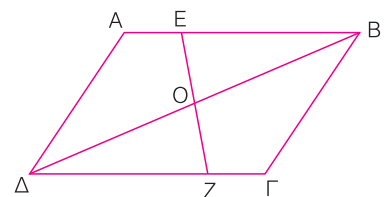
Στο διπλανό σχήμα:

- Να βρείτε το μήκος της πλευράς ΔE .
- Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την τεθλασμένη γραμμή $AB\Gamma\Delta EZH\Theta IA$.

**34 Θέμα 2 - 16102**

Θεωρούμε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Από το κέντρο O φέρουμε ευθεία η οποία τέμνει τις πλευρές AB και $\Gamma\Delta$ στα σημεία E και Z όπως φαίνεται στο σχήμα. Να αποδείξετε ότι:

- $(\Delta OZ) = (BOE)$
- $(\Delta OEA) = (B\Gamma ZO)$



35 Θέμα 2 - 21101

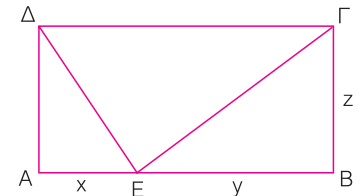
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρές $B\Gamma = \sqrt{3}$, $AB = \sqrt{2}$, $A\Gamma = 1$.

- α. Να αποδείξετε ότι $\hat{A} = 90^\circ$.
- β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.
- γ. Να υπολογίσετε το ύψος AD .

36 Θέμα 2 - 18550

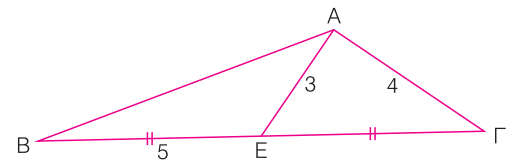
Η περίμετρος του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ του σχήματος είναι 36 και το E είναι σημείο στην πλευρά AB . Τα μήκη των τμημάτων x , y , z είναι ανάλογα προς τους αριθμούς 2, 4, 3 αντίστοιχα.

- α. Να αποδείξετε ότι $x = 4$, $y = 8$ και $z = 6$.
- β. i. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $ΓΕΔ$.
- ii. Να βρεθεί ο λόγος του εμβαδού του τριγώνου $ΓΔΕ$ προς το εμβαδόν του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$.

**37 Θέμα 2 - 18559**

Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ του διπλανού σχήματος η διάμεσος που αντιστοιχεί στην πλευρά $B\Gamma$ έχει μήκος 3 και η πλευρά $A\Gamma$ είναι ίση με 4. Αν $BE = 5$, τότε:

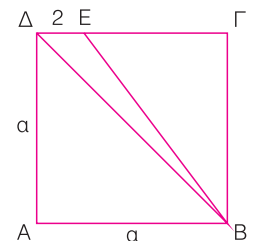
- α. Να αποδείξετε ότι η διάμεσος AE είναι κάθετη στην πλευρά $A\Gamma$.
- β. i. Να δικαιολογήσετε γιατί $(ABE) = (A\Gamma E)$.
- ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

**38 Θέμα 2 - 16817**

Στο τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς a , θεωρούμε σημείο E της πλευράς του $\Delta\Gamma$ έτσι ώστε

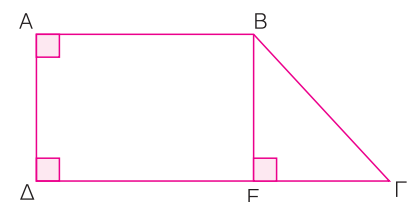
$\Delta E = 2$. Αν γνωρίζουμε ότι: $(BE\Delta) = \frac{(AB\Gamma\Delta)}{8}$ τότε:

- α. Να αποδείξετε ότι η πλευρά του τετραγώνου a είναι ίση με 8.
- β. Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος BE .

**39 Θέμα 2 - 21823**

Δίνεται το τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ του διπλανού σχήματος, με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ και $A\Delta = 4$, $AB = 5$, $\Delta\Gamma = 8$. Από την κορυφή B του τραpezίου, φέρνουμε την BE κάθετη στην πλευρά $\Delta\Gamma$.

- α. Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος $E\Gamma$.
- β. Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς $B\Gamma$ του τραpezίου.
- γ. Να υπολογίσετε το λόγο: $\frac{(B\Delta\Gamma)}{(AB\Gamma\Delta)}$.



40 Θέμα 2 - 18560

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $B\Gamma=13$ και $\Gamma\Delta=14$. Αν ΓE είναι το κάθετο τμήμα από το σημείο Γ στην πλευρά AB και το τμήμα AE έχει μήκος 9, τότε:

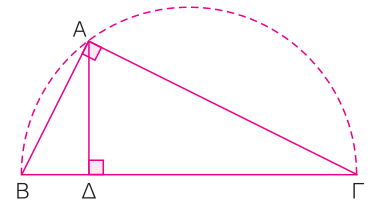
- α.** Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΓE .
- β.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν
 - i.** του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$.
 - ii.** του τραπεζίου $AE\Gamma\Delta$.

41 Θέμα 4 - 16135

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με υποτείνουσα $B\Gamma=10$ και έστω ότι Δ είναι η προβολή της κορυφής A στην $B\Gamma$.

- α.** Αν $\Delta B=2$ να υπολογίσετε:
 - i.** το ύψος $A\Delta$ του τριγώνου $AB\Gamma$,
 - ii.** το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.
- β.** Υποθέστε ότι το σημείο A κινείται πάνω στο ημικύκλιο με διάμετρο την $B\Gamma$.
 - i.** Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι $(AB\Gamma)=5A\Delta$.
 - ii.** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
«Για όλες τις θέσεις του A πάνω στο ημικύκλιο με διάμετρο την $B\Gamma$, το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ δεν υπερβαίνει το 25».

Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**42 Θέμα 4 - 21124**

- α.** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρές $\alpha=40$, $\beta=25$, $\gamma=25$ και αντίστοιχα ύψη u_α , u_β , u_γ . Να αποδείξετε ότι:
 - i.** Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι αμβλυγώνιο.
 - ii.** Το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι $E=300$ και τα ύψη του είναι $u_\alpha=15$ και $u_\beta=u_\gamma=24$.
 - iii.** Το τρίγωνο που κατασκευάζεται με πλευρές ίσες με τα ύψη u_α , u_β , u_γ είναι οξυγώνιο.
- β.** Θεωρήστε τον ισχυρισμό: «Το τρίγωνο που κατασκευάζεται με πλευρές ίσες με τα ύψη οποιουδήποτε ισοσκελούς και αμβλυγωνίου τριγώνου, είναι ισοσκελές και οξυγώνιο.» Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

43 Θέμα 4 - 16807

Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ με διαστάσεις $AB=24$, $B\Gamma=12$ και σημείο E στην ευθεία AB .

- α.** Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν του τριγώνου $\Gamma E\Delta$ όταν:
 - i.** Το σημείο E είναι το μέσο της πλευράς AB .
 - ii.** Το σημείο E ταυτίζεται με την κορυφή A του ορθογωνίου.
- β.** Αφήνουμε το σημείο E να κινηθεί στην προέκταση του τμήματος AB προς το B , απομακρυνόμενο από το σημείο B .
 - i.** Να εξετάσετε αν η περίμετρος του τριγώνου $\Gamma E\Delta$ αυξάνεται ή μειώνεται.
 - ii.** Για το εμβαδόν του τριγώνου $\Gamma E\Delta$ συμβαίνει η ίδια μεταβολή με αυτή που απαντήσατε για την περίμετρο του τριγώνου $\Gamma E\Delta$ στο ερώτημα **β.i.**; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

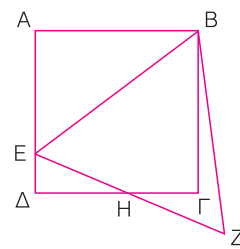
44 Θέμα 4 - 18562

Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς a .

- α.** Να αποδείξετε ότι το μήκος της διαγωνίου $B\Delta$ ισούται με $a\sqrt{2}$ και να βρείτε το εμβαδόν του.
- β. i.** Να σχεδιάσετε το τετράγωνο $B\Delta ZH$ έτσι ώστε το σημείο A να είναι εσωτερικό σημείο του και να αποδείξετε ότι το σημείο A είναι το κέντρο του τετραγώνου $B\Delta ZH$.
- ii.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του $B\Delta ZH$ και να το συγκρίνετε με το εμβαδόν του αρχικού τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$.
- γ.** Επαναλαμβάνουμε το σχεδιασμό όπως περιγράφηκε παραπάνω και σχηματίζουμε νέο τετράγωνο, με πλευρά κάθε φορά, τη διαγώνιο του προηγούμενου τετραγώνου. Δηλαδή με πλευρά τη διαγώνιο ΔH του τετραγώνου $B\Delta ZH$ σχεδιάζουμε νέο τετράγωνο, το $\Delta H\Theta K$. Με πλευρά τη διαγώνιο HK του $\Delta H\Theta K$ σχεδιάζουμε νέο τετράγωνο κ.ο.κ. Αν θέλουμε να σχεδιάσουμε τετράγωνο του οποίου το εμβαδόν του θα είναι 16 φορές το εμβαδόν του αρχικού τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$, πόσες φορές ακόμη πρέπει να επαναλάβουμε το σχεδιασμό αυτό; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

45 Θέμα 4 - 17349

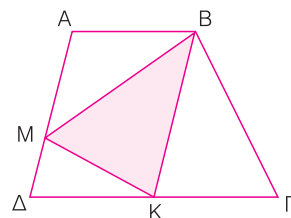
Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς 3 και σημείο E της πλευράς $A\Delta$, ώστε $AE = 4 - \sqrt{3}$. Στο ημιεπίπεδο που ορίζουν η ευθεία BE και το σημείο Γ κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο BEZ . Οι $\Gamma\Delta$ και EZ τέμνονται στο σημείο H και $\Delta H = \sqrt{3}$.



- α.** Να αποδείξετε ότι $BE = 2\sqrt{7 - 2\sqrt{3}}$.
- β.** Να αποδείξετε το H είναι το μέσο της EZ .
- γ.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που βρίσκεται στο εσωτερικό του ισόπλευρου τριγώνου BEZ και εξωτερικά του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$.

46 Θέμα 4 - 18173

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $\Gamma\Delta = 2AB$. Δίνεται επίσης ότι το σημείο K είναι μέσο της $\Gamma\Delta$ και M τυχαίο σημείο στην $A\Delta$.



- α.** Να αποδείξετε ότι:
 - i.** $(BK\Gamma) = \frac{1}{2}(ABK\Delta)$
 - ii.** $(BMK) = (BK\Gamma)$
- β.** Δίνεται η πρόταση: «Αν το σημείο M κινείται πάνω στο εσωτερικό της $A\Delta$, τότε ο λόγος των εμβαδών $(AB\Gamma\Delta)$ και (MBK) παραμένει σταθερός και ίσος με 3». Να διερευνήσετε την ορθότητα της πρότασης αιτιολογώντας την απάντησή σας.

47 Θέμα 4 - 18564

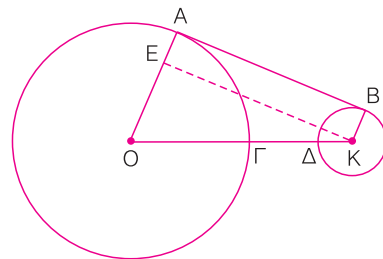
Ο παππούς του Πέτρου έχει έναν κήπο σχήματος ορθογωνίου και θέλει να φυτέψει στον μισό διάφορα λουλούδια και στο υπόλοιπο γκαζόν. Λέει λοιπόν στον Πέτρο ότι έχει σκεφτεί κάποιους απλούς τρόπους να τον χωρίσει σε δύο κομμάτια που να έχουν το ίδιο εμβαδόν.

- α.** Να σχεδιάσετε δύο (2) τρόπους με τους οποίους χωρίζεται ο κήπος σε δύο κομμάτια ίδιου εμβαδού και να αιτιολογήσετε τις επιλογές σας.
- β.** Ο Πέτρος προτείνει στον παππού του έναν δικό του τρόπο για το χωρισμό. Για να ορίσει το κομμάτι που θα φυτευτεί με λουλούδια χρησιμοποιεί τρεις πέτρες. Τοποθετεί την πρώτη πέτρα σε ένα εσωτερικό σημείο της μιας πλευράς του κήπου και τις άλλες δύο στις απέναντι κορυφές του ορθογωνίου. Δείχνει στον παππού του το τρίγωνο που σχηματίζεται εξηγώντας του πως είναι το μισό του κήπου. Προτείνει δε στον παππού του, το τριγωνικό χωρίο που σχηματίζεται, να το μετακινήσει εκείνος σε όποια θέση νομίζει καλύτερα μετακινώντας μόνο την πρώτη πέτρα, χωρίς παρ' όλα αυτά να αλλάξει το εμβαδόν του.

- i. Να σχεδιάσετε τον τρόπο που προτείνει ο Πέτρος και να αποδείξετε ότι, το εμβαδόν του σχηματιζόμενου τριγωνικού χωρίου είναι το μισό του κήπου.
- ii. Τι εννοεί ο Πέτρος λέγοντας ότι «το τριγωνικό χωρίο μπορεί να μετακινηθεί όταν αλλάζει η θέση της πρώτης πέτρας σε εσωτερικό σημείο της πλευράς του κήπου και παρ' όλα αυτά δεν αλλάζει το εμβαδόν του»; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

48 Θέμα 4 - 18565

Δίνονται δύο κύκλοι με κέντρα O και K . Ο κύκλος με κέντρο O έχει ακτίνα $R = 7$ ενώ ο κύκλος με κέντρο K έχει ακτίνα $\rho = 2$. Το τμήμα AB είναι το κοινό εξωτερικό εφαπτόμενο τμήμα των δύο κύκλων και το τμήμα KE είναι παράλληλο στο τμήμα AB με E σημείο του τμήματος OA . Η διάκεντρος OK τέμνει τον κύκλο (O, R) στο σημείο Γ και τον κύκλο (K, ρ) στο σημείο Δ .



- α. Αν η θέση των δύο κύκλων είναι τέτοια ώστε, η απόσταση των σημείων Γ και Δ είναι $\Gamma\Delta = 4$, τότε:
 - i. Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος AB .
 - ii. Να βρείτε το εμβαδόν του τετραπλεύρου $ABKO$.
- β. Ποια πρέπει να είναι η σχετική θέση των 2 κύκλων, ώστε το εμβαδόν του $ABKE$ να ισούται με $4\sqrt{14}$ τ.μ.;

49 Θέμα 4 - 18566

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$.

Με πλευρά την υποτείνουσα $B\Gamma$ και έξω από το τρίγωνο, γράφουμε το τετράγωνο $B\Gamma\Delta E$. Προεκτείνουμε την πλευρά BA προς το A και παίρνουμε σημείο Z τέτοιο ώστε $BZ = B\Gamma$. Από τα σημεία Γ και Z φέρουμε παράλληλες προς τα τμήματα BZ και $B\Gamma$ αντίστοιχα, που τέμνονται στο σημείο H .

- α. Να δικαιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο $B\Gamma HZ$ είναι ρόμβος και να βρείτε τις περιμέτρους του ρόμβου και του τετραγώνου.
- β. Δίνονται οι ισχυρισμοί:

Ισχυρισμός 1: «Ο ρόμβος και το τετράγωνο αφού έχουν ίσες περιμέτρους, θα έχουν και ίσα εμβαδά».

Ισχυρισμός 2: «Ο ρόμβος έχει μικρότερο εμβαδόν από το τετράγωνο και μάλιστα, όπως έχουν κατασκευαστεί τα δύο τετράπλευρα δεν γίνεται να είναι ποτέ ισεμβαδικά».

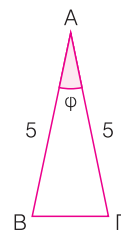
Εξετάστε ποιος από τους 2 παραπάνω ισχυρισμούς είναι σωστός και να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας.

9. Άλλοι τύποι για εμβαδόν τριγώνου

50 Θέμα 2 - 21299

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma = 5$ και η γωνία της κορυφής $\hat{\phi}$ έχει $\eta\mu\phi = \frac{2}{5}$.

- α. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.
- β. Να σχεδιάσετε το ύψος BH του τριγώνου $AB\Gamma$ και να υπολογίσετε το μήκος του.



51 Θέμα 2 - 15979

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma = 5$ και $\hat{A} = 120^\circ$. Να αποδείξετε ότι:

- α. $B\Gamma = 5\sqrt{3}$.
- β. $(AB\Gamma) = \frac{25\sqrt{3}}{4}$.

52 Θέμα 2 - 17346

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=6$, $B\Gamma=4$ και $\hat{B}=60^\circ$.

- Να αποδείξετε ότι $A\Gamma=2\sqrt{7}$.
- Να βρείτε το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του.
- Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

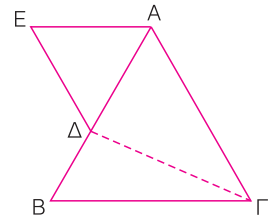
Δίνεται ότι $\eta\mu 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu 60^\circ = \frac{1}{2}$.

53 Θέμα 2 - 17347

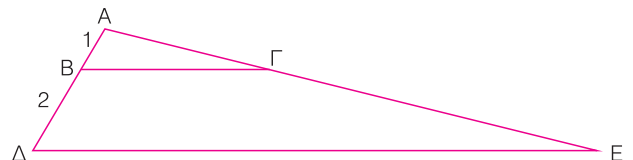
Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο πλευράς 10 και το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισόπλευρο πλευράς 6.

- Να αποδείξετε ότι $(A\Gamma\Delta)=15\sqrt{3}$.

- Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου $A\Gamma\Delta E$. Δίνεται ότι $\eta\mu 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

**10. Λόγος εμβαδόν όμοιων τριγώνων πολυγώνων****54 Θέμα 2 - 21304**

Δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=1$. Στις προεκτάσεις των πλευρών AB και $A\Gamma$ παίρνουμε σημεία Δ και E , αντίστοιχα, ώστε η ΔE να είναι παράλληλη στη $B\Gamma$ και $B\Delta=2$.



- Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\frac{1}{3}$.
- Αν η περίμετρος του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι ίση με 8,5, να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου $A\Delta E$.
- Αν το εμβαδόν του τριγώνου $A\Delta E$ είναι 15, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

55 Θέμα 2 - 21636

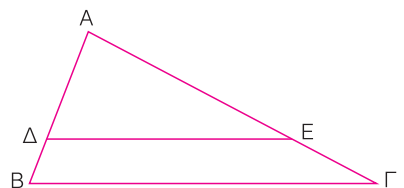
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, με μήκη πλευρών $AB=6$, $A\Gamma=8$ και $B\Gamma=10$.

- Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.
- Αν $A\Delta$ είναι ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$ τότε:
 - Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma\Delta$ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\lambda = \frac{3}{4}$.
 - Να υπολογίσετε το λόγο $\frac{(AB\Delta)}{(A\Gamma\Delta)}$.

56 Θέμα 2 - 21120

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=\sqrt{2}$. Από σημείο Δ της πλευράς AB ώστε $A\Delta=1$ φέρνουμε παράλληλη στη $B\Gamma$ η οποία τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο E .

- Να αποδείξετε ότι:
 - τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $AB\Gamma$ είναι όμοια και να γράψετε τον λόγο ομοιότητας,
 - το εμβαδόν του τριγώνου $A\Delta E$ είναι το μισό του εμβαδού του τριγώνου $AB\Gamma$.
- Αν το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι 2, να βρείτε τα εμβαδά του τριγώνου $A\Delta E$ και του τραπέζιου $B\Gamma E\Delta$.



57 Θέμα 2 - 16127

Ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει πλευρά $B\Gamma = 9$ και αντίστοιχο ύψος $AD = 8$.

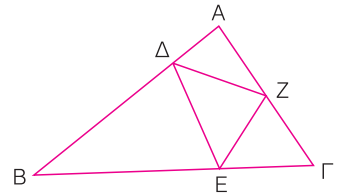
- α.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.
- β.** Ένα άλλο τρίγωνο $A'B'T'$ είναι όμοιο με το τρίγωνο $AB\Gamma$ και η ομόλογη πλευρά της είναι η $B'T' = 6$. Να υπολογίσετε:
- τον λόγο ομοιότητας των τριγώνων $AB\Gamma$ και $A'B'T'$,
 - το εμβαδόν του τριγώνου $A'B'T'$.

58 Θέμα 2 - 15978

Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ του διπλανού σχήματος, τα Δ , E , Z , είναι σημεία των πλευρών AB , $B\Gamma$, $A\Gamma$ αντίστοιχα, ώστε: $A\Delta = \frac{1}{4}AB$, $BE = \frac{2}{3}B\Gamma$ και $\Gamma Z = \frac{1}{2}A\Gamma$. Να

αποδείξετε ότι:

- α.** $(A\Delta Z) = \frac{1}{8}(AB\Gamma)$, $(BE\Delta) = \frac{1}{2}(AB\Gamma)$, $(\Gamma EZ) = \frac{1}{6}(AB\Gamma)$
- β.** $(\Delta EZ) = \frac{5}{24}(AB\Gamma)$.

**59 Θέμα 2 - 21189**

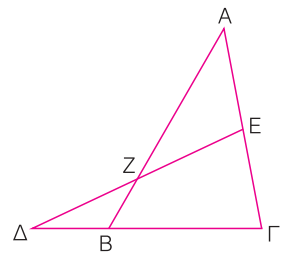
Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και M , N τα μέσα των πλευρών του AB και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α.** $(AB\Gamma) = (A\Gamma\Delta) = \frac{1}{2}(AB\Gamma\Delta)$
- β.** $\frac{(BMN)}{(AB\Gamma)} = \frac{1}{4}$
- γ.** $(BMN) = \frac{1}{8}(AB\Gamma\Delta)$

60 Θέμα 2 - 20667

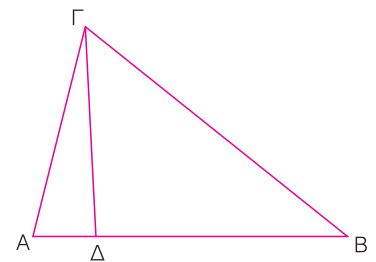
Στο διπλανό σχήμα δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $B\Gamma = 8$. Στην προέκταση της ΓB προς το B παίρνουμε σημείο Δ , ώστε $\Delta B = 4$ και E είναι το μέσο της $A\Gamma$.

- α.** Να αποδείξετε ότι $(AB\Gamma) = 4A\Gamma \cdot \eta\mu\Gamma$.
- β.** Να αποδείξετε ότι $(\Gamma\Delta E) = 3A\Gamma \cdot \eta\mu\Gamma$.
- γ.** Να υπολογίσετε τον λόγο των εμβαδών των τριγώνων $AB\Gamma$ και $\Gamma\Delta E$ και να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$, αν το εμβαδόν του τριγώνου $\Gamma\Delta E$ είναι 12 τ.μ.

**61 Θέμα 2 - 16756**

Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ και τυχαίο σημείο Δ της πλευράς AB .

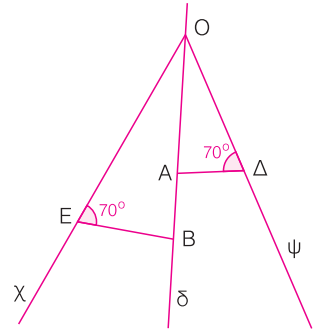
- α.** Να αποδείξετε ότι: $\frac{(AB\Gamma)}{(\Delta B\Gamma)} = \frac{AB}{\Delta B}$
- β.** Αν $(AB\Gamma) = 25$ και $AB = 5A\Delta$, τότε να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $\Delta B\Gamma$.



62 Θέμα 2 - 16770

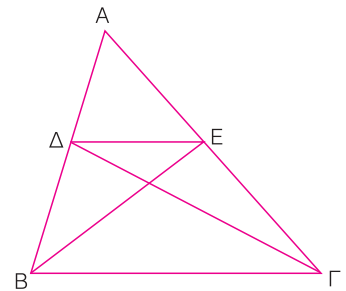
Δίνεται γωνία $\chi\hat{O}\psi$ και η διχοτόμος της Οδ. Πάνω στην Οδ παίρνουμε τυχαία σημεία Α και Β. Θεωρούμε σημείο Ε στην πλευρά Οχ τέτοιο ώστε $\widehat{OEB} = 70^\circ$ και σημείο Δ στην Οψ τέτοιο ώστε $\widehat{ODA} = 70^\circ$.

- α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΟΕΒ και ΟΔΑ είναι όμοια.
- β. Αν $\frac{OA}{OB} = \frac{2}{3}$ να υπολογίσετε τους λόγους των ανάλογων πλευρών των τριγώνων.
- γ. Αν το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΔ είναι 28 τ.μ. να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΟΕΒ.

**63 Θέμα 2 - 16806**

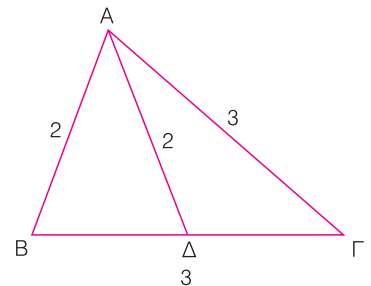
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και από τυχαίο σημείο Δ της πλευράς ΑΒ φέρουμε παράλληλη στην πλευρά ΒΓ που τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ε.

- α. Να δικαιολογήσετε γιατί $\frac{(A\Delta E)}{(\Delta EB)} = \frac{A\Delta}{\Delta B}$ και $\frac{(A\Delta E)}{(\Delta E\Gamma)} = \frac{AE}{E\Gamma}$.
- β. Να αποδείξετε ότι $(\Delta EB) = (\Delta E\Gamma)$.

**64 Θέμα 2 - 18101**

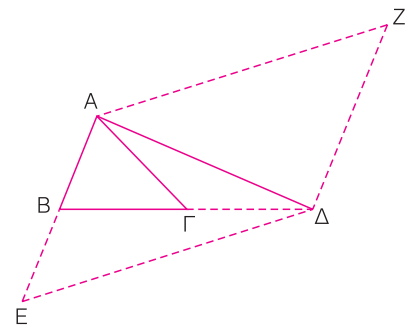
Στο σχήμα, τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΔ είναι ισοσκελή με $ΑΓ = ΒΓ = 3$ και $ΑΒ = ΑΔ = 2$.

- α. Να αποδείξετε ότι οι γωνίες \hat{B} και $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma}$ είναι ίσες.
- β. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΔΑ είναι όμοια.
- γ. Να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{(ΑΒΓ)}{(ΒΔΑ)}$ των εμβαδών των δύο τριγώνων.

**65 Θέμα 2 - 18561**

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΒΓ κατά τμήμα $\Gamma\Delta = ΒΓ$ και την πλευρά ΑΒ κατά τμήμα $ΒΕ = ΑΒ$.

- α. Αν $(ΑΒΓ) = 25\text{ m}^2$, να αποδείξετε ότι $(ΒΔΕ) = 50\text{ m}^2$.
- β. Από την κορυφή Α φέρουμε ευθεία παράλληλη στην ΕΔ και από την κορυφή Δ ευθεία παράλληλη στην ΕΑ που τέμνονται στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΖΔ είναι 4-πλάσιο του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ.

**66 Θέμα 4 - 21194**

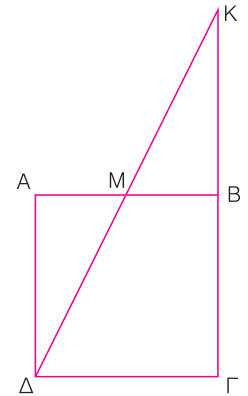
Στο τρίγωνο ΑΒΓ, η ΑΜ είναι διάμεσός του και το σημείο Ε είναι το μέσο της ΑΜ. Από το Ε φέρουμε παράλληλες στις ΑΒ και ΑΓ, οι οποίες τέμνουν τη ΒΓ στα σημεία Δ και Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α. $(ΑΜΒ) = (ΑΜΓ)$
- β. $(ΜΕΔ) = \frac{1}{8} \cdot (ΑΒΓ)$
- γ. $(ΑΒΔΕ) = (ΑΓΖΕ)$

67 Θέμα 4 - 16732

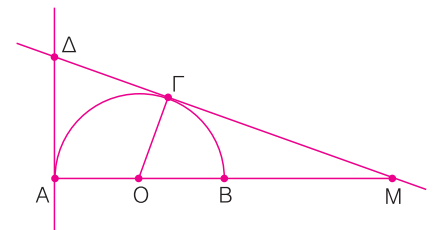
Έστω τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ και M το μέσο της AB . Οι ευθείες ΔM και ΓB τέμνονται στο K . Να αποδείξετε ότι:

- α. Τα τρίγωνα MKB και $\Delta K\Gamma$ είναι όμοια.
- β. $(MKB) = \frac{1}{4}(\Delta K\Gamma)$
- γ. $(MB\Gamma\Delta) = \frac{3}{4}(AB\Gamma\Delta)$
- δ. Αν $(MB\Gamma\Delta) = 75\text{m}^2$ να υπολογίσετε την πλευρά του τετραγώνου

**68 Θέμα 4 - 18370**

Δίνεται ημικύκλιο κέντρου O και διαμέτρου $AB = 2\rho$. Στην προέκταση του AB προς το B , θεωρούμε σημείο M . Από το M φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα $M\Gamma$ στο ημικύκλιο. Αν η εφαπτόμενη του ημικυκλίου στο σημείο A τέμνει την προέκταση της $M\Gamma$ στο Δ τότε:

- α. Αν $BM = 2\rho$ να αποδείξετε ότι $M\Gamma = 2\sqrt{2}\rho$.
- β. i. Να αποδείξετε ότι $\frac{MO}{M\Gamma} = \frac{MA}{MA}$.
- ii. Αν για το M ισχύει ότι $BM = \lambda \cdot \rho$, όπου λ θετικός αριθμός, να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του λ , τέτοια ώστε $(A\Delta M) = 9(MO\Gamma)$.

**69 Θέμα 4 - 18553**

Δίνεται τετράγωνο με πλευρά a και σημείο Σ στην προέκταση της πλευράς AB προς το B τέτοιο ώστε $B\Sigma = AB$.

- α. Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του a :
 - i. Το εμβαδόν του τριγώνου $\Sigma\Delta\Gamma$.
 - ii. Το μήκος της πλευράς $\Sigma\Gamma$ του τριγώνου $\Sigma\Delta\Gamma$.
- β. Θεωρούμε τυχαίο σημείο Σ' στην προέκταση της πλευράς AB προς το B τέτοιο ώστε $B\Sigma' > B\Sigma$. Να συγκρίνετε αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας:
 - i. Το εμβαδό του τριγώνου $\Sigma'\Delta\Gamma$ με το εμβαδόν του τριγώνου $\Sigma\Delta\Gamma$.
 - ii. Το μήκος της πλευράς $\Sigma'\Gamma$ με το μήκος της πλευράς $\Sigma\Gamma$ των τριγώνων $\Sigma'\Delta\Gamma$ και $\Sigma\Delta\Gamma$ αντίστοιχα.
 - iii. Τις αποστάσεις του σημείου Δ από τις ευθείες $\Sigma\Gamma$ και $\Sigma'\Gamma$.

70 Θέμα 4 - 18557

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με βάσεις AB και $\Gamma\Delta$, ώστε $AB > \Gamma\Delta$. Από τις κορυφές Γ και Δ φέρουμε $\Gamma E \parallel A\Delta$ και $\Delta Z \parallel \Gamma B$, με E και Z σημεία στην πλευρά AB του τραπεζίου.

- α. Να συγκρίνετε τα εμβαδά των τετραπλεύρων $A\Delta\Gamma E$ και $B\Gamma\Delta Z$.
- β. Να εκφράσετε τις περιμέτρους των τετραπλεύρων $A\Delta\Gamma E$ και $B\Gamma\Delta Z$ ως συνάρτηση των πλευρών του τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$.
- γ. Πώς θα πρέπει να κατασκευάσουμε το τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ώστε τα τετράπλευρα $A\Delta\Gamma E$ και $B\Gamma\Delta Z$ να έχουν ίσες περιμέτρους και ίσα εμβαδά;

71 Θέμα 4 - 16114

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημείο E στην $A\Gamma$ τέτοιο ώστε $GE = \frac{1}{4}GA$.

α. Αν Δ σημείο της AB τέτοιο ώστε $A\Delta = \frac{1}{3}AB$:

i. Να αποδείξετε ότι $(AB\Gamma) = 4(A\Delta E)$.

ii. Αν από τα E και Γ φέρουμε τις κάθετες EZ και ΓH προς την AB , να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{EZ}{\Gamma H}$.

β. Θεωρώντας ότι το E παραμένει ακίνητο, ενώ το Δ κινείται στο εσωτερικό της AB , να βρείτε σε ποιο σημείο πρέπει να βρεθεί το Δ ώστε $(AB\Gamma) = 2(A\Delta E)$.

72 Θέμα 4 - 16582

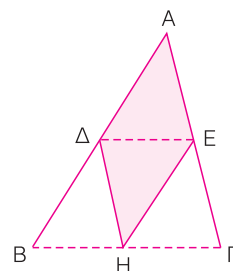
Στο διπλανό τρίγωνο $AB\Gamma$ τα Δ και E είναι σημεία των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

α. Έστω ότι $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{AE}{A\Gamma} = \frac{1}{2}$.

i. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $A\Delta E$ είναι ίσο με το $\frac{1}{4}$ του εμβαδού του τριγώνου $AB\Gamma$.

ii. Αν H είναι σημείο του ευθύγραμμου τμήματος $B\Gamma$ να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τετραπλεύρου $A\Delta H E$ είναι ίσο με το μισό του εμβαδού του τριγώνου $AB\Gamma$.

β. Αν γνωρίζετε ότι $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{AE}{A\Gamma} = \lambda$, τότε ποια είναι η σχέση των εμβαδών του τετραπλεύρου $A\Delta H E$ και του τριγώνου $AB\Gamma$;

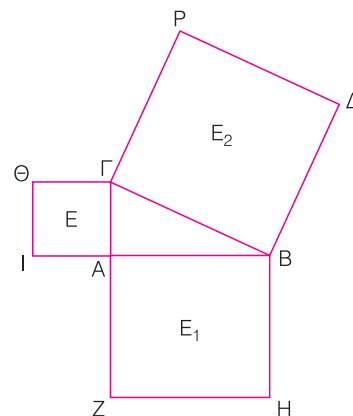
**73 Θέμα 4 - 17907**

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Με πλευρές τις AB , $A\Gamma$, $B\Gamma$ κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου $AB\Gamma$, τα τετράγωνα $ABHZ$, $A\Gamma\Theta I$, $B\Gamma P\Delta$. Έστω E , E_1 , E_2 τα εμβαδά των τετραγώνων $A\Gamma\Theta I$, $ABHZ$, $B\Gamma P\Delta$ αντίστοιχα. Αν ισχύουν οι ισότητες $E_1 = 4E$, $E_2 = 5E$ τότε:

α. να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία A

β. να αποδείξετε ότι τα εμβαδά των τριγώνων $AB\Gamma$, AIZ , $BH\Delta$, $\Gamma P\Theta$ είναι ίσα

γ. αν η $A\Gamma = 1$ να υπολογίσετε το εμβαδόν του πολυγώνου $ZH\Delta P\Theta I$.

**74 Θέμα 4 - 17956**

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημείο Δ στο εσωτερικό του τμήματος $B\Gamma$. Από το Δ φέρουμε παράλληλες στις πλευρές AB και $A\Gamma$. Η παράλληλη στην AB τέμνει την $A\Gamma$ στο Z και η παράλληλη στην $A\Gamma$ τέμνει την AB στο E . Θεωρούμε K και Λ τα μέσα των $B\Delta$ και $\Delta\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α. $(EK\Lambda) = \frac{(BE\Delta)}{2}$

β. $(EZ\Delta) = \frac{(AE\Delta Z)}{2}$

γ. Το εμβαδόν του $KEZ\Lambda$ είναι ανεξάρτητο της επιλογής του σημείου Δ .

75 Θέμα 4 - 18301

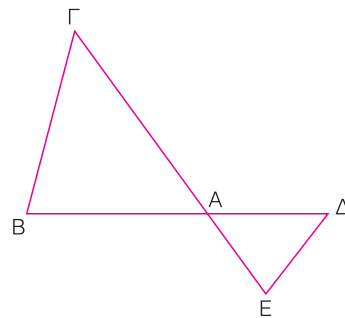
Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ προεκτείνουμε τις πλευρές BA και ΓA κατά τμήματα $A\Delta$ και AE αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α. Αν είναι $A\Delta = \frac{1}{2}AB$ και $AE = \frac{2}{5}A\Gamma$, να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)}$.

β. Αν είναι $A\Delta = \frac{1}{\lambda}AB$ και $AE = \frac{\lambda}{\mu}A\Gamma$, όπου λ, μ είναι θετικοί ακέραιοι,

να αποδείξετε ότι ο λόγος $\frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)}$ είναι ανεξάρτητος από την τιμή του λ .

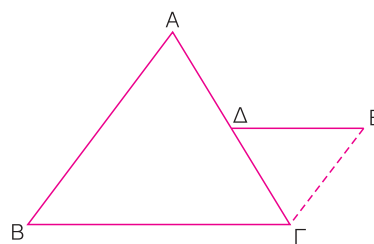
γ. Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι «υπάρχουν άπειρα ζεύγη τιμών των ακεραίων λ και μ για τα οποία είναι $(A\Delta E) = (AB\Gamma)$ ». Να εξετάσετε αν ο ισχυρισμός του είναι αληθής και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**76 Θέμα 4 - 18371**

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και Δ μέσο της $A\Gamma$. Από το Δ φέρουμε ΔE παράλληλη στην $B\Gamma$ και ίση με το μισό της AB όπως στο σχήμα.

α. i. Να αποδείξετε ότι: $\frac{(\Delta E\Gamma)}{(AB\Gamma)} = \frac{\Delta E}{2B\Gamma}$.

ii. Αν το $\Delta E\Gamma B$ είναι παραλληλόγραμμο, τότε να αποδείξετε ότι $(\Delta E\Gamma) = (AB\Delta)$.



β. Σε ένα τεστ που χρειάστηκε από τους μαθητές να βρεθεί ο λόγος $\frac{(\Delta E\Gamma)}{(AB\Gamma)}$ ένας μαθητής έγραψε: «Παρατηρώ

ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Delta E\Gamma$ έχουν $\hat{A} = \hat{\Gamma}$, ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΔE και $B\Gamma$ που τέμνονται από την $\Delta\Gamma$ και δύο πλευρές τους ανάλογες, αφού $\frac{\Delta\Gamma}{A\Gamma} = \frac{\Delta E}{AB} = \frac{1}{2}$. Επειδή έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία

προς μία και τις γωνίες τους $\hat{A}, \hat{\Gamma}$ ίσες, τα τρίγωνα θα είναι όμοια. Επομένως, ο λόγος των εμβαδών τους θα ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους. $\frac{(\Delta E\Gamma)}{(AB\Gamma)} = \left(\frac{\Delta E}{AB}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ ». Ο καθηγητής του του

είπε ότι έχει κάνει ένα σημαντικό λάθος. Μπορείτε να εντοπίσετε σε ποιο σημείο ο συλλογισμός του μαθητή είναι λανθασμένος;

11. Κανονικά πολύγωνα**77 Θέμα 2 - 20638**

Δύο κανονικά πολύγωνα έχουν πλήθος πλευρών n_1 και n_2 , κεντρικές γωνίες ω_1 και ω_2 και γωνίες φ_1 και φ_2 , αντίστοιχα. Αν ο λόγος του n_1 προς το n_2 είναι ίσος με $\frac{1}{2}$, τότε:

α. Να υπολογίσετε τον λόγο των αντίστοιχων κεντρικών γωνιών ω_1 και ω_2 αυτών των πολυγώνων.

β. Αν το πλήθος των πλευρών ενός από τα δύο κανονικά πολύγωνα είναι $n_1 = 5$, να υπολογίσετε τον λόγο των γωνιών των τους $\frac{\varphi_1}{\varphi_2}$.

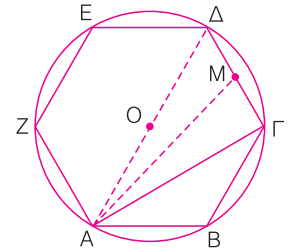
78 Θέμα 4 - 17600

Δίνεται κανονικό εξάγωνο $ABΓΔEZ$ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R) . Φέρουμε τα τμήματα $ΑΓ$, $ΑΔ$ και $ΑΜ$, όπου το σημείο $Μ$ είναι το μέσο του $ΓΔ$. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha. (ABΓΔEZ) = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$$

$$\beta. (AMΓ) = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\gamma. (AMΔEZ) = R^2\sqrt{3}$$

**79 Θέμα 4 - 16928**

Δίνεται κύκλος με μήκος 10.

α . Να αποδείξετε ότι η περίμετρος P_3 ενός ισοπλεύρου τριγώνου που είναι εγγεγραμμένο στον παραπάνω κύκλο είναι ίση με $\frac{15\sqrt{3}}{\pi}$.

β . Να υπολογίσετε την περίμετρο P_6 κανονικού εξαγώνου που είναι εγγεγραμμένο στον ίδιο κύκλο.

γ . Έστω ένα κανονικό δωδεκάγωνο με περίμετρο P_{12} και ένα κανονικό εικοσιτετράγωνο με περίμετρο P_{24} που είναι εγγεγραμμένα στον παραπάνω κύκλο. Να συγκρίνετε τους αριθμούς

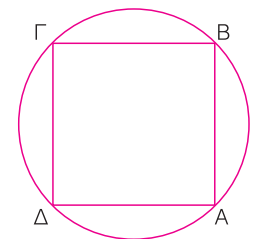
$$\frac{30}{\pi}, \frac{15\sqrt{3}}{\pi}, P_{12}, P_{24} \text{ και } 10$$

12. Μήκος – Εμβαδόν κύκλου**80 Θέμα 2 - 18097**

Τετράγωνο $ABΓΔ$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R , όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν το εμβαδόν του τετραγώνου είναι ίσο με 4, τότε:

α . Να υπολογίσετε την ακτίνα R του κύκλου.

β . Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ του τετραγώνου και του περιγεγραμμένου κύκλου του είναι ίσο με $2\pi - 4$.

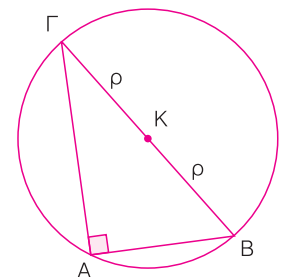
**81 Θέμα 2 - 21298**

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $ABΓ$, με \hat{A} ορθή γωνία και ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου, που έχει κέντρο το K και ακτίνα ρ . Επίσης δίνεται ότι το μήκος του κύκλου ισούται με 10π .

α . Να αποδείξετε ότι η ακτίνα ρ του κύκλου έχει μήκος 5.

β . Αν η χορδή AB έχει μήκος 6 να υπολογίσετε:

- το μήκος της χορδής $ΑΓ$ του κύκλου,
- το εμβαδόν τριγώνου $ABΓ$.

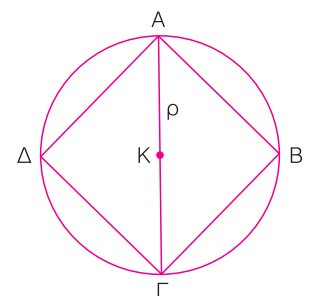
**82 Θέμα 2 - 21301**

Σε κύκλο (K, ρ) εμβαδού $E = 4\pi$ είναι εγγεγραμμένο τετράγωνο $ABΓΔ$, όπως στο διπλανό σχήμα. Να υπολογίσετε:

α . την ακτίνα ρ του κύκλου (K, ρ) .

β . το μήκος της διαμέτρου $ΑΓ$ του κύκλου (K, ρ) και της πλευράς AB του τετραγώνου $ABΓΔ$.

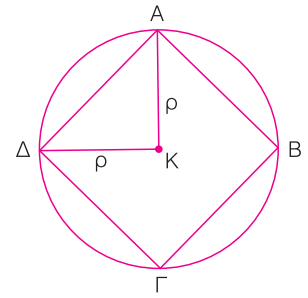
γ . το εμβαδόν του τετραγώνου $ABΓΔ$.



83 Θέμα 2 - 21300

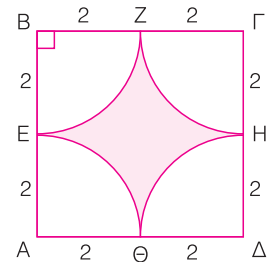
Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$, το οποίο είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο (K, ρ) , όπως στο διπλανό σχήμα.

- α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AK\Delta$ είναι ορθογώνιο.
- β. Αν επιπλέον το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου $AK\Delta$ είναι 4:
 - i. Να αποδείξετε ότι $\rho = \sqrt{8}$.
 - ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κύκλου (K, ρ) .

**84 Θέμα 2 - 18098**

Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς $a = 4$. Με κέντρα τις κορυφές του τετραγώνου και ακτίνα $\rho = 2$ σχεδιάζουμε τέσσερις κυκλικούς τομείς στο εσωτερικό του, όπως φαίνεται στο σχήμα.

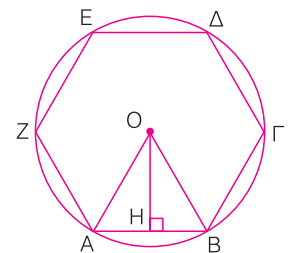
- α. Να υπολογίσετε το εμβαδόν κάθε κυκλικού τομέα.
- β. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου είναι $E = 4(4 - \pi)$

**85 Θέμα 2 - 18099**

Κανονικό εξάγωνο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας $R = 2\sqrt{3}$ όπως φαίνεται στο σχήμα.

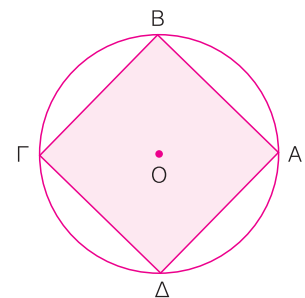
- α. Να υπολογίσετε την πλευρά και το απόστημα του κανονικού εξαγώνου.
- β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κανονικού εξαγώνου.
- γ. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ του κανονικού εξαγώνου και του περιγεγραμμένου κύκλου του ισούται με

$$E = 6(2\pi - 3\sqrt{3})$$

**86 Θέμα 2 - 21075**

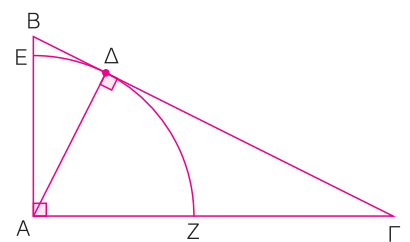
Δίνεται κύκλος με κέντρο O , ακτίνα ρ και εμβαδόν ίσο με 16π .

- α. Να υπολογίσετε την ακτίνα ρ του κύκλου.
- β. Αν η ακτίνα ρ του κύκλου είναι 4 να υπολογίσετε:
 - i. Την πλευρά του εγγεγραμμένου τετραγώνου στον κύκλο.
 - ii. Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται ανάμεσα στο τετράγωνο και στον κύκλο.

**87 Θέμα 2 - 21122**

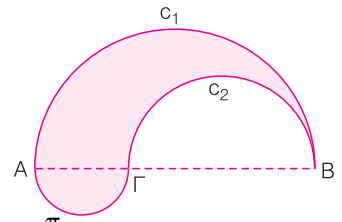
Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ του σχήματος, το Δ είναι η προβολή της κορυφής A στην υποτείνουσα $B\Gamma$ και είναι $BD = 1$ και $\Delta\Gamma = 4$.

- α. Να αποδείξετε ότι $A\Delta = 2$.
- β. Με κέντρο το A το και ακτίνα $A\Delta$ γράφουμε κύκλο, ο οποίος τέμνει τις πλευρές AB και $A\Gamma$, στα σημεία E και Z αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να υπολογίσετε το μήκος του τόξου $\widehat{E\Delta Z}$.



88 Θέμα 2 - 20672

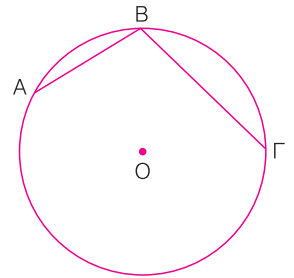
Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα $AB=6$, και σημείο του Γ , ώστε $B\Gamma=4$. Στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η AB σχεδιάζουμε τα ημικύκλια C_1 και C_2 με διαμέτρους AB και $B\Gamma$ αντίστοιχα και στο άλλο ημιεπίπεδο σχεδιάζουμε ημικύκλιο C_3 με διάμετρο $A\Gamma$.



- α.** Να αποδείξετε ότι τα εμβαδά των ημικυκλίων C_1 , C_2 και C_3 είναι $\frac{9\pi}{2}$, 2π και $\frac{\pi}{2}$ αντίστοιχα.
- β.** Να βρείτε το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου.

89 Θέμα 2 - 20363

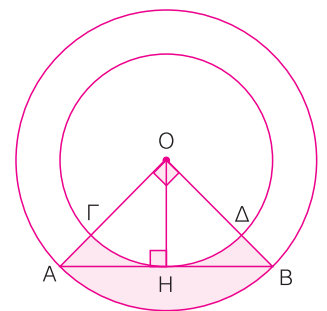
Δίνεται ο κύκλος (O, R) και τα σημεία του A, B, Γ όπως φαίνονται στο διπλανό σχήμα, ώστε $AB=R$ και $B\Gamma=R\sqrt{2}$.



- α.** Να αποδείξετε ότι $\widehat{AB}=60^\circ$ και $\widehat{B\Gamma}=90^\circ$.
- β.** Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του R , τα μήκη των τόξων \widehat{AB} , $\widehat{B\Gamma}$.
- γ.** Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του R , το εμβαδόν του κυκλικού τομέα \widehat{OAG} που αντιστοιχεί στην κυρτή γωνία $A\hat{O}\Gamma$.

90 Θέμα 2 - 21123

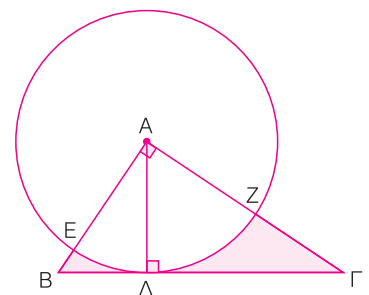
Στο τρίγωνο OAB του σχήματος είναι $\hat{AOB}=90^\circ$, $OA=OB=2$ και το OH είναι το ύψος του από την κορυφή O . Με κέντρο το O και ακτίνες $R=OA$ και $\rho=OH$ γράφουμε δυο ομόκεντρους κύκλους. Ο κύκλος (O, ρ) τέμνει τις OA και OB στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα.



- α.** Να αποδείξετε ότι $OH=\sqrt{2}$.
- β.** Να υπολογίσετε τα εμβαδά των κυκλικών τομέων \widehat{OAB} και $\widehat{O\Gamma\Delta}$.
- γ.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του σκιασμένου μέρους που περικλείεται από τα τόξα \widehat{AB} και $\widehat{\Gamma\Delta}$ και τα ευθύγραμμα τμήματα $A\Gamma$ και $B\Delta$.

91 Θέμα 2 - 21121

Στο διπλανό σχήμα, το ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει υποτείνουσα $B\Gamma=13$ και αντίστοιχο ύψος $A\Delta=6$. Με κέντρο το A και ακτίνα $\Delta\Delta$ γράφουμε κύκλο, ο οποίος τέμνει τις πλευρές AB και $A\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$, στα σημεία E και Z αντίστοιχα.



- α.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.
- β.** Να υπολογίσετε τα εμβαδά:
- του κυκλικού τομέα $\widehat{AE\Delta Z}$,
 - του σκιασμένου χωρίου που είναι εσωτερικά του τριγώνου $AB\Gamma$ και εξωτερικά του κύκλου, όπως φαίνεται και στο παραπάνω σχήμα.

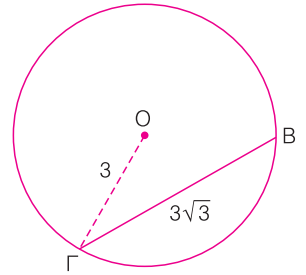
92 Θέμα 2 - 21069

Δίνεται κύκλος με κέντρο O και ακτίνα $\rho = 3$. Θεωρούμε την χορδή $B\Gamma = 3\sqrt{3}$, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α. Να αποδείξετε ότι το μέτρο του κυρτογώνιου τόξου $\widehat{B\Gamma}$ είναι 120° .

β. Να υπολογισθεί το μήκος του κυρτογώνιου τόξου $\widehat{B\Gamma}$.

γ. Να υπολογισθεί το εμβαδόν του κυκλικού τομέα $O\widehat{B\Gamma}$.

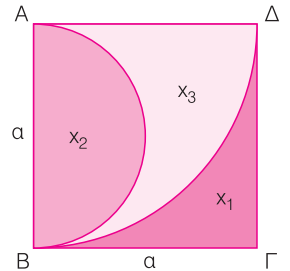
**93 Θέμα 4 - 17599**

Σε τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς a του διπλανού σχήματος, γράφουμε τεταρτοκύκλιο εσωτερικά του τετραγώνου με κέντρο A και ακτίνα a .

α. Αν X_1 είναι το χωρίο του τετραγώνου που βρίσκεται εξωτερικά του τεταρτοκυκλίου, να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ισούται με: $X_1 = \frac{a^2}{4} \cdot (4 - \pi)$.

β. Με διάμετρο AB κατασκευάζουμε ημικύκλιο εσωτερικά του τετραγώνου. Αν X_2 είναι το χωρίο του ημικυκλίου και X_3 το χωρίο του τεταρτοκυκλίου που βρίσκεται εξωτερικά του ημικυκλίου, να υπολογίσετε τα εμβαδά των δύο χωρίων X_2 και X_3 .

γ. Ποιο από τα χωρία X_1 κι X_2 έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

**94 Θέμα 4 - 21103**

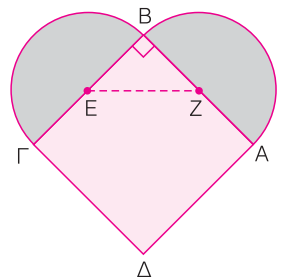
Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς $2a$ και με διαμέτρους τις $B\Gamma$ και BA φτιάχνουμε εξωτερικά του τετραγώνου ημικύκλια, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α. Να αποδείξετε ότι το μήκος κάθε ημικυκλίου ισούται με $\pi \cdot a$.

β. i. Αν η περίμετρος της καρδιάς είναι $2\pi + 4$, να υπολογίσετε το a .

ii. Αν $a = 1$ να βρείτε το μήκος του τμήματος που ενώνει τα κέντρα των δύο ημικυκλίων.

γ. Αν (τ) είναι το άθροισμα των εμβαδών των δυο ημικυκλίων να συγκρίνετε τον λόγο $\frac{(\tau)}{(AB\Gamma\Delta)}$ με την μονάδα. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**95 Θέμα 4 - 21197**

Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο πλευράς $2a$ και Λ το μέσο της πλευράς του $\Gamma\Delta$. Έστω ότι το ημικύκλιο, που σχεδιάζεται στο εσωτερικό του τετραγώνου με διάμετρο την πλευρά του AB , έχει εμβαδόν 10. Τότε:

α. Να αποδείξετε ότι:

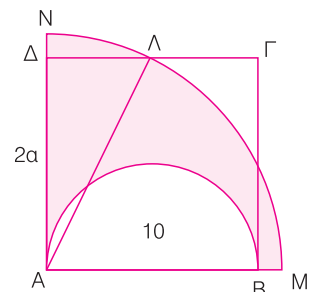
i. Το εμβαδόν του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$ είναι $(AB\Gamma\Delta) = \frac{80}{\pi}$.

ii. $A\Lambda^2 = \frac{100}{\pi}$

β. Με κέντρο το A και ακτίνα $A\Lambda$ κατασκευάζουμε τεταρτοκύκλιο \widehat{AMN} , και έστω M, N είναι τα σημεία τομής του με τις προεκτάσεις των πλευρών του τετραγώνου $AB, A\Delta$ αντίστοιχα. Να υπολογίσετε:

i. Το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου $ABMNA$.

ii. Τον λόγο του εμβαδού του τεταρτοκυκλίου \widehat{AMN} προς το εμβαδόν του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$.



96 Θέμα 4 - 20361

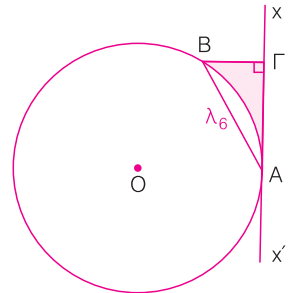
Δίνεται κύκλος (O, R) και η χορδή του AB ίση με την πλευρά κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο. Στο σημείο A φέρνουμε την εφαπτομένη $x'x$ του κύκλου και από το B την κάθετη στην $x'x$ που την τέμνει στο Γ . Να αποδείξετε ότι:

α. $AG = \frac{R\sqrt{3}}{2}$

β. $(OAGB) = \frac{3\sqrt{3}R^2}{8}$

γ. το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου, που φαίνεται στο διπλανό σχήμα είναι:

$$E = \frac{(9\sqrt{3} - 4\pi)R^2}{24}$$

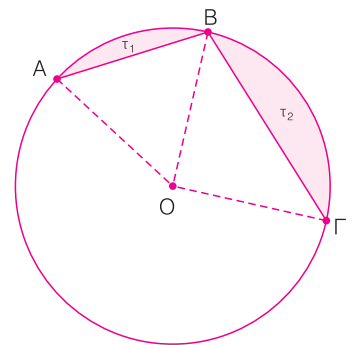
**97 Θέμα 4 - 21659**

Για τα σημεία A , B και Γ του κύκλου (O, R) στο διπλανό σχήμα ισχύει ότι $AB = R$ και $B\Gamma = R\sqrt{2}$. Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του R :

α. τα μήκη των τόξων AB , $B\Gamma$,

β. το μήκος του μη κυρτογώνιου τόξου AG και το εμβαδόν του κυκλικού τομέα (OAG) που αντιστοιχεί στην κυρτή γωνία $AO\Gamma$,

γ. το άθροισμα των εμβαδών των κυκλικών τμημάτων (τ_1) και (τ_2) , όπως αυτά σημειώνονται στο σχήμα.

**98 Θέμα 4 - 21138**

Στο διπλανό σχήμα ο κύκλος c_1 έχει κέντρο K και ακτίνα R και ο κύκλος c_2 έχει κέντρο Λ και ακτίνα $\rho = 2$. Οι αποστάσεις των K και Λ από την κοινή χορδή AB των δύο κύκλων είναι $KO = \sqrt{3}$ και $\Lambda O = 1$.

α. Να αποδείξετε ότι:

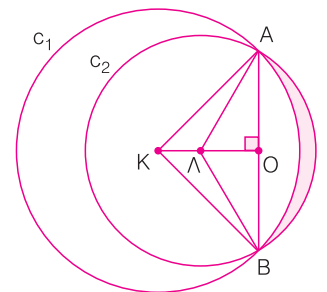
i. $OA = \sqrt{3}$,

ii. $R = \sqrt{6}$.

β. Να βρείτε τα εμβαδά:

i. των κυκλικών τομέων KAB και ΛAB ,

ii. του σκιασμένου μηνίσκου του σχήματος.

**99 Θέμα 4 - 21127**

Ο κυκλικός δίσκος του διπλανού σχήματος έχει κέντρο O και ακτίνα R . Έστω AB μια χορδή του κύκλου και M η προβολή του O στην AB . Αν η MO προεκταθεί προς το O , τέμνει τον κύκλο στο σημείο N . Δίνεται ότι $MN = \frac{3R}{2}$

α. Να αποδείξετε ότι:

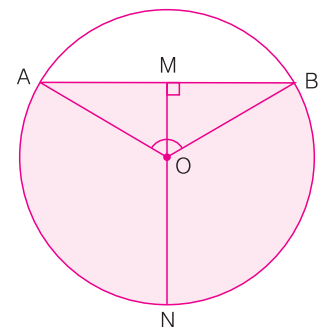
i. $AB = R\sqrt{3}$,

ii. $\angle AOB = 120^\circ$.

β. Υποθέστε ότι η διατομή ενός αγωγού μεταφοράς νερού είναι ο κυκλικός δίσκος του σχήματος που έχει δοθεί με $R = 10\text{ cm}$. Η στάθμη του νερού που ρέει στον αγωγό είναι στη χορδή AB και το $MN = 15\text{ cm}$. Να βρείτε:

i. το εμβαδόν του σκιασμένου μέρους του σχήματος που περικλείεται από την χορδή AB και το τόξο \widehat{ANB} ,

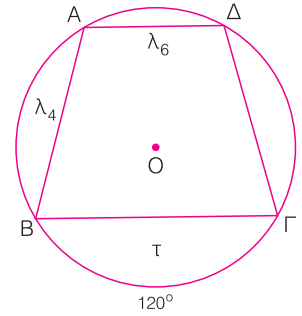
ii. το μήκος του τόξου \widehat{ANB} .



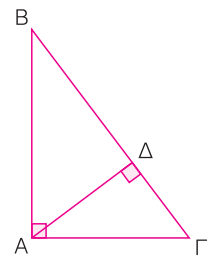
100 Θέμα 4 - 18043

Σε κύκλο (O, ρ) θεωρούμε τα σημεία A, B, Γ και Δ . Η πλευρά $A\Delta$ είναι ίση με την πλευρά λ_6 κανονικού εξάγωνου εγγεγραμμένου στον κύκλο.

- α.** Αν η πλευρά AB ισούται με την πλευρά λ_4 τετραγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο και το τόξο $B\Gamma = 120^\circ$:
- Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς $\Gamma\Delta$ ως συνάρτηση της ακτίνας.
 - Να υπολογίσετε το εμβαδόν (τ) του κυκλικού τμήματος που περικλείεται από την κυρτή γωνία $B\hat{O}\Gamma$.
- β.** Κρατάμε τα σημεία A και Δ σταθερά και μετακινούμε την χορδή $B\Gamma$ παράλληλα προς την $A\Delta$ ώστε να διέρχεται από το O . Ποιο θα είναι το μήκος του τόξου AB ;

**1ο Θέμα - 3ο Θέμα****101 Θέμα 1 - 16097**

- α.** Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως **Σωστή (Σ)** ή **Λανθασμένη (Λ)**, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.
- Κάθε ευθεία που είναι παράλληλη με μία από τις πλευρές ενός τριγώνου χωρίζει τις δύο άλλες πλευρές σε μέρη ανάλογα.
 - Δύο ισοσκελή τρίγωνα είναι πάντοτε όμοια.
 - Στο σχήμα, η προβολή της πλευράς AB στην υποτείνουσα $B\Gamma$ είναι το τμήμα $\Gamma\Delta$.
 - Το εμβαδόν ενός τριγώνου ισούται με το γινόμενο μιας πλευράς επί το αντίστοιχο ύψος.
 - Ο εγγεγραμμένος και ο περιγεγραμμένος κύκλος ενός κανονικού πολυγώνου είναι ομόκεντροι.
- β.** Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου ισούται με το γινόμενο των πλευρών του.

**102 Θέμα 3 - 17908**

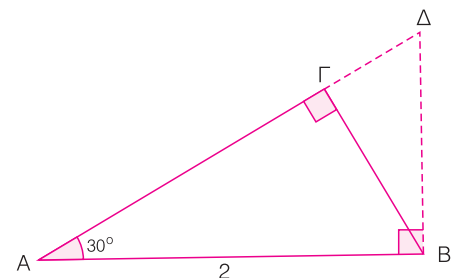
Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ τα μήκη των πλευρών του είναι $\alpha = 4$, $\beta = \sqrt{17}$ και $\gamma = 5$.

- α.** Να βρείτε το είδος του τριγώνου $AB\Gamma$, ως προς τις γωνίες του.
- β.** Αν $A\Delta$ είναι το ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$ από την κορυφή A , τότε:
- να υπολογίσετε το ΔB .
 - να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

103 Θέμα 3 - 21783

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, με $\hat{\Gamma} = 90^\circ$, $\hat{A} = 30^\circ$ και $AB = 2$.

- α.** Να αποδείξετε ότι $A\Gamma = \sqrt{3}$.
- β.** Φέρνουμε κάθετη στην AB , στο σημείο B , που τέμνει την προέκταση της $A\Gamma$ στο Δ . Να αποδείξετε ότι $A\Delta = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.
- γ.** Αν K είναι το μέσο της $A\Delta$, να αποδείξετε ότι $(KAB) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.



104 Θέμα 3 - 21102

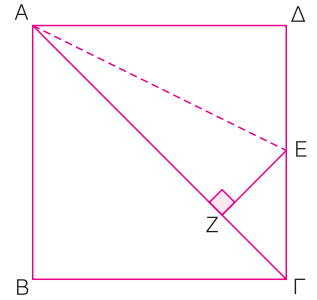
Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς α και έστω E το μέσο της $\Delta\Gamma$.

α. Να αποδείξετε ότι:

i. $A\Gamma = \alpha\sqrt{2}$.

ii. $AE = \alpha\frac{\sqrt{5}}{2}$.

β. Να υπολογίσετε την προβολή του τμήματος AE στην $A\Gamma$.

**105 Θέμα 3 - 19037**

Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα σημεία Δ , E , Z των πλευρών AB , $B\Gamma$, $A\Gamma$ αντίστοιχα τέτοια ώστε

$$\Delta B = \frac{1}{5}AB, \quad E\Gamma = \frac{1}{4}B\Gamma, \quad Z\Gamma = \frac{1}{2}A\Gamma$$

α. Να υπολογίσετε τους λόγους $\frac{(\Delta BE)}{(\Delta B\Gamma)}$, $\frac{(E\Gamma Z)}{(A\Gamma\Gamma)}$, $\frac{(Z\Delta\Delta)}{(A\Gamma\Gamma)}$.

β. Αν είναι $(AB\Gamma) = 120$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΔEZ .

