# ΛΥΣΕΙΣ

# ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

# Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

# ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ενημέρωση 6/5/2022

ΕΚΔΟΣΕΙΣ Μπάρλας

**ΘΕΜΑΤΑ ΤΡΑΠΕΖΑΣ ΘΕΜΑΤΩΝ**

## 1 Θέμα 2 - 14534

**α.** Θεωρούμε ευθεία $\varepsilon$ από το σημείο Α παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ. Είναι $\varepsilon // \Delta E // B\Gamma$ και $AB$, $AM$, $A\Gamma$ είναι τέμνουσες των ευθειών αυτών.

Από το Θεώρημα του Θαλή έχουμε:

- $\frac{A\Delta}{AB}=\frac{AZ}{AM} \Leftrightarrow \frac{A\Delta}{AB}=\frac{2}{3}$ , (1)
- $\frac{AE}{A\Gamma}=\frac{AZ}{AM}=\frac{2}{3}$ , (2)

Από τις ιδιότητες αναλογιών $\frac{AE}{A\Gamma-AE}=\frac{2}{3-2} \Leftrightarrow \frac{AE}{E\Gamma}=2$.

**β.** Από τη σχέση (1) του ερωτήματος **α.** έχουμε $\frac{A\Delta}{AB}=\frac{2}{3} \Leftrightarrow A\Delta=\frac{2}{3}\cdot AB \Leftrightarrow A\Delta=\frac{2}{3}\cdot 6 \Leftrightarrow A\Delta=4$ .

Αντίστοιχα από τη σχέση (2) έχουμε $\frac{AE}{A\Gamma}=\frac{2}{3} \Leftrightarrow AE=\frac{2}{3}\cdot A\Gamma \Leftrightarrow AE=\frac{2}{3}\cdot 9 \Leftrightarrow AE=6$ .

Οπότε, $E\Gamma=A\Gamma-AE=9-6=3$

## 2 Θέμα 2 - 14579

**α.** Είναι:
- $AB=3A\Delta \Leftrightarrow B\Delta+A\Delta=3A\Delta \Leftrightarrow B\Delta=2A\Delta \Leftrightarrow \frac{B\Delta}{A\Delta}=2$.
- $\Delta E // A\Gamma$ , οπότε $\frac{B\Delta}{A\Delta}=\frac{BE}{E\Gamma} \Leftrightarrow \frac{BE}{E\Gamma}=2$

**β.** Είναι:
- $\frac{BE}{E\Gamma}=2$
- $A\Gamma=3{,}9 \Leftrightarrow AZ+\Gamma Z=3{,}9 \Leftrightarrow AZ+1{,}3=3{,}9 \Leftrightarrow AZ=2{,}6$

Οπότε $\frac{AZ}{\Gamma Z}=\frac{2{,}6}{1{,}3}=2$ , άρα η ΖΕ είναι παράλληλη στην ΑΒ.

## 3 Θέμα 2 - 15830

**α.** Είναι: $ZE // B\Gamma$ , οπότε από το Θ. Θαλή $\frac{ZA}{ZB}=\frac{EA}{E\Gamma}$ , (1).

**β.** Είναι $ME \perp B\Gamma$ , $A\Delta \perp B\Gamma$ , οπότε $ME // A\Delta$ , άρα από το Θ. Θαλή $\frac{M\Delta}{M\Gamma}=\frac{EA}{E\Gamma}$ , (2).

Από τις (1), (2) έχουμε $\frac{ZA}{ZB}=\frac{M\Delta}{M\Gamma}$ .

## 4 Θέμα 2 - 15831

**α.** Είναι $M\Delta=\frac{1}{2}MB=\frac{1}{2}M\Gamma$ , (1) .

Έχουμε $ME // A\Delta$ , οπότε από το Θ. Θαλή $\frac{EA}{E\Gamma}=\frac{M\Delta}{M\Gamma} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \frac{EA}{E\Gamma}=\frac{\frac{1}{2}M\Gamma}{M\Gamma}=\frac{1}{2}$ .

**β.** Έχουμε $ZE // B\Gamma$ , οπότε από το Θ. Θαλή $\frac{ZA}{ZB}=\frac{EA}{E\Gamma} \overset{\alpha.}{\Leftrightarrow} \frac{ZA}{ZB}=\frac{1}{2}$ .

## 5 Θέμα 4 - 14499

**α. i.** Είναι $ΔΕ//ΑΜ$, οπότε οι πλευρές του τριγώνου $ΒΕΔ$ είναι ανάλογες προς τις πλευρές του τριγώνου ΒΜΑ. Άρα, $\frac{ΔΕ}{ΑΜ}=\frac{ΒΕ}{ΒΜ}=\frac{ΒΔ}{ΒΑ}$ (1).

**ii.** Είναι $ΑΜ//ΖΕ$, οπότε τα τρίγωνα $ΕΖΓ$ και $ΑΜΓ$ έχουν τις πλευρές τους ανάλογες.

Άρα, $\frac{ΕΖ}{ΑΜ}=\frac{ΓΕ}{ΓΜ}=\frac{ΓΖ}{ΓΑ}$ (2).

**β.** Από τις σχέσεις (1) και (2) του **α.** ερωτήματος έχουμε ότι $\frac{ΔΕ}{ΑΜ}=\frac{ΒΕ}{ΒΜ}$ και $\frac{ΕΖ}{ΑΜ}=\frac{ΓΕ}{ΓΜ}$.

Επειδή το σημείο Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ είναι $ΒΜ=ΓΜ$, οπότε οι προηγούμενες σχέσεις γράφονται: $\frac{ΔΕ}{ΑΜ}=\frac{ΒΕ}{ΒΜ}$ και $\frac{ΕΖ}{ΑΜ}=\frac{ΓΕ}{ΒΜ}$.

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε:

$$\frac{ΔΕ}{ΑΜ}+\frac{ΕΖ}{ΑΜ}=\frac{ΒΕ}{ΒΜ}+\frac{ΓΕ}{ΒΜ}\Leftrightarrow\frac{ΔΕ+ΕΖ}{ΑΜ}=\frac{ΒΕ+ΓΕ}{ΒΜ}\Leftrightarrow\frac{ΔΕ+ΕΖ}{ΑΜ}=\frac{ΒΓ}{ΒΜ}\Leftrightarrow$$

$\frac{ΔΕ+ΕΖ}{ΑΜ}=\frac{2\cdot ΒΜ}{ΒΜ}\Leftrightarrow\frac{ΔΕ+ΕΖ}{ΑΜ}=2\Leftrightarrow ΔΕ+ΕΖ=2ΑΜ$, για οποιαδήποτε θέση του Ε στο ΒΜ.

## 6 Θέμα 2 - 16100

**α.** $\frac{ΒΔ}{ΑΓ}=\frac{12}{4}=3$ , $\frac{ΔΕ}{ΕΓ}=\frac{6}{2}=3$ , $\frac{ΒΕ}{ΑΕ}=\frac{15}{5}=3$

**β.** Τα τρίγωνα $ΑΕΓ$ και $ΒΕΔ$ είναι όμοια διότι έχουν τις πλευρές τους ανάλογες μία προς μία από το ερώτημα **α.** .

**γ.** Αφού τα τρίγωνα $ΑΕΓ$ και $ΒΕΔ$ είναι όμοια, τότε θα έχουν ίσες τις γωνίες που βρίσκονται απέναντι από ομόλογες πλευρές τους. Επομένως, έχουμε:

$\hat{Α}=\hat{Β}$ , $\hat{Γ}=\hat{Δ}$ , $Α\hat{Ε}Γ=Β\hat{Ε}Δ$ .

## 7 Θέμα 2 - 14535

**α.** Είναι:
- $\hat{Α}=\hat{Ζ}$
- $\frac{ΑΒ}{ΖΔ}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$ και $\frac{ΑΓ}{ΖΕ}=\frac{15}{20}=\frac{3}{4}$, οπότε $\frac{ΑΒ}{ΖΔ}=\frac{ΑΓ}{ΖΕ}$.

Άρα τα τρίγωνα $ΑΒΓ$, $ΔΕΖ$ είναι όμοια.

**β. i.** Οι λόγοι των ομόλογων πλευρών των δυο τριγώνων είναι $\frac{ΑΒ}{ΖΔ}$, $\frac{ΑΓ}{ΖΕ}$ και $\frac{ΒΓ}{ΔΕ}$.

**ii.** Ο λόγος ομοιότητας των δύο τριγώνων είναι ο λόγος των ομόλογων πλευρών τους.

Από το ερώτημα **α.** είναι $\frac{3}{4}$.

## 8 Θέμα 2 - 14536

**α.** • Στο ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ καθεμιά από τις γωνίες $\hat{Β}$, $\hat{Γ}$ της βάσης του θα είναι $\frac{180^\circ-48^\circ}{2}=\frac{132^\circ}{2}=66^\circ$.

• Στο ισοσκελές τρίγωνο $ΕΖΔ$ έχουμε $\hat{Ζ}=66^\circ$, οπότε και $\hat{Δ}=66^\circ$ .

Άρα τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΕΖΔ$ .έχουν τις δύο γωνίες στη βάση τους μία προς μία ίσες, οπότε είναι όμοια.

**β. i.** $\frac{ΑΒ}{ΕΖ}=\frac{ΑΓ}{ΕΔ}=\frac{ΒΓ}{ΖΔ}$.

**ii.** $\frac{ΒΓ}{ΖΔ}=\frac{ΑΒ}{ΕΖ}=\frac{3\cdot ΕΔ}{ΕΖ}=\frac{3\cdot ΕΖ}{ΕΖ}=3$.

## 9 Θέμα 2 - 14537

**α.** Είναι: • $\hat{\Gamma} = 180^\circ - (48^\circ + 53^\circ) = 180^\circ - 101^\circ = 79^\circ$

• $\hat{\Delta} = 180^\circ - (79^\circ + 48^\circ) = 180^\circ - 127^\circ = 53^\circ$

Οπότε τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Delta EZ$ έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία, οπότε είναι όμοια.

**β. i.** Ομόλογες είναι οι πλευρές που είναι απέναντι από τις ίσες γωνίες στα δύο τρίγωνα. Δηλαδή οι πλευρές ΒΓ και ΔΕ , οι πλευρές ΑΓ και ΕΖ και οι πλευρές ΑΒ και ΔΖ.

**ii.** $\frac{B\Gamma}{\Delta E} = \frac{A\Gamma}{EZ} = \frac{AB}{\Delta Z}$.

## 10 Θέμα 2 - 14538

**α.** Είναι $AB // \Delta E$ , $\hat{A} = \hat{E}$ ως εντός εναλλάξ και $\hat{B} = \hat{\Delta}$ ως εντός εναλλάξ.

Οι γωνίες $A\hat{\Gamma}B$ και $\Delta\hat{\Gamma}E$ είναι ίσες ως κατακορυφήν, οπότε τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $E\Delta\Gamma$ είναι όμοια.

**β. i.** Οι λόγοι των ομόλογων πλευρών είναι: $\frac{AB}{E\Delta}$ , $\frac{B\Gamma}{\Delta\Gamma}$ , $\frac{\Gamma A}{\Gamma E}$

**ii.** Ο λόγος ομοιότητας είναι $\frac{\Gamma A}{\Gamma E} = \frac{2 \cdot \Gamma E}{\Gamma E} = 2$ .

## 11 Θέμα 2 - 14546

**α.** Είναι $\frac{A\Gamma}{\Gamma E} = \frac{B\Gamma}{\Gamma\Delta}$ και $A\hat{\Gamma}B = \Delta\hat{\Gamma}E$ , ως κατακορυφήν.

Οπότε τα τρίγωνα $\Gamma AB$ , $\Gamma\Delta E$ είναι όμοια.

**β. i.** $\frac{AB}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{\Gamma\Delta} = \frac{A\Gamma}{\Gamma E}$

**ii.** $\frac{A\Gamma}{\Gamma E} = \frac{AB}{\Delta E} = \frac{2 \cdot \Delta E}{\Delta E} = 2$. Οπότε $\frac{A\Gamma}{\Gamma E} = 2 \Leftrightarrow A\Gamma = 2 \cdot \Gamma E$.

Άρα η πλευρά ΑΓ είναι διπλάσια από την πλευρά ΓΕ.

## 12 Θέμα 2 - 16086

**α.** Φέρνουμε $\varepsilon_4 // \varepsilon_2$ που διέρχεται από το Ο.

• Είναι $\varepsilon_2 // \varepsilon_4 // \varepsilon_3$ , οπότε από το θεώρημα του Θαλή έχουμε:

$$\frac{OA}{O\Delta} = \frac{OB}{O\Gamma} \Leftrightarrow \frac{12}{3} = \frac{6}{O\Gamma} \Leftrightarrow 12 \cdot O\Gamma = 6 \cdot 3 \Leftrightarrow O\Gamma = 1{,}5$$

• Είναι $\varepsilon_4 // \varepsilon_2 // \varepsilon_1$ , οπότε από το θεώρημα του Θαλή έχουμε:

$$\frac{O\Gamma}{\Gamma E} = \frac{O\Delta}{\Delta Z} \Leftrightarrow \frac{1{,}5}{4} = \frac{3}{\Delta Z} \Leftrightarrow 1{,}5 \cdot \Delta Z = 4 \cdot 3 \Leftrightarrow \Delta Z = 8$$

**β.** Τα τρίγωνα ΟΕΖ και ΟΒΑ έχουν:

$\hat{Z} = \hat{A}$ , ως εντός εναλλάξ και $\hat{E} = \hat{B}$, ως εντός εναλλάξ , οπότε τα τρίγωνα είναι όμοια.

**γ.** Από την ομοιότητα των τριγώνων ΖΕΟ και ΑΒΟ έχουμε:

$$\frac{ZE}{AB} = \frac{OZ}{OA} = \frac{O\Delta + \Delta Z}{OA} = \frac{3+8}{12} = \frac{11}{12}$$

## 13 Θέμα 2 - 16099

**α.** Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Delta BE$ έχουν $\hat{A} = \hat{\Delta}$ και $A\hat{B}\Gamma = \Delta\hat{B}E = 90^\circ$ , οπότε είναι όμοια.

**β.** Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Delta BE$ είναι όμοια, οπότε,

$$\frac{AB}{\Delta B} = \frac{\Gamma A}{E\Delta} \Leftrightarrow \frac{36}{24} = \frac{AB}{16} \Leftrightarrow \frac{3}{2} = \frac{AB}{16} \Leftrightarrow 2AB = 48 \Leftrightarrow AB = 24$$

## 14 Θέμα 2 - 16113

**α.** Είναι $AB // \Gamma\Delta$ οπότε τα τρίγωνα $AEB$ και $\Gamma E\Delta$ έχουν:

$\hat{A} = \hat{\Gamma}$ , ως εντός εναλλάξ και $\hat{\Delta} = \hat{B}$ , ως εντός εναλλάξ

Επομένως τα τρίγωνα είναι όμοια.

**β.** $\dfrac{AB}{\Gamma\Delta} = \dfrac{AE}{E\Gamma} = \dfrac{BE}{E\Delta}$ (1)

**γ.** Από την (1) έχουμε $\dfrac{AB}{\Gamma\Delta} = \dfrac{AE}{E\Gamma} = \dfrac{BE}{E\Delta} \Leftrightarrow \dfrac{8}{\Gamma\Delta} = \dfrac{6}{15} = \dfrac{BE}{10}$. Οπότε:

- $6\Gamma\Delta = 8 \cdot 15 \Leftrightarrow 6\Gamma\Delta = 120 \Leftrightarrow \Gamma\Delta = 20$
- $15BE = 6 \cdot 10 \Leftrightarrow 15BE = 60 \Leftrightarrow BE = 4$

## 15 Θέμα 2 - 16126

**α.** Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Gamma B\Delta$ έχουν:

- $\hat{B}$ κοινή γωνία
- $\dfrac{BA}{B\Gamma} = \dfrac{B\Gamma}{B\Delta} = \dfrac{3}{2}$

Οπότε είναι όμοια και ο λόγος ομοιότητας είναι $\dfrac{3}{2}$.

**β.** Αφού τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Gamma B\Delta$ είναι όμοια και $\dfrac{A\Gamma}{\Gamma\Delta} = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \dfrac{36}{\Gamma\Delta} = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \Gamma\Delta = 24$ .

## 16 Θέμα 2 - 16755

**α.** $\dfrac{B\Gamma}{A\Gamma} = \dfrac{2A\Gamma}{A\Gamma} = 2$ και $\dfrac{A\Gamma}{\Gamma\Delta} = \dfrac{2\Gamma\Delta}{\Gamma\Delta} = 2$

**β.** Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Delta A\Gamma$ έχουν: $\dfrac{B\Gamma}{A\Gamma} = 2$ , $\dfrac{A\Gamma}{A\Delta} = 2$ , $\hat{\Gamma}$ (κοινή)

Επομένως, τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Delta A\Gamma$ είναι όμοια.

**γ.** Αφού τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Delta A\Gamma$ είναι όμοια, θα έχουν ίσες τις γωνίες που βρίσκονται απέναντι από ομόλογες πλευρές τους. Επομένως, έχουμε $B\hat{A}\Gamma = \Gamma\hat{\Delta}A$ , $\hat{B} = \Delta\hat{A}\Gamma$ .

## 17 Θέμα 2 - 16757

**α.** Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ έχουμε:

$$\Delta\Gamma^2 = A\Gamma^2 + A\Delta^2 = 3^2 + 4^2 = 25$$

Άρα, $\Gamma\Delta = \sqrt{25} = 5$.

**β.** Τα τρίγωνα $A\Delta\Gamma$ και $E\Delta B$ έχουν $A\hat{\Delta}\Gamma = E\hat{\Delta}B$ (ως κατακορυφήν) και $\hat{A} = \hat{E} = 90^o$.

Αφού τα τρίγωνα είναι όμοια.

**γ.** Τα τρίγωνα $A\Delta\Gamma$ και $E\Delta B$ είναι όμοια, οπότε θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες.

Έτσι έχουμε: $\dfrac{A\Gamma}{BE} = \dfrac{\Gamma\Delta}{\Delta B} \Leftrightarrow \dfrac{3}{BE} = \dfrac{5}{2} \Leftrightarrow BE = \dfrac{3 \cdot 2}{5} \Leftrightarrow BE = \dfrac{6}{5}$ .

## 18 Θέμα 2 - 16805

**α.** Η περίμετρος του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ είναι 72. Οπότε

$$2AB + 2B\Gamma = 72 \Leftrightarrow 2(x+y) + 2z = 72 \Leftrightarrow x + y + z = 36$$

Τα μήκη των τμημάτων $x$ , $y$ , $z$ είναι ανάλογα προς τους αριθμούς 2 , 3 , 4 αντίστοιχα.

Άρα $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{4} = \dfrac{z}{3} = \dfrac{x+y+z}{2+4+3} = \dfrac{36}{9} = 4$ .

Άρα $x = 4 \cdot 2 = 8$ , $y = 4 \cdot 4 = 16$ και $z = 3 \cdot 4 = 12$.

**β.** Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στα τρίγωνα $\Gamma B E$, $\Delta A E$ έχουμε:

- $\Gamma E^2 = y^2 + z^2 = 16^2 + 12^2 = 400$, οπότε $\Gamma E = 20$.
- $\Delta E^2 = AE^2 + \Delta A^2 = 8^2 + 12^2 = 208$, οπότε $\Delta E = \sqrt{208} = \sqrt{16 \cdot 13} = 4\sqrt{13}$.

Άρα η περίμετρος του τριγώνου $\Delta E \Gamma$ είναι:

$\Delta E + E\Gamma + \Delta\Gamma = 4\sqrt{13} + 20 + (8+16) = 44 + 4\sqrt{13}$.

## 19 Θέμα 2 - 17342

**α. i.** Το τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο με

$A\hat{\Delta}\Gamma + \hat{\Gamma} + \Gamma\hat{A}\Delta = 180^\circ \Leftrightarrow 90^\circ + 45^\circ + \Gamma\hat{A}\Delta = 180^\circ \Leftrightarrow \Gamma\hat{A}\Delta = 45^\circ$.

Αφού $\Gamma\hat{A}\Delta = \hat{\Gamma}$, θα είναι $\Gamma\Delta = A\Delta = 4$.

**ii.** Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ έχουμε

$$A\Gamma^2 = A\Delta^2 + \Gamma\Delta^2 = 4^2 + 4^2 = 32 \text{ , οπότε } A\Gamma = \sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = 4\sqrt{2}$$

**β.** Είναι $B\Delta = B\Gamma - \Gamma\Delta = 7 - 4 = 3$.

Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Delta$ έχουμε

$AB^2 = A\Delta^2 + B\Delta^2 = 4^2 + 3^2 = 25$, οπότε $AB = \sqrt{25} = 5$.

## 20 Θέμα 4 - 14500

**α.** $1 \rightarrow \text{ii}$ , $2 \rightarrow \text{iii}$ , $3 \rightarrow \text{iv}$

**β. i.** Είναι $KM = R + \rho = \Lambda M$, οπότε το τρίγωνο $MK\Lambda$ είναι ισοσκελές με βάση την πλευρά $K\Lambda$. Το σημείο $O$ είναι το μέσο του τμήματος $K\Lambda$, αφού $OK = O\Lambda = R$, επομένως το $MO$ είναι διάμεσος της βάσης του ισοσκελούς τριγώνου, άρα είναι και ύψος, δηλαδή $OM \perp K\Lambda$.

**ii.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο $OM\Lambda$ είναι $\hat{O} = 90^\circ$ οπότε εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε:

$OM^2 + O\Lambda^2 = \Lambda M^2 \Leftrightarrow (2R - \rho)^2 + R^2 = (R + \rho)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4R^2 - 4R\rho + \rho^2 + R^2 = R^2 + 2R\rho + \rho^2 \Leftrightarrow 4R^2 = 6R\rho \Leftrightarrow 2R = 3\rho \Leftrightarrow \rho = \dfrac{2R}{3}$.

## 21 Θέμα 4 - 14533

**α. i.** • Το πρώτο κινητό που έκανε τη διαδρομή $AB\Gamma\Delta E$ διάνυσε συνολικά $(3 + 10 + 4 + 14)\text{Km} = 31\text{Km}$.

• Για το δεύτερο κινητό που έκανε τη διαδρομή $AZE$ έχουμε: $AZ // \Gamma\Delta$ και $ZE // B\Gamma$.

Στο τετράπλευρο $B\Gamma\Delta Z$ οι απέναντι πλευρές τους είναι παράλληλες, οπότε αυτό είναι παραλληλόγραμμο και επειδή οι γωνίες του είναι ορθές είναι ορθογώνιο.

Άρα $BZ = \Gamma\Delta = 4$ και $Z\Delta = B\Gamma = 10$.

Η συνολική διαδρομή του δεύτερου κινητού είναι $(7 + 10 + 14)\text{Km} = 31\text{Km}$.

**ii.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AZE$ είναι $\hat{Z} = 90^\circ$, οπότε εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε:

$EA^2 = AZ^2 + ZE^2 = 7^2 + 24^2 = 49 + 576 = 625$, οπότε $EA = \sqrt{625} = 25\text{Km}$.

**β.** Αν τα κινητά, κατά την επιστροφή τους από το σημείο $E$ στο $A$ περάσουν από το σημείο $\Gamma$, τότε τα σημεία $A$, $\Gamma$ και $E$ είναι συνευθειακά.

Τότε τα τρίγωνα $\Gamma\Delta E$ και $AZE$ έχουν την $\hat{\Delta} = \hat{Z} = 90^\circ$ και $\hat{E}$ κοινή, οπότε θα είναι όμοια.

Επομένως τα τρίγωνα $\Gamma\Delta E$ και $AZE$ θα έχουν πλευρές ανάλογες, άρα

$\dfrac{\Gamma\Delta}{AZ} = \dfrac{\Delta E}{ZE}$ ή $\dfrac{4}{7} = \dfrac{14}{24}$ ή $\dfrac{4}{7} = \dfrac{7}{12}$ ή $48 = 49$ που είναι άτοπο.

Επομένως, τα κινητά κατά την επιστροφή τους από το $E$ δεν περνούν από το $\Gamma$.

## 22 Θέμα 4 - 16133

**α.** • Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ\,(\hat{Β}=90^{\circ})$, έχουμε

$ΑΓ^2=ΑΒ^2+ΒΓ^2=12^2+16^2=400$ , οπότε $ΑΓ=\sqrt{400}=20$ .

• Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΓΔΕ\,(\hat{Γ}=90^{\circ})$, έχουμε

$ΓΕ^2=ΔΕ^2-ΓΔ^2=10^2-8^2=36$ , οπότε $\sqrt{36}=6$ .

Άρα $ΑΕ=ΑΓ+ΓΕ=20+6=26$.

**β.** Τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΕΓΔ$ έχουν

$$\frac{ΑΒ}{ΓΕ}=\frac{12}{6}=2\ ,\ \frac{ΒΓ}{ΓΔ}=\frac{16}{8}=2\ ,\ \frac{ΑΓ}{ΔΕ}=\frac{20}{10}=2$$

Οπότε είναι όμοια.

**γ. i.** Αφού τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΕΓΔ$ είναι όμοια, θα έχουν τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες, άρα $\hat{Α}=\hat{Ε}$ , οπότε το τρίγωνο $ΖΑΕ$ είναι ισοσκελές με βάση την $ΑΕ$. Επειδή το $ΖΗ$ είναι ύψος θα είναι και διάμεσος οπότε το σημείο $Η$ είναι το μέσο της $ΑΕ$ .Επομένως θα είναι

$$ΗΕ=\frac{ΑΕ}{2}=\frac{26}{2}=13\,.$$

**ii.** Είναι $ΔΓ\,//\,ΖΗ$ , ως κάθετες στην $ΑΕ$ , οπότε από το θεώρημα του Θαλή έχουμε

$$\frac{ΔΓ}{ΖΗ}=\frac{ΓΕ}{ΗΕ}\Leftrightarrow\frac{8}{ΖΗ}=\frac{6}{13}\Leftrightarrow 6ΖΗ=104\Leftrightarrow ΖΗ=\frac{52}{3}$$

## 23 Θέμα 4 - 17348

**α.** Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΕ$ έχουμε

$ΑΕ^2=ΑΒ^2+ΒΕ^2=6^2+2^2=40$ , οπότε $ΑΕ=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

**β.** Τα τρίγωνα $ΑΒΕ$ και $ΔΖΑ$ έχουν:

- $\hat{Α}_1=\hat{Ε}_1$ ως εντός εναλλάξ
- $\hat{Β}=\hat{Ζ}=90^{\circ}$

Άρα τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΔΖΑ είναι όμοια.

Επομένως θα ισχύει $\dfrac{ΑΒ}{ΔΖ}=\dfrac{ΑΕ}{ΑΔ}=\dfrac{ΒΕ}{ΑΖ}$ , (1) .

**γ.** Είναι $ΑΒ=6$ , $ΒΕ=2$ και $ΑΕ=2\sqrt{10}$ , οπότε η (1) γίνεται $\dfrac{6}{ΔΖ}=\dfrac{2\sqrt{10}}{ΑΔ}=\dfrac{2}{ΑΖ}$ , (2) .

Είναι $ΔΖ=ΖΕ$ , οπότε $\dfrac{6}{ΔΖ}=\dfrac{2}{ΑΖ}\Leftrightarrow\dfrac{6}{ΖΕ}=\dfrac{2}{ΑΖ}\Leftrightarrow\dfrac{6}{ΖΕ}=\dfrac{2}{ΑΖ}=\dfrac{6+2}{ΖΕ+ΑΖ}=\dfrac{8}{ΑΕ}=\dfrac{8}{2\sqrt{10}}=\dfrac{4}{\sqrt{10}}$ , (3) .

Από τις (2) και (3) προκύπτει ότι

$$\frac{2\sqrt{10}}{ΑΔ}=\frac{4}{\sqrt{10}}\Leftrightarrow 4ΑΔ=2(\sqrt{10})^2\Leftrightarrow 4ΑΔ=20\Leftrightarrow ΑΔ=5$$

## 24 Θέμα 4 - 21149

**α. i.** Η γωνία $Β\hat{Γ}Α$ είναι εγγεγραμμένη και βαίνει σε ημικύκλιο, οπότε είναι ορθή. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι $Β\hat{Α}Γ=30^{\circ}$ , άρα

$$ΒΓ=\frac{ΑΒ}{2}\Leftrightarrow 2=\frac{2R}{2}\Leftrightarrow R=2$$

**ii.** Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΓ. Έχουμε διαδοχικά:

$$ΑΓ^2=ΑΒ^2-ΒΓ^2=4^2-2^2=16-4=12$$

Άρα $ΑΓ=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ .

**β.** • Είναι $A\hat{\Gamma}\Delta = 90^o$. Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο $A\Gamma\Delta$. Έχουμε

$$A\Delta^2 = A\Gamma^2 + \Delta\Gamma^2 = \left(\sqrt{12}\right)^2 + 6^2 = 12 + 36 = 48 = \sqrt{48}$$

Άρα $A\Delta = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$.

• Στο τρίγωνο $AB\Delta$ με $AB = 4$, $\Delta B = 8$, $A\Delta = \sqrt{48}$, έχουμε

$\Delta B^2 = 8^2 = 64$ και $AB^2 + A\Delta^2 = 4^2 + (4\sqrt{3})^2 = 16 + 48 = 64$.

Αφού $\Delta B^2 = AB^2 + A\Delta^2$, συμπεραίνουμε ότι $B\hat{A}\Delta = 90^o$, δηλαδή $\Delta A \perp OA$.
Επομένως, το τμήμα $\Delta A$ εφάπτεται του κύκλου στο σημείο $A$.

## 25 Θέμα 2 - 21067

**α.** Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο $AB\Gamma$. Έχουμε:

$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$.

Άρα $B\Gamma = \sqrt{169} = 13$.

**β. i.** Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο $\Delta B\Gamma$. Έχουμε:

$\Delta\Gamma^2 = B\Gamma^2 + B\Delta^2$ ή $B\Delta^2 = \Delta\Gamma^2 - B\Gamma^2 = 14^2 - 13^2 = 196 - 169 = 27$.

Άρα $B\Delta = \sqrt{27} = \sqrt{9 \cdot 3} = 3\sqrt{3}$.

**ii.** Η προβολή της $B\Delta$ στην $\Delta\Gamma$ είναι η $\Delta E$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Gamma B\Delta$ είναι:

$B\Delta^2 = \Delta E \cdot \Delta\Gamma \Leftrightarrow (3\sqrt{3})^2 = \Delta E \cdot 14 \Leftrightarrow 27 = 14\Delta E \Leftrightarrow \Delta E = \dfrac{27}{14}$.

## 26 Θέμα 2 - 16804

**α. i.** $\Theta\Gamma$ **ii.** $BH$ **iii.** $A\Gamma$, $B\Gamma$ **iv.** $AB$, $A\Gamma$

**v.** $A\Gamma^2 = AB^2 + B\Gamma^2 - 2 \cdot B\Gamma \cdot BH$

**vi.** $B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 - 2 \cdot A\Gamma \cdot A\Theta$

**β.** Το τμήμα $A\Theta$ είναι η προβολή της πλευράς $AB$ στην $A\Gamma$, οπότε εφαρμόζοντας Γενικευμένο Πυθαγόρειο για την πλευρά $B\Gamma$ έχουμε:

$$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 - 2 \cdot A\Gamma \cdot A\Theta \Leftrightarrow 25 = 16 + 36 - 2 \cdot 6 \cdot A\Theta \Leftrightarrow 12A\Theta = 27 \Leftrightarrow A\Theta = \frac{27}{12} \Leftrightarrow A\Theta = \frac{9}{4}$$

## 27 Θέμα 2 - 17354

**α. i.** $KE$ **ii.** $KZ$ **iii.** $\Delta Z$, $\Delta E$ **iv.** $EZ$, $\Delta E$

**v.** $\Delta Z^2 = \Delta E^2 + EZ^2 + 2 \cdot EZ \cdot KE$

**vi.** $EZ^2 = \Delta E^2 + \Delta Z^2 - 2 \cdot \Delta E \cdot \Delta I$

**β.** Το τμήμα $\Delta I$ είναι η προβολή της πλευράς $\Delta Z$ στην πλευρά $\Delta E$, οπότε εφαρμόζοντας Γενικευμένο Πυθαγόρειο για την πλευρά $EZ$ έχουμε:

$$EZ^2 = \Delta E^2 + \Delta Z^2 - 2 \cdot \Delta E \cdot \Delta I \Leftrightarrow 16 = 4 + 25 - 2 \cdot 2 \cdot \Delta I \Leftrightarrow 4\Delta I = 13 \Leftrightarrow \Delta I = \frac{13}{4}$$

## 28 Θέμα 2 - 21302

**α.** Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο $AB\Delta$ έχουμε

$A\Delta^2 = AB^2 - B\Delta^2 = 5^2 - 3^2 = 16$, οπότε $A\Delta = 4$.

**β.** Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ έχουμε:

$A\Gamma^2 = A\Delta^2 + \Delta\Gamma^2 = 4^2 + 8^2 = 16 + 64 = 80$, οπότε $A\Gamma = \sqrt{80} = \sqrt{16 \cdot 5} = 4\sqrt{5}$.

**γ.** Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε

$AB = 5$, $B\Gamma = B\Delta + \Delta\Gamma = 3 + 8 = 11$ και $A\Gamma = \sqrt{80}$.

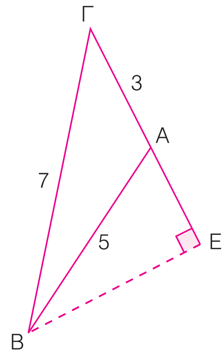
Είναι $ΒΓ^2 = 121$ και $ΑΓ^2 = 80$, οπότε η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου $ΑΒΓ$ είναι η $ΒΓ$, αφού $ΒΓ^2 > ΑΓ^2$.

Άρα η $\hat{Α}$ είναι η μεγαλύτερη γωνία του τριγώνου $ΑΒΓ$, αφού βρίσκεται απέναντι από την μεγαλύτερη πλευρά του $ΒΓ$.

Είναι $ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = 25 + 80 = 105$ και $ΒΓ^2 = 121$, οπότε $ΒΓ^2 > ΑΒ^2 + ΑΓ^2$, άρα $\hat{Α} > 90^\circ$ και επομένως το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι αμβλυγώνιο.

## 29 Θέμα 2 - 14549

**α.** Παρατηρούμε ότι $α^2 = 7^2 = 49$ και $β^2 + γ^2 = 3^2 + 5^2 = 9 + 25 = 34$.




Δηλαδή ισχύει ότι $α^2 > β^2 + γ^2$, οπότε το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι αμβλυγώνιο με αμβλεία τη γωνία που είναι απέναντι από την πλευρά $α$, δηλαδή αμβλεία είναι η γωνία $Α$.

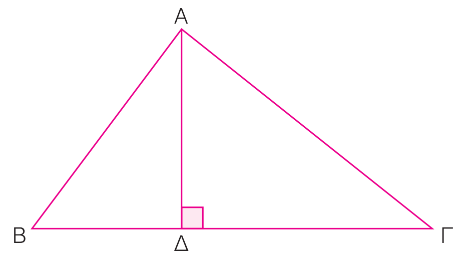
**β.** Από τη γενίκευση του Πυθαγορείου θεωρήματος για την πλευρά που βρίσκεται απέναντι από αμβλεία γωνία $\hat{Α}$ έχουμε:

$$α^2 = β^2 + γ^2 + 2 \cdot β \cdot ΑΕ \Leftrightarrow 7^2 = 3^2 + 5^2 + 2 \cdot 3 \cdot ΑΕ \Leftrightarrow 49 = 34 + 6 \cdot ΑΕ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 49 - 34 = 6 \cdot ΑΕ \Leftrightarrow 15 = 6 \cdot ΑΕ \Leftrightarrow ΑΕ = \frac{15}{6} \Leftrightarrow ΑΕ = \frac{5}{2}$$

## 30 Θέμα 2 - 16080

**α.** Φέρουμε το ύψος $ΒΔ$. Η προβολή της $ΑΒ$ στην $ΑΓ$ είναι η $ΑΔ$.




Εφαρμόζοντας το γενικευμένο Πυθαγόρειο θεώρημα για την οξεία γωνία Α, έχουμε:

$$ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2 - 2ΑΓ \cdot ΑΔ \Leftrightarrow \sqrt{41}^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 8 \cdot ΑΔ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16ΑΔ = 25 + 64 - 41 = 48 \Leftrightarrow ΑΔ = 3$$

**β.** Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΔ$ έχουμε:

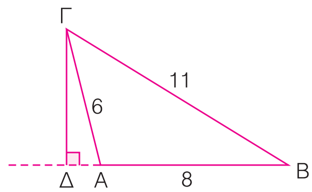
$ΑΒ^2 = ΒΔ^2 + ΑΔ^2 \Leftrightarrow 5^2 = ΒΔ^2 + 3^2 \Leftrightarrow ΒΔ^2 = 25 - 9 \Leftrightarrow ΒΔ^2 = 16$, οπότε $ΒΔ = 4$.

## 31 Θέμα 2 - 16101

**α.**
- $ΒΓ^2 = 11^2 = 121$
- $ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100$

Αφού είναι $ΒΓ^2 > ΑΒ^2 + ΑΓ^2$, συμπεραίνουμε ότι $\hat{Α} > 1\llcorner$, οπότε το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο.

**β.** Έστω $Δ$ η προβολή της κορυφής $Γ$ πάνω στην ευθεία $ΑΒ$. Τότε, η προβολή της πλευράς $ΑΓ$ πάνω στην $ΑΒ$ είναι το τμήμα $ΑΔ$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα:




Αφού η γωνία $\hat{Α}$ είναι αμβλεία, σύμφωνα με το γενικευμένο Πυθαγόρειο Θεώρημα θα είναι:

$$ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2 + 2ΑΒ \cdot ΑΔ \Leftrightarrow 121 = 64 + 36 + 16ΑΔ \Leftrightarrow 21 = 16ΑΔ \Leftrightarrow ΑΔ = \frac{21}{16}.$$

## 32 Θέμα 2 - 17343

**α.** Σύμφωνα με το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο $ΑΓΔ$ ισχύει

$$ΑΓ^2 = ΑΔ^2 + ΓΔ^2 - 2ΑΔ \cdot ΓΔ \cdot συν\hat{Δ} \Leftrightarrow ΑΓ^2 = 5^2 + 3^2 - 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot συν120^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ΑΓ^2 = 25 + 9 - 30 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow ΑΓ^2 = 49 \Leftrightarrow ΑΓ = 7$$

**β.** Σύμφωνα με το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο $ΑΒΓ$ ισχύει

$$ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2 - 2ΑΒ \cdot ΑΓ \cdot συνω \Leftrightarrow 8^2 = 5^2 + 7^2 - 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot συνω \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 64 = 74 - 70συνω \Leftrightarrow 70συνω = 10 \Leftrightarrow συνω = \frac{10}{70} = \frac{1}{7}.$$

## 33 Θέμα 2 - 18558

**α.** Φέροντας το τμήμα $ΓΖ$, το τρίγωνο $ΔΓΕ$ είναι ορθογώνιο με $ΔΓ = 5$ και $ΓΕ = 12$.

Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε:

$ΔΕ^2 = ΔΓ^2 + ΓΕ^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$, άρα $ΔΕ = 13$.

**β.** Το χωρίο αποτελείται από το ορθογώνιο τρίγωνο $ΔΓΕ$, το ορθογώνιο $ΒΖΚΑ$ και το τετράγωνο $ΚΗΘΙ$.

Είναι:
- $(ΔΓΕ) = \frac{1}{2} \cdot ΓΕ \cdot ΔΓ = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 5 = 30$
- $(ΒΖΚΑ) = ΒΖ \cdot ΑΒ = 7 \cdot 4 = 28$
- $(ΚΗΘΙ) = 3^2 = 9$

Άρα $(ΑΒΓΔΕΖΗΘΙ) = (ΔΓΕ) + (ΒΖΚΑ) + (ΚΗΘΙ) = 30 + 28 + 9 = 67$.

## 34 Θέμα 2 - 16102

**α.** Τα τρίγωνα ΔΟΖ και ΒΟΕ είναι ίσα διότι έχουν:
- $ΔΟ = ΒΟ$ (το Ο είναι μέσο της ΔΒ)
- $Δ\hat{Ο}Ζ = Β\hat{Ο}Ε$ (ως κατακορυφήν)
- $Ζ\hat{Δ}Ο = Ε\hat{Β}Ο$ ως εντός εναλλάξ

Επομένως, τα τρίγωνα $ΔΟΖ$ και $ΒΟΕ$ θα είναι ισοδύναμα, δηλαδή $(ΔΟΖ) = (ΒΟΕ)$.

**β.** Τα τρίγωνα $ΑΔΒ$ και $ΓΒΔ$ είναι ίσα, οπότε $(ΑΔΒ) = (ΓΒΔ)$.

Από το σχήμα έχουμε ότι $(ΑΔΒ) = (ΔΟΕΑ) + (ΒΟΕ)$ και $(ΓΒΔ) = (ΒΓΖΟ) + (ΔΟΖ)$.

Οπότε, είναι $(ΔΟΕΑ) + (ΒΟΕ) = (ΒΓΖΟ) + (ΔΟΖ) \Leftrightarrow (ΔΟΕΑ) = (ΒΓΖΟ)$.

## 35 Θέμα 2 - 21101

**α.** Έχουμε $ΒΓ^2 = (\sqrt{3})^2 = 3$ και $ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = (\sqrt{2})^2 + 1^2 = 2 + 1 = 3$.

Άρα $ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2$, οπότε η γωνία που βρίσκεται απέναντι από την πλευρά $ΒΓ$ είναι ορθή, δηλαδή $\hat{Α} = 90^o$.

**β.** $(ΑΒΓ) = \frac{1}{2} ΑΒ \cdot ΑΓ = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

**γ.** Είναι $ΒΓ \cdot ΑΔ = ΑΒ \cdot ΑΓ \Leftrightarrow \sqrt{3}ΑΔ = \sqrt{2} \cdot 1 \Leftrightarrow ΑΔ = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow ΑΔ = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

## 36 Θέμα 2 - 18550

**α.** Είναι $2ΑΒ + 2ΒΓ = 36 \Leftrightarrow 2(x + y) + 2z = 36 \Leftrightarrow x + y + z = 18$

Τα μήκη των τμημάτων $x$, $y$, $z$ είναι ανάλογα προς τους αριθμούς $2$, $4$, $3$ αντίστοιχα, οπότε

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3} = \frac{x + y + z}{2 + 4 + 3} = \frac{18}{9} = 2$$

Άρα $x = 2 \cdot 2 = 4$, $y = 4 \cdot 2 = 8$ και $z = 3 \cdot 2 = 6$.

**β. i.** Το τρίγωνο $ΓΕΔ$ έχει βάση $ΔΓ = ΑΒ = 4 + 8 = 12$ και το ύψος όσο το $ΓΒ = 6$,

άρα $(ΓΕΔ) = \frac{12 \cdot 6}{2} = 6 \cdot 6 = 36$

**ii.**
- $(ΑΒΓΔ) = 12 \cdot 6 = 72$
- $(ΓΕΔ) = 36$

Οπότε $\frac{(ΓΕΔ)}{(ΑΒΓΔ)} = \frac{36}{72} = \frac{1}{2}$.

## 37 Θέμα 2 - 18559

**α.** Είναι $ΓΕ = ΒΕ = 5$, αφού η $ΑΕ$ είναι διάμεσος.

Είναι $ΓΕ^2 = 5^2 = 25$, $ΑΓ^2 + ΑΕ^2 = 4^2 + 3^2 = 25$, οπότε $ΓΕ^2 = ΑΓ^2 + ΑΕ^2$.

Άρα το τρίγωνο $ΑΕΓ$ είναι ορθογώνιο με $Ε\hat{Α}Γ = 90^o$, οπότε $ΑΕ \perp ΑΓ$.

**β. i.** Η διάμεσος ενός τριγώνου χωρίζει το τρίγωνο σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα, άρα $(ΑΒΕ) = (ΑΓΕ)$.

**ii.** Το $ΑΓΕ$ είναι ορθογώνιο τρίγωνο, άρα

$$(ΑΓΕ) = \frac{1}{2} \cdot ΑΕ \cdot ΑΓ = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$$

Από το **β.i.** ερώτημα έχουμε ότι $(ΑΒΕ) = (ΑΓΕ)$, άρα

$$(ΑΒΓ) = 2(ΑΓΕ) = 2 \cdot 6 = 12$$

## 38 Θέμα 2 - 16817

**α.** • $(ΒΔΕ) = \frac{1}{2} \cdot ΔΕ \cdot ΒΓ = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot α = α$

• $(ΑΒΓΔ) = α^2$

• $(ΒΕΔ) = \frac{(ΑΒΓΔ)}{8} \Leftrightarrow α = \frac{α^2}{8} \Leftrightarrow 8α = α^2 \Leftrightarrow α(α - 8) = 0 \Leftrightarrow α = 8$ ή $α = 0$, που απορρίπτεται.

**β.** Είναι $ΓΕ = ΓΔ - ΔΕ = 8 - 2 = 6$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΒΓΕ$ από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$ΒΕ^2 = ΒΓ^2 + ΓΕ^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100$, οπότε $ΒΕ = 10$.

## 39 Θέμα 2 - 21823

**α.** Το $ΑΒΕΔ$ είναι ορθογώνιο (έχει τρεις γωνίες ορθές), οπότε $ΔΕ = ΑΒ = 5$. Άρα $ΕΓ = ΔΓ - ΔΕ = 8 - 5 = 3$.

**β.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΒΕΓ$ από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$ΒΓ^2 = ΒΕ^2 + ΕΓ^2 = 4^2 + 3^2 = 25$, οπότε $ΒΓ = \sqrt{25} = 5$.

**γ.** • $(ΒΔΓ) = \frac{1}{2} ΔΓ \cdot ΒΕ = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4 = 16$

• $(ΑΒΓΔ) = \frac{ΑΒ + ΔΓ}{2} \cdot ΑΔ = \frac{5 + 8}{2} \cdot 4 = 26$

Άρα $\frac{(ΒΔΓ)}{(ΑΒΓΔ)} = \frac{16}{26} = \frac{8}{13}$.

## 40 Θέμα 2 - 18560

**α.** Είναι $ΑΒ = ΓΔ = 14$ ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.

Έχουμε $ΒΕ = ΑΒ - ΑΕ = 14 - 9 = 5$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΓΕΒ$ εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα και έχουμε:

$ΓΕ^2 = ΓΒ^2 - ΒΕ^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144$, άρα $ΓΕ = 12$.

**β. i.** $(ΑΒΓΔ) = ΑΒ \cdot ΓΕ = 14 \cdot 12 = 168$.

**ii.** $(ΑΕΓΔ) = \frac{ΑΕ + ΓΔ}{2} \cdot ΓΕ = \frac{9 + 14}{2} \cdot 12 = 23 \cdot 6 = 138$.

## 41 Θέμα 4 - 16135

**α. i.** Είναι $ΔΒ = 2$ οπότε $ΔΓ = ΒΓ - ΔΒ = 10 - 2 = 8$.

Έχουμε $ΑΔ^2 = ΔΒ \cdot ΔΓ \Leftrightarrow ΑΔ^2 = 2 \cdot 8 \Leftrightarrow ΑΔ^2 = 16 \Leftrightarrow ΑΔ = 4$.

**ii.** $(ΑΒΓ) = \frac{ΒΓ \cdot ΑΔ}{2} = \frac{10 \cdot 4}{2} = 20$.

**β. i.** Καθώς το σημείο $Α$ κινείται πάνω στο ημικύκλιο με διάμετρο την $ΒΓ$, η βάση του τριγώνου $ΒΓ$ παραμένει σταθερή και ίση με $10$, ενώ το αντίστοιχο ύψος $ΑΔ$ μεταβάλλεται. Επομένως μεταβάλλεται και το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΒΓ$, το οποίο θα είναι $(ΑΒΓ) = \frac{ΒΓ \cdot ΑΔ}{2} = \frac{10 \cdot ΑΔ}{2} = 5ΑΔ$.

**ii.** Έστω $Ο$ το κέντρο του κύκλου με διάμετρο τη $ΒΓ$.

- Το $Α$ ανήκει στον κύκλο με κέντρο $Ο$ και ακτίνα $\frac{ΒΓ}{2} = 5$. Επομένως $ΟΑ = 5$ (1).
- Το $Δ$ είναι η προβολή του $Α$ στη $ΒΓ$ και το $Ο$ σημείο της $ΒΓ$. Επομένως $ΑΔ \le ΟΑ$ (2)
- $(ΑΒΓ) = 5ΑΔ$ (από το **β.i.**)

  $\le 5ΑΟ$ (από την (2))

  $= 25$ (από την (1))

Επομένως $(ΑΒΓ) \le 25$, οπότε ο ισχυρισμός είναι αληθής.

## 42 Θέμα 4 - 21124

**α. i.** Είναι $α^2 = 40^2 = 1600$ και $β^2 + γ^2 = 25^2 + 25^2 = 1250$, άρα $α^2 > β^2 + γ^2$ οπότε $\hat{Α} > 90^\circ$.

Επομένως το τρίγωνο $ΑΒΓ$ θα είναι αμβλυγώνιο.

**ii.** • Το ύψος $υ_α = ΑΔ$ από την κορυφή $Α$ του ισοσκελούς τριγώνου $ΑΒΓ$ είναι και διάμεσος, οπότε $ΒΔ = \frac{α}{2} = \frac{40}{2} = 20$.

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο $ΑΔΒ$, έχουμε

$υ_α^2 = γ^2 - ΒΔ^2 = 25^2 - 20^2 = 225$, οπότε $υ_α = 15$.

Το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΒΓ$ είναι $Ε = \frac{1}{2} \cdot α \cdot υ_α = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 15 = 300$.

- $Ε = \frac{1}{2} β \cdot υ_β$, οπότε $υ_β = \frac{2Ε}{β} = \frac{600}{25} = 24$ και $Ε = \frac{1}{2} γ \cdot υ_γ$, οπότε $υ_γ = \frac{2Ε}{γ} = \frac{600}{25} = 24$.

**iii.** Επειδή $υ_β = υ_γ = 24 > υ_α = 15$ οι μεγαλύτερες γωνίες του ισοσκελούς τριγώνου με ίσες πλευρές $υ_β$, $υ_γ$ είναι οι προσκείμενες γωνίες στην βάση $υ_α$. Αυτές υποχρεωτικά είναι οξείες, αφού ένα τρίγωνο δεν μπορεί να έχει δύο αμβλείες γωνίες. Επίσης και η γωνία της κορυφής θα είναι οξεία. Άρα το τρίγωνο με πλευρές $υ_α$, $υ_β$, $υ_γ$ είναι οξυγώνιο.

**β.** Έστω $α$, $β$, $γ$ οι πλευρές οποιουδήποτε ισοσκελούς και αμβλυγωνίου τριγώνου $ΑΒΓ$ με $β = γ$ και $υ_α$, $υ_β$, $υ_γ$ τα αντίστοιχα ύψη. Επειδή το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι αμβλυγώνιο, η αμβλεία γωνία θα είναι η γωνία της κορυφής $\hat{Α}$.

Είναι $α^2 > β^2 + γ^2 \Leftrightarrow α^2 > 2β^2 \Leftrightarrow \frac{α}{β} > \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{α}{β} > 1$, (1).

Είναι $Ε = \frac{1}{2} α \cdot υ_α = \frac{1}{2} β \cdot υ_β = \frac{1}{2} γ \cdot υ_γ$, άρα $\frac{1}{2} β \cdot υ_β = \frac{1}{2} γ \cdot υ_γ$ και επειδή $β = γ$ προκύπτει $υ_β = υ_γ$.

Επομένως το τρίγωνο που κατασκευάζεται με πλευρές ίσες με τα ύψη $υ_α$, $υ_β$, $υ_γ$ του τριγώνου $ΑΒΓ$, είναι ισοσκελές.

Είναι $\frac{1}{2} α \cdot υ_α = \frac{1}{2} β \cdot υ_β \Leftrightarrow \frac{α}{β} = \frac{υ_β}{υ_α}$ και από την (1) έχουμε $\frac{υ_β}{υ_α} > 1 \Leftrightarrow υ_β > υ_α$ άρα $υ_β = υ_γ > υ_α$.

Άρα οι μεγαλύτερες γωνίες του ισοσκελούς τριγώνου με ίσες πλευρές $υ_β$, $υ_γ$ είναι οι προσκείμενες γωνίες στην βάση $υ_α$. Αυτές υποχρεωτικά είναι οξείες, αφού ένα τρίγωνο δεν μπορεί να έχει δύο αμβλείες γωνίες. Επίσης και η γωνία της κορυφής θα είναι οξεία. Άρα το τρίγωνο με πλευρές $υ_α$, $υ_β$, $υ_γ$ είναι οξυγώνιο.

## 43 Θέμα 4 - 16807

**α. i.** Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΓΕ είναι ορθογώνια με καθεμιά από τις κάθετες πλευρές τους 12.
Οπότε είναι ίσα και ισχύει $ΓΕ = ΔΕ$. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα ισχύει
$ΓΕ^2 = ΔΕ^2 = 12^2 + 12^2 = 2 \cdot 12^2$.

Οπότε $ΓΕ = ΔΕ = 12\sqrt{2}$.

- Η περίμετρος του τριγώνου ΓΕΔ είναι $ΓΔ + ΔΕ + ΕΓ = 24 + 12\sqrt{2} + 12\sqrt{2} = 24 + 24\sqrt{2}$.
- Το τρίγωνο ΓΕΔ έχει βάση τη $ΔΓ = ΑΒ = 24$ και το ύψος όσο το $ΒΓ = 12$.

Άρα $(ΓΕΔ) = \dfrac{24 \cdot 12}{2} = 12 \cdot 12 = 144$.

**ii.** Αν το σημείο Ε ταυτιστεί με την κορυφή Α του ορθογωνίου τότε το τρίγωνο ΓΕΔ ταυτίζεται με το τρίγωνο ΓΑΔ.
Για την πλευρά ΓΑ που είναι υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ έχουμε
$ΓΑ^2 = ΑΒ^2 + ΒΓ^2 = 24^2 + 12^2 = 2^2 \cdot 12^2 + 12^2 = 5 \cdot 12^2$, οπότε $ΓΑ = 12\sqrt{5}$.

Η περίμετρος του τριγώνου είναι $ΓΑ + ΑΔ + ΔΓ = 12\sqrt{5} + 12 + 24 = 36 + 12\sqrt{5}$.

- Το εμβαδόν του τριγώνου είναι $\dfrac{ΔΓ \cdot ΑΔ}{2} = \dfrac{24 \cdot 12}{2} = 12 \cdot 12 = 144$.

**β. i.** Αν το σημείο Ε κινηθεί πάνω στη ευθεία ΑΒ που είναι παράλληλη στην πλευρά ΔΓ τότε η πλευρά ΔΓ παραμένει σταθερή αλλά οι δυο άλλες πλευρές του τριγώνου ΓΕΔ μεταβάλλονται. Αν το σημείο Ε κινείται στην προέκταση της ΑΒ προς το Β, απομακρυνόμενο από το σημείο Β, τα πλάγια τμήματα ΓΕ και ΔΕ συνεχώς μεγαλώνουν, αφού το ίχνος τους Ε απέχει ολοένα και περισσότερο από τα ίχνη Β και Α των κάθετων τμημάτων ΓΒ και ΔΑ αντίστοιχα. Οπότε η περίμετρος του τριγώνου ΓΕΔ μεταβάλλεται και συνεχώς αυξάνεται.

**ii.** Για το εμβαδόν του τριγώνου ΓΕΔ, βάση είναι η σταθερή πλευρά του ΔΓ, και ύψος όσο το ΒΓ. Άρα το εμβαδόν του τριγώνου ΓΕΔ είναι $\dfrac{24 \cdot 12}{2} = 12 \cdot 12 = 144$.

Το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι: $(ΑΒΓΔ) = 24 \cdot 12 = 288$.

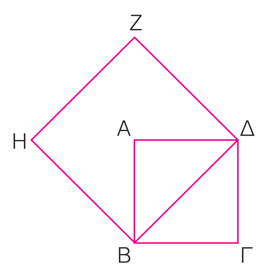
Άρα $(ΓΕΔ) = 144 = \dfrac{288}{2} = \dfrac{(ΑΒΓΔ)}{2}$.

Άρα το εμβαδόν του τριγώνου μένει σταθερό και ίσο με το μισό του εμβαδού του ορθογωνίου.

## 44 Θέμα 4 - 18562

**α.** Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε:
$ΒΔ^2 = ΑΒ^2 + ΑΔ^2 \Leftrightarrow ΒΔ^2 = α^2 + α^2 \Leftrightarrow ΒΔ^2 = 2α^2$, οπότε $ΒΔ = α\sqrt{2}$.

Για το εμβαδόν του ΑΒΓΔ, έχουμε $(ΑΒΓΔ) = α^2$.




**β. i.** Τα τμήματα ΔΑ και ΒΑ είναι κάθετα μεταξύ τους ως πλευρές του αρχικού τετραγώνου ΑΒΓΔ.

Είναι $Β\hat{Δ}Α = 45^\circ$ αφού η διαγώνιος ΒΔ διχοτομεί τη γωνία $\hat{Δ}$ του τετραγώνου.

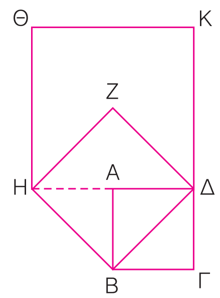
Επειδή $Β\hat{Δ}Ζ = 90^\circ$ είναι $Α\hat{Δ}Ζ = 45^\circ$.

Οπότε το τμήμα ΔΑ διχοτομεί τη γωνία $\hat{Δ}$ του τετραγώνου, άρα το ΔΑ ανήκει στη διαγώνιο του τετραγώνου ΒΔΖΗ.

Ομοίως η ΒΑ διχοτομεί τη γωνία $\hat{Β}$ του τετραγώνου ΒΔΖΗ και το ΒΑ ανήκει στην άλλη διαγώνιό του.
Οι δύο διαγώνιες του τετραγώνου ΒΔΖΗ τέμνονται στο σημείο Α, δηλαδή το Α είναι το κέντρο του.

**ii.** Η πλευρά του τετραγώνου ΒΔΖΗ είναι ίση με $α\sqrt{2}$, οπότε $(ΒΔΖΗ) = (α\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow (ΒΔΖΗ) = 2α^2$.

Στο **α.** ερώτημα βρήκαμε ότι το εμβαδόν του ΑΒΓΔ είναι $α^2$, οπότε παρατηρούμε ότι $(ΒΔΖΗ) = 2(ΑΒΓΔ)$.




**γ.** Στο τετράγωνο $ΒΔΖΗ$ η πλευρά του ισούται με $α\sqrt{2}$ .

Επομένως η διαγώνιός του $ΔΗ$ , σύμφωνα με το **α.** ερώτημα, θα είναι ίση με $α\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2α$ .

Επομένως η πλευρά του τετραγώνου $ΔΗΘΚ$ είναι $2α$ , οπότε $(ΔΗΘΚ)=4α^2$.

Είναι $(ΔΗΘΚ)=2(ΒΔΖΗ)$ , όπως και $(ΒΔΖΗ)=2(ΑΒΓΔ)$.

Επομένως $(ΔΗΘΚ)=2(ΒΔΖΗ)=4(ΑΒΓΔ)$.

Δηλαδή, σχεδιάζοντας τετράγωνο με πλευρά τη διαγώνιο ενός τετραγώνου, το νέο τετράγωνο έχει διπλάσιο εμβαδόν από το προηγούμενό του.

Το αρχικό τετράγωνο $ΑΒΓΔ$ με πλευρά $α$ , έχει εμβαδόν $α^2$, το $ΒΔΖΗ$ έχει εμβαδόν $2α^2$ , το $ΔΗΘΚ$ έχει εμβαδόν $4α^2$.

Σχεδιάζοντας τετράγωνο με πλευρά τη διαγώνιο του $ΔΗΘΚ$ θα προκύψει τετράγωνο με εμβαδόν $8α^2$.

Επομένως για να σχεδιάσουμε τετράγωνο του οποίου το εμβαδόν του θα είναι $16$ φορές το εμβαδόν του αρχικού τετραγώνου $ΑΒΓΔ$ , θα πρέπει να κάνουμε τη διαδικασία αυτή συνολικά τέσσερις $(4)$ φορές. Δηλαδή, μετά το τετράγωνο $ΔΗΘΚ$ του σχήματος θα χρειαστεί να φτιάξουμε, όπως περιγράφηκε, δύο ακόμη τετράγωνα.

## 45 Θέμα 4 - 17349

**α.** Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΕ έχουμε ότι

$ΒΕ^2=ΑΒ^2+ΑΕ^2=3^2+(4-\sqrt{3})^2=28-8\sqrt{3}=4(7-2\sqrt{3})$ , οπότε $ΒΕ=2\sqrt{7-2\sqrt{3}}$ .

**β.** Είναι $ΔΕ=ΑΔ-ΑΕ=3-(4-\sqrt{3})=\sqrt{3}-1$ .

Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΔΕΗ$ έχουμε ότι

$$ΕΗ^2=ΔΕ^2+ΔΗ^2=(\sqrt{3}-1)^2+(\sqrt{3})^2=7-2\sqrt{3}=\sqrt{7-2\sqrt{3}}$$

Οπότε $ΒΕ=2ΕΗ \Leftrightarrow ΕΖ=2ΕΗ$ .

**γ.** Το εμβαδόν του ζητούμενου χωρίου είναι $(ΒΖΗ)-(ΒΓΗ)$.

Είναι:

- $(ΒΕΖ)=\dfrac{ΒΕ^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{4(7-2\sqrt{3})\sqrt{3}}{4}=7\sqrt{3}-6$
- Η $ΒΗ$ είναι διάμεσος του ισόπλευρου τριγώνου $ΒΕΖ$ , οπότε $(ΒΖΗ)=\dfrac{(ΒΕΖ)}{2}=\dfrac{7\sqrt{3}-6}{2}$ .
- $(ΒΓΗ)=\dfrac{ΒΓ\cdot ΓΗ}{2}=\dfrac{ΒΓ\cdot(ΓΔ-ΔΗ)}{2}=\dfrac{3(3-\sqrt{3})}{2}=\dfrac{9-3\sqrt{3}}{2}$

Άρα $(ΒΖΗ)-(ΒΓΗ)=\dfrac{7\sqrt{3}-6}{2}-\dfrac{9-3\sqrt{3}}{2}=\dfrac{10\sqrt{3}-15}{2}$ .

## 46 Θέμα 4 - 18173

**α.** Φέρουμε την $ΒΚ$. Επειδή $ΓΔ=2ΑΒ$ και $Κ$ μέσο της $ΓΔ$, θα έχουμε $ΑΒ=//ΔΚ$ , οπότε το $ΑΒΚΔ$ είναι παραλληλόγραμμο και $ΒΚ=//ΑΔ$ .

**i.** Φέρουμε την $ΒΕ$ κάθετη στην $ΓΔ$. Το $ΒΕ$ είναι ύψος από την κορυφή $Β$ του τριγώνου ΒΚΓ αλλά και του παραλληλογράμμου ΑΒΚΔ.

Είναι $(ΑΒΚΔ)=ΔΚ\cdot ΒΕ=ΚΓ\cdot ΒΕ$ και $(ΒΚΓ)=\dfrac{ΚΓ\cdot ΒΕ}{2}$.

Άρα $(ΒΚΓ)=\dfrac{(ΑΒΚΔ)}{2}$ .

**ii.** Φέρουμε το ύψος $ΜΘ$ του τριγώνου $ΒΜΚ$ που είναι και ύψος του παραλληλογράμμου $ΑΒΚΔ$.

Είναι $(ΑΒΚΔ)=ΒΚ\cdot ΜΘ$ και $(ΒΜΚ)=\dfrac{ΒΚ\cdot ΜΘ}{2}$ , οπότε $(ΒΜΚ)=\dfrac{(ΑΒΚΔ)}{2}$.

Από το **αi.** ερώτημα έχουμε ότι

$(ΒΚΓ)=\dfrac{(ΑΒΚΔ)}{2}$ . Επομένως $(ΒΚΓ)=(ΒΜΚ)$ .

**β.** Από το **α.ii.** προκύπτει $2(ΒΜΚ)=(ΑΒΚΔ)$ , (1) και $(ΒΜΚ)=(ΒΚΓ)$ , (2) .

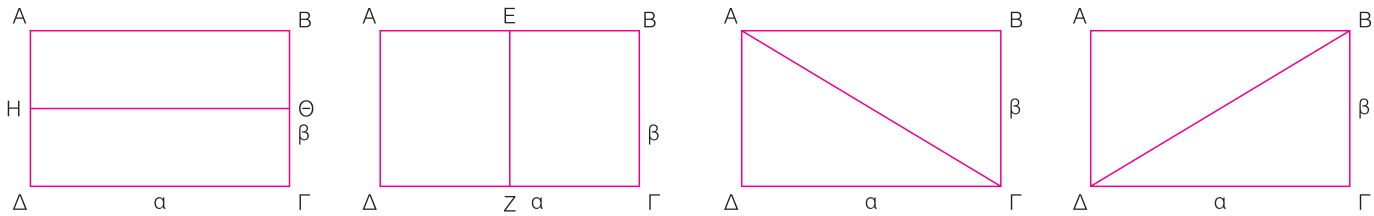
Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) , (2) έχουμε

$$3(ΒΜΚ)=(ΑΒΚΔ)+(ΒΚΓ)\Leftrightarrow 3(ΒΜΚ)=(ΑΒΓΔ)\Leftrightarrow \frac{(ΑΒΓΔ)}{(ΒΜΚ)}=3 .$$

Άρα, η πρόταση είναι σωστή. Δηλαδή ο λόγος των εμβαδών παραμένει σταθερός και ίσος με 3.

## 47 Θέμα 4 - 18564

**α.**




1η περίπτωση 2η περίπτωση 3η περίπτωση 4η περίπτωση

Κάποιοι τρόποι με τους οποίους μπορεί να χωριστεί ένα ορθογώνιο σε δύο ισεμβαδικά χωρία είναι είτε φέροντας τις μεσοπαράλληλες των απέναντι πλευρών του ορθογωνίου είτε τις διαγώνίους του. Οι δύο πρώτες περιπτώσεις όπως και η $3^η$ και $4^η$ θεωρούνται διαφορετικές αφού το χωρίο είναι κήπος και έχει σημασία ο προσανατολισμός του.

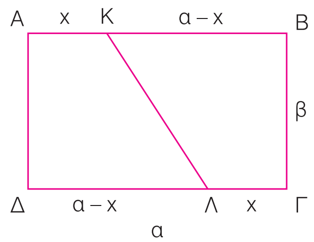
Αν $ΑΒ=ΓΔ=α$ και $ΑΔ=ΒΓ=β$ τότε $(ΑΒΓΔ)=α\cdotβ$ .

Στην $1^η$ περίπτωση έχουμε $(ΑΒΘΗ)=(ΗΘΓΔ)=α\cdot\dfrac{β}{2}=\dfrac{(ΑΒΓΔ)}{2}$ .

Στην $2^η$ περίπτωση έχουμε $(ΑΕΖΔ)=(ΕΒΓΖ)=\dfrac{α}{2}\cdotβ=\dfrac{(ΑΒΓΔ)}{2}$ .

Στην $3^η$ και $4^η$ περίπτωση τα τρίγωνα που δημιουργούνται από κάθε διαγώνιο γνωρίζουμε ότι είναι ίσα, άρα και ισοδύναμα με $(ΑΒΓ)=(ΑΔΓ)=(ΑΒΔ)=(ΒΓΔ)=\dfrac{1}{2}α\cdotβ=\dfrac{(ΑΒΓΔ)}{2}$

Ένας άλλος τρόπος που μπορεί επίσης να χωριστεί το ορθογώνιο σε δύο ισεμβαδικά χωρία είναι ο εξής:




Θεωρούμε ένα σημείο Κ στην πλευρά ΑΒ και ένα σημείο Λ στην απέναντι πλευρά ΓΔ τέτοια ώστε $ΑΚ=ΓΛ$ .

Αν $ΑΚ=ΓΛ=x$ , τότε $ΚΒ=ΛΔ=α-x$ . Τα δύο τραπέζια ΑΚΛΔ και ΓΛΚΒ έχουν ίσες τις βάσεις τους και το ύψος τους είναι η διάσταση ΑΔ του ορθογωνίου.

Οπότε $(ΑΚΛΔ)=(ΓΛΚΒ)=\dfrac{x+α-x}{2}\cdotβ=\dfrac{α}{2}\cdotβ=\dfrac{(ΑΒΓΔ)}{2}$ .

**β. i.** Έστω ότι το εσωτερικό σημείο μιας πλευράς του ορθογωνίου είναι το σημείο Ι , τότε οι απέναντι κορυφές είναι οι Γ και Δ. Οπότε σχηματίζεται το τρίγωνο ΙΔΓ που η πλευρά του ΔΓ είναι το μήκος α του ορθογωνίου και το ύψος προς αυτή είναι η απόσταση του Ι από τη ΔΓ , δηλαδή η άλλη διάσταση του ορθογωνίου που ισούται με β.

Άρα $(ΙΔΓ)=\dfrac{1}{2}α\cdotβ=\dfrac{(ΑΒΓΔ)}{2}$ .

**ii.** Έστω ότι η θέση του σημείου Ι μεταβάλλεται και μπορεί να είναι οποιοδήποτε εσωτερικό σημείο της πλευράς ΑΒ. Σε κάθε τέτοια μετακίνηση του σημείου Ι , το τρίγωνο που σχηματίζεται έχει εμβαδό το μισό του αρχικού ορθογωνίου όπως αποδείχθηκε στο **β.i.** ερώτημα. Και οι θέσεις του Ι είναι τα άπειρα εσωτερικά σημεία της πλευράς ΑΒ.

## 48 Θέμα 4 - 18565

**α. i.** Οι ακτίνες $ΟΑ$ και $ΚΒ$ είναι κάθετες στο εφαπτόμενο τμήμα $ΑΒ$ στα σημεία $Α$ και $Β$.

Είναι $ΚΕ//ΑΒ$ και $ΑΒ \perp ΟΑ$, οπότε $ΚΕ \perp ΟΑ$.

Άρα το τετράπλευρο $ΑΒΚΕ$ έχει $3$ ορθές γωνίες, οπότε είναι ορθογώνιο.

Επομένως $ΑΕ = ΚΒ = 2$ και $ΟΕ = ΟΑ - ΕΑ = 7 - 2 = 5$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΟΕΚ$ είναι $ΟΚ = ΟΓ + ΓΔ + ΔΚ = 7 + 4 + 2 = 13$.

Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε:

$ΚΕ^2 = ΟΚ^2 - ΟΕ^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144$, άρα $ΚΕ = 12$. Άρα $ΑΒ = ΚΕ = 12$.

**ii.** Στο τετράπλευρο $ΑΒΚΟ$ είναι $ΟΑ \perp ΑΒ$ και $ΚΒ \perp ΑΒ$, άρα $ΟΑ//ΚΒ$. Επίσης $ΟΑ = 7 \neq 2 = ΚΒ$, άρα οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες και άνισες, οπότε το $ΑΒΚΟ$ είναι τραπέζιο.

Άρα $(ΑΒΚΟ) = \dfrac{ΚΒ + ΟΑ}{2} \cdot ΑΒ = \dfrac{2+7}{2} \cdot 12 = 54$

**β.** $(ΑΒΚΕ) = ΑΒ \cdot ΚΒ \Leftrightarrow 4\sqrt{14} = ΑΒ \cdot 2 \Leftrightarrow ΑΒ = 2\sqrt{14}$.

Από το **α.** ερώτημα $ΑΒ = ΚΕ$, οπότε $ΚΕ = 2\sqrt{14}$ και από το Π. Θ. στο τρίγωνο $ΟΚΕ$ είναι:

$ΟΚ^2 = ΟΕ^2 + ΚΕ^2 = 5^2 + (2\sqrt{14})^2 = 25 + 56 = 81$, άρα $ΟΚ = 9$.

Είναι $ΟΚ = ΟΓ + ΓΔ + ΔΚ \Leftrightarrow 9 = 7 + ΓΔ + 2 \Leftrightarrow ΓΔ = 0$.

Δηλαδή η διάκεντρος $ΟΚ$ των δύο κύκλων ισούται με το άθροισμα των ακτινών τους. Άρα οι κύκλοι θα εφάπτονται εξωτερικά.

## 49 Θέμα 4 - 18566

**α.** Το τετράπλευρο $ΒΓΗΖ$ έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

Επιπλέον οι διαδοχικές πλευρές του $ΒΓ$ και $ΒΖ$ είναι ίσες από την κατασκευή, οπότε το $ΒΓΗΖ$ είναι ρόμβος με πλευρά ίση με την υποτείνουσα $ΒΓ$ του ορθογωνίου τριγώνου $ΑΒΓ$. Άρα η περίμετρος του ρόμβου είναι ίση με $4 \cdot ΒΓ$.

Το τετράγωνο $ΒΓΔΕ$ έχει πλευρά ίση με την υποτείνουσα $ΒΓ$ του τριγώνου, άρα η περίμετρός του είναι ίση με $4 \cdot ΒΓ$.

Δηλαδή ο ρόμβος και το τετράγωνο έχουν ίσες περιμέτρους.

**β.** Είναι $(ΒΓΔΕ) = ΒΓ^2$ και $(ΒΓΗΖ) = ΒΖ \cdot ΓΑ$.

Είναι $ΑΓ < ΒΓ \Leftrightarrow ΑΓ \cdot ΒΓ < ΒΓ^2 \Leftrightarrow (ΒΓΗΖ) < (ΒΓΔΕ)$, οπότε δεν γίνεται ποτέ τα δύο σχήματα να είναι ισεμβαδικά. Άρα ο ισχυρισμός $2$ είναι σωστός.

## 50 Θέμα 2 - 21299

**α.** $(ΑΒΓ) = \dfrac{1}{2} \cdot ΑΒ \cdot ΑΓ \cdot ημφ = \dfrac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \dfrac{2}{5} = 5$.

**β.** Είναι $(ΑΒΓ) = \dfrac{1}{2} \cdot ΑΓ \cdot ΒΗ = \dfrac{1}{2} \cdot 5 \cdot ΒΗ = \dfrac{5}{2} \cdot ΒΗ$ και από το ερώτημα **α.** έχουμε ότι $(ΑΒΓ) = 5$.

Οπότε $\dfrac{5}{2} \cdot ΒΗ = 5 \Leftrightarrow ΒΗ = \dfrac{2}{5} \cdot 5 \Leftrightarrow ΒΗ = 2$.

## 51 Θέμα 2 - 15979

**α.** Στο τρίγωνο $ΑΒΓ$, από το νόμο των συνημιτόνων είναι:

$$ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2 - 2 \cdot ΑΒ \cdot ΑΓ \cdot συν120^\circ = 5^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot συν120^\circ = 25 + 25 - 50 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 75$$

οπότε $ΒΓ = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$.

**β.** Είναι $(ΑΒΓ) = \dfrac{1}{2} \cdot ΑΒ \cdot ΑΓ \cdot ημΑ = \dfrac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot ημ120^\circ = \dfrac{1}{2} \cdot 25 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{25\sqrt{3}}{4}$.

## 52 Θέμα 2 - 17346

**α.** Σύμφωνα με το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο $ΑΒΓ$ ισχύει

$ΑΓ^2 = ΑΒ^2 + ΒΓ^2 - 2ΑΒ \cdot ΒΓ \cdot συν\hat{Β} = 6^2 + 4^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4συν60^o = 36 + 16 - 48 \cdot \frac{1}{2} = 28$ , οπότε $ΑΓ = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

**β.** $ΑΒ^2 = 6^2 = 36$ και $ΑΓ^2 + ΒΓ^2 = (2\sqrt{7})^2 + 4^2 = 28 + 16 = 44$ , άρα $ΑΒ^2 < ΑΓ^2 + ΒΓ^2$ .

Επομένως $\hat{Γ} < 90^o$ και αφού είναι η μεγαλύτερη γωνία το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι οξυγώνιο.

**γ.** $(ΑΒΓ) = \frac{1}{2}ΑΒ \cdot ΒΓ \cdot ημ\hat{Β} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 \cdot ημ60^o = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$

## 53 Θέμα 2 - 17347

**α.** $(ΑΓΔ) = \frac{1}{2}ΑΔ \cdot ΑΓ \cdot ημ\hat{Α} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 10 \cdot ημ60^o = 30 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3}$ .

**β.** • $(ΑΔΕ) = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$

• $(ΑΓΔΕ) = (ΑΓΔ) + (ΑΔΕ) = 15\sqrt{3} + 9\sqrt{3} = 24\sqrt{3}$

## 54 Θέμα 2 - 21304

**α.** Τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΑΔΕ$ έχουν $\hat{Β} = \hat{Δ}$ και $\hat{Γ} = \hat{Ε}$ (εντός εκτός και επί τα αυτά), οπότε είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\frac{ΑΒ}{ΑΔ} = \frac{ΑΒ}{ΑΒ + ΒΔ} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$.

**β.** Αν $Π = 8,5$ η περίμετρος του $ΑΒΓ$ και $Π΄$ η περίμετρος του $ΑΔΕ$ , έχουμε

$\frac{Π}{Π΄} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow Π΄ = 3Π \Leftrightarrow Π΄ = 3 \cdot 8,5 \Leftrightarrow Π΄ = 25,5$ .

**γ.** Έχουμε $(ΑΔΕ) = 15$ και επειδή τα $ΑΒΓ$ , $ΑΔΕ$ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\frac{1}{3}$

$\frac{(ΑΒΓ)}{(ΑΔΕ)} = (\frac{1}{3})^2 \Leftrightarrow \frac{(ΑΒΓ)}{15} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow (ΑΒΓ) = \frac{5}{3}$.

## 55 Θέμα 2 - 21636

**α.** Είναι $ΒΓ^2 = 10^2 = 100$ και $ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$ .

Άρα $ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2$ , οπότε το τρίγωνο $ΑΒΓ$ , είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα τη $ΒΓ$ και ορθή γωνία την $\hat{Α}$ .

**β. i.** • Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΔ$ είναι $\hat{Α}_1 + \hat{Β} = 90^o$ .

• Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι $\hat{Γ} + \hat{Β} = 90^o$ .

Οπότε $\hat{Α}_1 + \hat{Β} = \hat{Γ} + \hat{Β} \Leftrightarrow \hat{Α}_1 = \hat{Γ}$ . Επομένως τα ορθογώνια τρίγωνα $ΑΒΔ$ , $ΑΓΔ$ είναι όμοια, με λόγο ομοιότητας $λ = \frac{ΑΒ}{ΑΓ} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ .

**ii.** Είναι $\frac{(ΑΒΔ)}{(ΑΓΔ)} = λ^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$ .

## 56 Θέμα 2 - 21120

**α. i.** Επειδή $ΔΕ // ΒΓ$ είναι $\frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{ΑΕ}{ΑΓ} = \frac{ΔΕ}{ΒΓ}$ , τα τρίγωνα $ΑΔΕ$ και $ΑΒΓ$ είναι όμοια. Ο λόγος ομοιότητάς τους είναι $λ = \frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**ii.** Αφού τα τρίγωνα $ΑΔΕ$, $ΑΒΓ$ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2}$, έχουμε

$\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)} = \lambda^2 = \frac{1}{2}$, οπότε $(ΑΔΕ) = \frac{1}{2}(ΑΒΓ)$.

**β.** Είναι $(ΑΒΓ) = 2$, οπότε από το ερώτημα **α.i.** προκύπτει $(ΑΔΕ) = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1$.

Άρα $(ΒΓΕΔ) = (ΑΒΓ) - (ΑΔΕ) = 2 - 1 = 1$.

## 57 Θέμα 2 - 16127

**α.** Το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΒΓ$ είναι

$$Ε = \frac{1}{2}ΒΓ\cdot ΑΔ = \frac{1}{2}\cdot 9\cdot 8 = 36$$

**β. i.** Ο λόγος ομοιότητας των ομοίων τριγώνων $ΑΒΓ$ και $Α΄Β΄Γ΄$ είναι

$$\lambda = \frac{ΒΓ}{Β΄Γ΄} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

**ii.** Έστω $Ε΄$ το εμβαδόν του τριγώνου $Α΄Β΄Γ΄$.

Έχουμε $\frac{Ε}{Ε΄} = \lambda^2 \Leftrightarrow \frac{36}{Ε΄} = (\frac{3}{2})^2 \Leftrightarrow \frac{4\cdot 9}{Ε΄} = \frac{9}{4} \Leftrightarrow \frac{4}{Ε΄} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow Ε΄ = 16$ .

## 58 Θέμα 2 - 15978

- $ΑΔ = \frac{1}{4}ΑΒ$, οπότε $ΒΔ = \frac{3}{4}ΑΒ$
- $ΒΕ = \frac{2}{3}ΒΓ$, άρα $ΓΕ = \frac{1}{3}ΒΓ$
- $ΓΖ = \frac{1}{2}ΑΓ$, επομένως $ΑΖ = \frac{1}{2}ΑΓ$

**α.** • Τα τρίγωνα $ΑΔΖ$ και $ΑΒΓ$ έχουν κοινή τη γωνία Α, οπότε

- $\frac{(ΑΔΖ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{ΑΔ\cdot ΑΖ}{ΑΒ\cdot ΑΓ} = \frac{\frac{1}{4}ΑΒ\cdot\frac{1}{2}ΑΓ}{ΑΒ\cdot ΑΓ} = \frac{1}{8}$, οπότε $(ΑΔΖ) = \frac{1}{8}(ΑΒΓ)$
- $\frac{(ΒΕΔ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{ΒΔ\cdot ΒΕ}{ΒΑ\cdot ΒΓ} = \frac{\frac{3}{4}ΑΒ\cdot\frac{2}{3}ΒΓ}{ΑΒ\cdot ΑΓ} = \frac{1}{2}$, οπότε $(ΒΕΔ) = \frac{1}{2}(ΑΒΓ)$
- $\frac{(ΓΕΖ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{ΓΖ\cdot ΓΕ}{ΓΑ\cdot ΓΒ} = \frac{\frac{1}{2}ΓΑ\cdot\frac{1}{3}ΒΓ}{ΓΑ\cdot ΓΒ} = \frac{1}{6}$, οπότε $(ΓΕΖ) = \frac{1}{6}(ΑΒΓ)$

**β.** $(ΔΕΖ) = (ΑΒΓ) - (ΑΔΖ) - (ΒΕΔ) - (ΓΕΖ) = (ΑΒΓ) - \frac{1}{8}(ΑΒΓ) - \frac{1}{2}(ΑΒΓ) - \frac{1}{6}(ΑΒΓ) = \frac{5}{24}(ΑΒΓ)$

## 59 Θέμα 2 - 21189

**α.** Τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΑΓΔ$ έχουν:

$ΑΓ$ είναι κοινή πλευρά, $ΑΒ = ΓΔ$ και $ΒΓ = ΑΔ$.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν ίσα εμβαδά, δηλαδή $(ΑΒΓ) = (ΑΓΔ)$.

Είναι $(ΑΒΓΔ) = (ΑΒΓ) + (ΑΓΔ) = (ΑΒΓ) + (ΑΒΓ) = 2(ΑΒΓ)$.

Επομένως $(ΑΒΓ) = (ΑΓΔ) = \frac{1}{2}\cdot(ΑΒΓΔ)$.

**β.** Αφού τα $M$, $N$ είναι τα μέσα των πλευρών $AB$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα, έχουμε

$MA = MB = \frac{AB}{2}$ και $BN = N\Gamma = \frac{B\Gamma}{2}$.

Τα τρίγωνα $BMN$ και $AB\Gamma$ έχουν τη γωνία $\hat{B}$ κοινή, οπότε

$$\frac{(BMN)}{(AB\Gamma)} = \frac{MB\cdot BN}{AB\cdot B\Gamma} = \frac{\frac{AB}{2}\cdot\frac{B\Gamma}{2}}{AB\cdot B\Gamma} = \frac{AB\cdot B\Gamma}{4\cdot AB\cdot B\Gamma} = \frac{1}{4}, \text{ δηλαδή } \frac{(BMN)}{(AB\Gamma)} = \frac{1}{4}.$$

**γ.** • Από το **β.** ερώτημα έχουμε

$\frac{(BMN)}{(AB\Gamma)} = \frac{1}{4}$ ή $(BMN) = \frac{1}{4}\cdot(AB\Gamma)$

• Από το **α.** ερώτημα έχουμε $(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\cdot(AB\Gamma\Delta)$.

Άρα $(BMN) = \frac{1}{4}\cdot(AB\Gamma) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot(AB\Gamma\Delta) = \frac{1}{8}\cdot(AB\Gamma\Delta)$.

## 60 Θέμα 2 - 20667

**α.** $(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\cdot B\Gamma\cdot A\Gamma\cdot \eta\mu\Gamma = \frac{1}{2}\cdot 8\cdot A\Gamma\cdot\eta\mu\Gamma = 4A\Gamma\cdot\eta\mu\Gamma$.

**β.** Έχουμε $B\Gamma = 8$ και $\Delta B = 4$, οπότε $\Gamma\Delta = B\Gamma + \Delta B = 8+4 = 12$ και $\Gamma E = \frac{A\Gamma}{2}$, αφού το $E$ είναι μέσο της $A\Gamma$.

Άρα $(\Gamma\Delta E) = \frac{1}{2}\Gamma\Delta\cdot\Gamma E\cdot\eta\mu\Gamma = \frac{1}{2}\cdot 12\cdot\frac{A\Gamma}{2}\cdot\eta\mu\Gamma = 3A\Gamma\cdot\eta\mu\Gamma$.

**γ.** Από τα ερωτήματα **α.** και **β.** προκύπτει $\frac{(AB\Gamma)}{(\Gamma\Delta E)} = \frac{4A\Gamma\cdot\eta\mu\Gamma}{3A\Gamma\cdot\eta\mu\Gamma} = \frac{4}{3}$.

Επειδή $(\Gamma\Delta E) = 12$ έχουμε $\frac{(AB\Gamma)}{12} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow (AB\Gamma) = 16$.

## 61 Θέμα 2 – 16756

**α.** Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Delta B\Gamma$ έχουν κοινή τη γωνία $\hat{B}$.

Είναι: $\frac{(AB\Gamma)}{(\Delta B\Gamma)} = \frac{AB\cdot B\Gamma}{\Delta B\cdot B\Gamma} \Leftrightarrow \frac{(AB\Gamma)}{(\Delta B\Gamma)} = \frac{AB}{\Delta B}$.

**β.** Είναι $\Delta B = AB - A\Delta = 5A\Delta - A\Delta = 4A\Delta$.

Οπότε $\frac{25}{(\Delta B\Gamma)} = \frac{5A\Delta}{4A\Delta} \Leftrightarrow \frac{25}{(\Delta B\Gamma)} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow (\Delta B\Gamma) = \frac{25\cdot 4}{5} \Leftrightarrow (\Delta B\Gamma) = 20$.

## 62 Θέμα 2 - 16770

**α.** Τα τρίγωνα $OEB$ και $O\Delta A$ έχουν $E\hat{O}B = \Delta\hat{O}A$, επειδή η $OA$ είναι διχοτόμος της γωνίας $E\hat{O}\Delta$ και $\hat{E} = \hat{\Delta} = 70^{o}$. Επομένως τα τρίγωνα είναι όμοια.

**β.** Αφού τα δύο τρίγωνα είναι όμοια θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες.

Επομένως, θα είναι: $\frac{OB}{OA} = \frac{EB}{A\Delta} = \frac{OE}{O\Delta} = \frac{3}{2}$.

**γ.** Τα τρίγωνα $OEB$ και $O\Delta A$ είναι όμοια, οπότε:

$$\frac{(OEB)}{(O\Delta A)} = \left(\frac{OB}{OA}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{(OEB)}{28} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \Leftrightarrow \frac{(OEB)}{28} = \frac{9}{4} \Leftrightarrow 4(OEB) = 28\cdot 9 \Leftrightarrow (OEB) = 7\cdot 9 \Leftrightarrow (OEB) = 63$$

## 63 Θέμα 2 - 16806

**α.** Τα τρίγωνα $ΑΔΕ$ και $ΔΕΒ$ έχουν τις γωνίες τους $\hat{Δ}_1$ και $\hat{Δ}_2$ παραπληρωματικές όπως και τα τρίγωνα $ΑΔΕ$ και $ΔΕΓ$ έχουν παραπληρωματικές τις γωνίες $\hat{Ε}_1$ και $\hat{Ε}_2$.

Άρα $\dfrac{(ΑΔΕ)}{(ΔΕΒ)} = \dfrac{ΑΔ \cdot ΔΕ}{ΔΒ \cdot ΔΕ} = \dfrac{ΑΔ}{ΔΒ}$ και $\dfrac{(ΑΔΕ)}{(ΔΕΓ)} = \dfrac{ΑΕ \cdot ΔΕ}{ΕΓ \cdot ΔΕ} = \dfrac{ΑΕ}{ΕΓ}$.

**β.** Το τμήμα $ΔΕ$ είναι παράλληλο στην πλευρά $ΒΓ$ του τριγώνου $ΑΒΓ$, οπότε εφαρμόζοντας το Θεώρημα του Θαλή, έχουμε ότι $\dfrac{ΑΔ}{ΔΒ} = \dfrac{ΑΕ}{ΕΓ}$.

Επομένως από το **α.** ερώτημα θα ισχύει ότι $\dfrac{(ΑΔΕ)}{(ΔΕΒ)} = \dfrac{(ΑΔΕ)}{(ΔΕΓ)} \Leftrightarrow (ΔΕΒ) = (ΔΕΓ)$.

## 64 Θέμα 2 - 18101

**α.** Το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελές με $ΑΓ = ΒΓ$, οπότε $\hat{Β} = Β\hat{Α}Γ$.

**β.** Τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΒΔΑ$ είναι ισοσκελή και έχουν μία αντίστοιχη γωνία ίση, αφού $Β\hat{Α}Γ = \hat{Β}$ (η γωνία $Β\hat{Α}Γ$ είναι προσκείμενη στη βάση $ΑΒ$ του ισοσκελούς $ΑΒΓ$ και η γωνία $\hat{Β}$ είναι προσκείμενη στη βάση $ΒΔ$ του ισοσκελούς $ΑΒΔ$). Επομένως, τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΑΒΔ$ είναι όμοια.

**γ.** Αφού τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΑΒΔ$ είναι όμοια και ο λόγος ομοιότητας των δύο τριγώνων είναι $\dfrac{ΒΓ}{ΑΔ} = \dfrac{3}{2}$.

Επομένως, $\dfrac{(ΑΒΓ)}{(ΒΔΑ)} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{9}{4}$.

## 65 Θέμα 2 - 18561

Είναι $α = ΒΓ$, $ΓΔ = α$, $γ = ΑΒ$, $ΒΕ = γ$.

**α.** Τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΒΔΕ$ έχουν $\hat{Β} + \hat{Β}_{εξ.} = 180^\circ$, άρα $\dfrac{(ΑΒΓ)}{(ΒΔΕ)} = \dfrac{ΒΑ \cdot ΒΓ}{ΒΕ \cdot ΒΔ} = \dfrac{γ \cdot α}{γ \cdot 2α} = \dfrac{1}{2}$,

οπότε $(ΒΔΕ) = 2 \cdot (ΑΒΓ) \Leftrightarrow (ΒΔΕ) = 50\,m^2$.

**β.** Στο τρίγωνο $ΑΒΔ$ το τμήμα $ΑΓ$ είναι διάμεσος, οπότε $(ΑΓΔ) = (ΑΒΓ)$.

Η διαγώνιος $ΑΔ$ χωρίζει το παραλληλόγραμμο $ΑΖΔΕ$ σε δύο ίσα τρίγωνα τα $ΑΖΔ$ και $ΑΕΔ$, οπότε $(ΑΔΖ) = (ΑΕΔ)$.

Επομένως $(ΑΖΔ) = (ΑΕΔ) = (ΑΒΓ) + (ΑΓΔ) + (ΒΔΕ) = 4(ΑΒΓ)$.

## 66 Θέμα 4 - 21194

**α.** Η $ΑΜ$ είναι διάμεσος του τριγώνου $ΑΒΓ$, επομένως $(ΑΜΒ) = (ΑΜΓ)$.

**β.** • Στο τρίγωνο $ΑΜΒ$ το $Ε$ είναι το μέσο της $ΑΜ$ και $ΕΔ // ΑΒ$, οπότε το $Δ$ είναι το μέσο της $ΒΜ$, άρα $ΜΔ = \dfrac{1}{2} \cdot ΒΜ$ και $ΜΕ = \dfrac{1}{2} \cdot ΑΜ$.

• Από το **α.** ερώτημα έχουμε $(ΑΜΒ) = (ΑΜΓ)$, οπότε $(ΑΜΒ) = \dfrac{1}{2} \cdot (ΑΒΓ)$.

Τα τρίγωνα $ΜΕΔ$ και $ΑΜΒ$ έχουν την γωνία $Α\hat{Μ}Β$ κοινή, οπότε

$$\frac{(ΜΕΔ)}{(ΑΜΒ)} = \frac{ΜΕ \cdot ΜΔ}{ΑΜ \cdot ΒΜ} = \frac{\frac{1}{2} \cdot ΑΜ \cdot \frac{1}{2} \cdot ΒΜ}{ΑΜ \cdot ΒΜ} = \frac{1}{4}.$$

Άρα $(ΜΕΔ) = \dfrac{1}{4} \cdot (ΑΜΒ) = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot (ΑΒΓ) = \dfrac{1}{8} \cdot (ΑΒΓ)$.

**γ.** • Είναι $BM = M\Gamma$ , αφού $AM$ διάμεσος στο τρίγωνο $AB\Gamma$ .

• Στο τρίγωνο $AM\Gamma$ το $E$ είναι το μέσο της $AM$ και $EZ // A\Gamma$ , οπότε το $Z$ είναι το μέσο του $M\Gamma$ .

Είναι $\Delta M = \frac{1}{2} \cdot BM = \frac{1}{2} \cdot M\Gamma = MZ$ , οπότε η $EM$ είναι διάμεσος του τριγώνου $E\Delta Z$ , άρα $(ME\Delta) = (MEZ)$ .

Από το **α.** ερώτημα είναι $(AMB) = (AM\Gamma) \Leftrightarrow (AB\Delta E) + (ME\Delta) = (A\Gamma ZE) + (MEZ) \Leftrightarrow (AB\Gamma\Delta) = (A\Gamma ZE)$ .

## 67 Θέμα 4 - 16732

**α.** Τα τρίγωνα $MKB$ και $\Delta K\Gamma$ έχουν $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 90^\circ$ και κοινή τη γωνία $\hat{K}$ , άρα είναι όμοια.

**β.** Είναι $MB = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\Delta\Gamma$ .

Τα όμοια τρίγωνα $MKB$ και $\Delta K\Gamma$ έχουν λόγο ομοιότητας $\lambda = \frac{MB}{\Delta\Gamma} = \frac{\frac{1}{2}\Delta\Gamma}{\Delta\Gamma} = \frac{1}{2}$.

Οπότε $\frac{(MKB)}{(\Delta K\Gamma)} = \lambda^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$. Άρα $(MKB) = \frac{1}{4}(\Delta K\Gamma)$.

**γ.** • Τα τρίγωνα $AM\Delta$ και $MKB$ είναι ίσα αφού έχουν

$AM = MB$ , $\Delta\hat{A}M = M\hat{B}K = 90^\circ$ και $A\hat{M}\Delta = B\hat{M}K$ , ως κατακορυφήν

Άρα $(AM\Delta) = (MKB)$ , (1) .

• $(\Delta K\Gamma) = (MB\Gamma\Delta) + (MKB) = (MB\Gamma\Delta) + (AM\Delta) \overset{(1)}{=} (AB\Gamma\Delta)$ , (2)

Άρα $(MB\Gamma\Delta) = (\Delta K\Gamma) - (MKB) \overset{\beta.}{=} (\Delta K\Gamma) - \frac{1}{4}(\Delta K\Gamma) = \frac{3}{4}(\Delta K\Gamma) \overset{(2)}{=} \frac{3}{4}(AB\Gamma\Delta)$.

**δ.** Έστω ότι το τετράγωνο έχει πλευρά α. Είναι $(AB\Gamma\Delta) = \alpha^2$ και $(MB\Gamma\Delta) = 75$ .

Από το ερώτημα **γ.** έχουμε $75 = \frac{3}{4}\alpha^2 \Leftrightarrow \alpha^2 = \frac{4}{3} \cdot 75 \Leftrightarrow \alpha^2 = 100$ .

Άρα $\alpha = \sqrt{100} = 10\,m$ .

## 68 Θέμα 4 - 18370

**α.** Είναι: • $M\Gamma \perp O\Gamma$ .

• $MO = MB + BO = 2\rho + \rho = 3\rho$ .

Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο $MO\Gamma$ έχουμε

$M\Gamma^2 = OM^2 - O\Gamma^2 = (3\rho)^2 - \rho^2 = 8\rho^2$ , οπότε $M\Gamma = \sqrt{8\rho^2} = 2\sqrt{2}\,\rho$ .

**β. i.** Είναι $\Delta A \perp OA$ , οπότε $\hat{A} = 90^\circ$ .

Τα τρίγωνα $\Gamma MO$ και $AM\Delta$ είναι όμοια αφού $\hat{\Gamma} = \hat{A} = 90^\circ$ και η γωνία $\hat{M}$ είναι κοινή.

Άρα $\frac{\Gamma M}{AM} = \frac{MO}{M\Delta} \Leftrightarrow \frac{MO}{M\Gamma} = \frac{M\Delta}{MA}$ .

**ii.** • Τα τρίγωνα $\Gamma MO$ και $AM\Delta$ είναι όμοια, επομένως $\frac{(A\Delta M)}{(MO\Gamma)} = \left(\frac{AM}{\Gamma M}\right)^2 = \frac{AM^2}{\Gamma M^2}$

• Είναι $OM = MB + BO = \lambda\rho + \rho = (\lambda+1)\rho$ .

• Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο $MO\Gamma$ έχουμε

$\Gamma M^2 = OM^2 - O\Gamma^2 = \left((\lambda+1)\rho\right)^2 - \rho^2 = ... = (\lambda^2 + 2\lambda + 1 - 1)\rho^2 = (\lambda^2 + 2\lambda)\rho^2 = \lambda(\lambda+2)\rho^2$ ,

• $AM = AB + BM = 2\rho + \lambda\rho = (\lambda+2)\rho$ , οπότε $AM^2 = (\lambda+2)^2\rho^2$

Η (1) γίνεται $\frac{(A\Delta M)}{(MO\Gamma)} = \frac{AM^2}{\Gamma M^2} = \frac{(\lambda+2)^2\rho^2}{\lambda(\lambda+2)\rho^2} = \frac{\lambda+2}{\lambda}$

Έχουμε $(A\Delta M) = 9(MO\Gamma) \Leftrightarrow \frac{(A\Delta M)}{(MO\Gamma)} = 9 \Leftrightarrow \frac{\lambda+2}{\lambda} = 9 \Leftrightarrow \lambda + 2 = 9\lambda \Leftrightarrow 8\lambda = 2 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{4}$.

## 69 Θέμα 4 - 18553

**α. i.** Το τρίγωνο ΣΔΓ έχει βάση την ΔΓ, και ύψος όσο το ΑΔ. Άρα $(\Sigma\Delta\Gamma)=\frac{1}{2}\cdot\alpha\cdot\alpha=\frac{\alpha^2}{2}$.

**ii.** Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΣΒΓ έχουμε $\Sigma\Gamma^2=\Sigma B^2+B\Gamma^2=\alpha^2+\alpha^2=2\alpha^2$ ή $\Sigma\Gamma=\alpha\sqrt{2}$.

**β. i.** Τα τρίγωνα Σ΄ΔΓ και ΣΔΓ έχουν κοινή βάση τη ΔΓ και ύψος όσο το ΑΔ.

Οπότε τα τρίγωνα αυτά έχουν και ίσα εμβαδά. Άρα $(\Sigma'\Delta\Gamma)=(\Sigma\Delta\Gamma)=\frac{\alpha^2}{2}$.

**ii.** Από το σημείο Γ έχουμε το κάθετο τμήμα ΓΒ προς την ευθεία ΑΒ και τα πλάγια ΓΣ και ΓΣ΄.

Τα ίχνη Σ και Σ΄ των πλάγιων τμημάτων ΓΣ και ΓΣ΄ αντίστοιχα είναι τέτοια ώστε οι αποστάσεις τους από το ίχνος Β του κάθετου ΓΒ να είναι άνισες και συγκεκριμένα $B\Sigma'>B\Sigma$, οπότε και τα αντίστοιχα πλάγια είναι ομοίως άνισα δηλαδή $\Gamma\Sigma'>\Gamma\Sigma$.

**iii.** Φέρουμε $\Delta E\perp\Sigma\Gamma$, $\Delta H\perp\Sigma'\Gamma$.

Έχουμε: $(\Sigma'\Delta\Gamma)=(\Sigma\Delta\Gamma)\Leftrightarrow\frac{1}{2}\cdot\Sigma'\Gamma\cdot\Delta H=\frac{1}{2}\Sigma\Gamma\cdot\Delta E\Leftrightarrow\Sigma'\Gamma\cdot\Delta H=\Sigma\Gamma\cdot\Delta E\Leftrightarrow\frac{\Sigma'\Gamma}{\Sigma\Gamma}=\frac{\Delta E}{\Delta H}$ και επειδή $\Sigma'\Gamma>\Sigma\Gamma$ θα έχουμε $\Delta E>\Delta H$.

## 70 Θέμα 4 - 18557

**α.** Τα τετράπλευρα ΑΔΓΕ και ΒΓΔΖ έχουν τις απέναντι πλευρές τους ανά δύο παράλληλες, άρα είναι παραλληλόγραμμα. Είναι

$(A\Delta\Gamma E)=\Delta\Gamma\cdot\upsilon$ (1), όπου υ είναι το ύψος του τραπεζίου.

$(B\Gamma\Delta Z)=\Delta\Gamma\cdot\upsilon$ (2), όπου υ είναι το ύψος του τραπεζίου.

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει $(A\Delta\Gamma E)=(B\Gamma\Delta Z)$.

**β.** • Το τετράπλευρο ΑΔΓΕ έχει περίμετρο $\Pi_1=2\cdot A\Delta+2\cdot\Delta\Gamma$.

• Το τετράπλευρο ΒΓΔΖ έχει περίμετρο $\Pi_2=2\cdot B\Gamma+2\cdot\Delta\Gamma$.

**γ.** Από το ερώτημα **α.** έχουμε $(A\Delta\Gamma E)=(B\Gamma\Delta Z)$.

Για να έχουν και ίσες περιμέτρους πρέπει $A\Delta=B\Gamma$, δηλαδή το τραπέζιο ΑΒΓΔ να είναι ισοσκελές.

## 71 Θέμα 4 - 16114

**α. i.** Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ έχουν την γωνία $\hat{A}$ κοινή και $\Gamma E=\frac{1}{4}A\Gamma$, οπότε $AE=\frac{3}{4}A\Gamma$. Άρα

$\frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)}=\frac{A\Delta\cdot AE}{AB\cdot A\Gamma}=\frac{A\Delta}{AB}\cdot\frac{AE}{A\Gamma}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$, οπότε $(AB\Gamma)=4(A\Delta E)$.

**ii.** Τα ΕΖ και ΓΗ είναι ύψη των τριγώνων ΑΔΕ και ΑΒΓ αντίστοιχα.

Οπότε $\frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)}=\frac{\frac{1}{2}A\Delta\cdot EZ}{\frac{1}{2}AB\cdot\Gamma H}=\frac{A\Delta}{AB}\cdot\frac{EZ}{\Gamma H}=\frac{1}{3}\cdot\frac{EZ}{\Gamma H}$.

Έχουμε $\frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\frac{1}{3}\cdot\frac{EZ}{\Gamma H}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\frac{EZ}{\Gamma H}=\frac{1}{4}:\frac{1}{3}\Leftrightarrow\frac{EZ}{\Gamma H}=\frac{3}{4}$.

**β.** Είναι $(AB\Gamma)=2(A\Delta E)\Leftrightarrow\frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{A\Delta\cdot AE}{AB\cdot A\Gamma}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{A\Delta}{AB}\cdot\frac{AE}{A\Gamma}=\frac{1}{2}$ και επειδή ο λόγος $\frac{AE}{A\Gamma}=\frac{3}{4}$ παραμένει σταθερός θα έχουμε

$$\frac{A\Delta}{AB}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{A\Delta}{AB}=\frac{1}{2}:\frac{1}{3}\Leftrightarrow\frac{A\Delta}{AB}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow A\Delta=\frac{2}{3}AB$$

## 72 Θέμα 4 - 16582

**α. i.** Εφόσον $\frac{ΑΔ}{ΑΒ}=\frac{ΑΕ}{ΑΓ}$, τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια, γιατί έχουν δύο πλευρές τους ανάλογες μία προς μία και την περιεχόμενη στις πλευρές αυτές γωνία ίση.

Ο λόγος ομοιότητάς τους είναι $\frac{1}{2}$.

Άρα $\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)}=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$.

Άρα το εμβαδόν του ΑΔΕ είναι ίσο με το $\frac{1}{4}$ του εμβαδού του ΑΒΓ.

Σχεδιάζουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΗ.

- Τα τρίγωνα ΑΗΔ και ΑΗΒ έχουν κοινή γωνία την $Β\hat{Α}Η$, επομένως

$\frac{(ΑΗΔ)}{(ΑΗΒ)}=\frac{ΑΔ\cdot ΑΗ}{ΑΒ\cdot ΑΗ}=\frac{ΑΔ}{ΑΒ}=\frac{1}{2}$, οπότε $(ΑΗΔ)=\frac{1}{2}\cdot(ΑΗΒ)$

- Τα τρίγωνα ΑΗΕ και ΑΗΓ έχουν κοινή γωνία την $Η\hat{Α}Γ$.

Βρίσκουμε $(ΑΗΕ)=\frac{1}{2}\cdot(ΑΗΓ)$.

Επομένως $(ΑΔΗΕ)=(ΑΗΔ)+(ΑΗΕ)=\frac{1}{2}\cdot(ΑΗΒ)+\frac{1}{2}\cdot(ΑΗΓ)=\frac{1}{2}\cdot[(ΑΗΒ)+(ΑΗΓ)]=\frac{1}{2}\cdot(ΑΒΓ)$.

**β.** Αν είναι $\frac{ΑΔ}{ΑΒ}=\frac{ΑΕ}{ΑΓ}=\lambda$, τότε $0<\lambda<1$, αφού $ΑΔ<ΑΒ$.

Σχεδιάζουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΗ.

- Τα τρίγωνα ΑΗΔ και ΑΗΒ έχουν κοινή γωνία την $Β\hat{Α}Η$, οπότε,

$\frac{(ΑΗΔ)}{(ΑΗΒ)}=\frac{ΑΔ\cdot ΑΗ}{ΑΒ\cdot ΑΗ}=\frac{ΑΔ}{ΑΒ}=\lambda$, άρα $(ΑΗΔ)=\lambda\cdot(ΑΗΒ)$

- Τα τρίγωνα ΑΗΕ και ΑΗΓ έχουν κοινή γωνία την $Η\hat{Α}Γ$, οπότε

$\frac{(ΑΗΕ)}{(ΑΗΓ)}=\frac{ΑΕ\cdot ΑΗ}{ΑΓ\cdot ΑΗ}=\frac{ΑΕ}{ΑΓ}=\lambda$, άρα $(ΑΗΕ)=\lambda\cdot(ΑΗΓ)$.

Επομένως $(ΑΔΗΕ)=(ΑΗΔ)+(ΑΗΕ)=\lambda\cdot(ΑΗΒ)+\lambda\cdot(ΑΗΓ)=\lambda\cdot[(ΑΗΒ)+(ΑΗΓ)]=\lambda\cdot(ΑΒΓ)$.

## 73 Θέμα 4 - 17907

**α.** Είναι:
- $ΒΓ^2=Ε_2=5Ε$
- $ΑΒ^2+ΑΓ^2=Ε_1+Ε=4Ε+Ε=5Ε$

Οπότε $ΒΓ^2=ΑΒ^2+ΑΓ^2$, που σημαίνει ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο, με υποτείνουσα την πλευρά $\alpha$, άρα ορθή γωνία την Α.

**β.** Είναι $ΒΓ=\alpha$, $ΓΑ=\beta$, $ΑΒ=\gamma$.

- Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με κάθετες πλευρές $\beta$ και $\gamma$, άρα $(ΑΒΓ)=\frac{1}{2}\beta\cdot\gamma$.

- Το τρίγωνο ΑΙΖ, είναι ορθογώνιο με κάθετες πλευρές $\beta$, $\gamma$, άρα $(ΑΙΖ)=\frac{1}{2}\beta\cdot\gamma$

Άρα $(ΑΒΓ)=(ΑΙΖ)$.

Είναι: $Η\hat{Β}Δ+Δ\hat{Β}Γ+Α\hat{Β}Γ+Α\hat{Β}Η=360^\circ \Leftrightarrow Η\hat{Β}Δ+90^\circ+Α\hat{Β}Γ+90^\circ=360^\circ \Leftrightarrow Η\hat{Β}Δ+Α\hat{Β}Γ=180^\circ$

Άρα $\frac{(ΒΗΔ)}{(ΑΒΓ)}=\frac{ΒΗ\cdot ΒΔ}{ΒΓ\cdot ΒΑ}=\frac{\gamma\cdot\alpha}{\alpha\cdot\gamma}=1$, οπότε $\frac{(ΒΗΔ)}{(ΑΒΓ)}=1\Leftrightarrow(ΒΗΔ)=(ΑΒΓ)$.

• Βρίσκουμε $\Theta\hat{\Gamma}P = A\hat{\Gamma}B = 180^o$.

Άρα $\dfrac{(\Gamma P\Theta)}{(AB\Gamma)} = \dfrac{\Gamma P \cdot \Gamma\Theta}{\Gamma A \cdot \Gamma B} = \dfrac{\alpha \cdot \beta}{\beta \cdot \alpha} = 1$, οπότε $\dfrac{(\Gamma P\Theta)}{(AB\Gamma)} = 1 \Leftrightarrow (\Gamma P\Theta) = (AB\Gamma)$.

Από τα παραπάνω προκύπτει: $(AB\Gamma) = (AIZ) = (BH\Delta) = (\Gamma P\Theta)$.

**γ.** Είναι $A\Gamma = 1 \Leftrightarrow \beta = 1$, οπότε $(\alpha^2 = 5\beta^2 \text{ και } \gamma^2 = 4\beta^2) \Leftrightarrow (\alpha^2 = 5 \text{ και } \gamma^2 = 4) \Leftrightarrow (\alpha = \sqrt{5} \text{ και } \gamma = 2)$.

Είναι:

• $(AIZ) = (BH\Delta) = (\Gamma P\Theta) = (AB\Gamma) = \dfrac{1}{2} \cdot \beta \cdot \gamma = \dfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1$.

• $E = \beta^2$, $E_1 = \gamma^2$ και $E_2 = \alpha^2$, οπότε $E = 1$, $E_1 = 4$ και $E_2 = 5$.

Άρα $(ZH\Delta P\Theta I) = E + E_1 + E_2 + (AIZ) + (BH\Delta) + (\Gamma P\Theta) + (AB\Gamma) = 1 + 4 + 5 + 1 + 1 + 1 + 1 = 14$.

## 74 Θέμα 4 - 17956

**α.** Στο τρίγωνο $BE\Delta$, η $EK$ είναι διάμεσος, οπότε $(BEK) = (EK\Delta)$, άρα $(EK\Delta) = \dfrac{(BE\Delta)}{2}$.

**β.** Το $AE\Delta Z$ είναι παραλληλόγραμμο ($\Delta Z // AE$ και $\Delta E // AZ$) και η διαγώνιος $EZ$ το χωρίζει σε δύο ίσα άρα και ισοδύναμα τρίγωνα, δηλαδή $(EZ\Delta) = (AEZ)$, άρα $(EZ\Delta) = \dfrac{(AE\Delta Z)}{2}$.

**γ.** Στο τρίγωνο $\Delta Z\Gamma$, η $Z\Lambda$ είναι διάμεσος, οπότε $(\Delta Z\Lambda) = (\Gamma Z\Lambda)$, άρα $(\Delta Z\Lambda) = \dfrac{(\Delta Z\Gamma)}{2}$.

Είναι $(KEZ\Lambda) = (EK\Delta) + (EZ\Delta) + (\Delta Z\Lambda) = \dfrac{(BE\Delta)}{2} + \dfrac{(AE\Delta Z)}{2} + \dfrac{(\Delta Z\Gamma)}{2} = \dfrac{(AB\Gamma)}{2}$

Επομένως, το εμβαδόν του $KEZ\Lambda$ θα ισούται με το μισό του εμβαδού του τριγώνου $AB\Gamma$ ανεξάρτητα από τη θέση του σημείου $\Delta$ πάνω στη $B\Gamma$.

## 75 Θέμα 4 - 18301

**α.** Τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $AB\Gamma$ έχουν $\Delta\hat{A}E = B\hat{A}\Gamma$ (ως κατακορυφήν), οπότε

$$\frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)} = \frac{A\Delta \cdot AE}{AB \cdot A\Gamma} = \frac{\frac{1}{2}AB \cdot \frac{2}{5}A\Gamma}{AB \cdot A\Gamma} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$$

**β.** Όπως στο προηγούμενο ερώτημα, έχουμε $\dfrac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)} = \dfrac{A\Delta \cdot AE}{AB \cdot A\Gamma} = \dfrac{\frac{1}{\lambda}AB \cdot \frac{\lambda}{\mu}A\Gamma}{AB \cdot A\Gamma} = \dfrac{1}{\lambda} \cdot \dfrac{\lambda}{\mu} = \dfrac{1}{\mu}$.

Άρα ο λόγος είναι ανεξάρτητος από την τιμή του $\lambda$.

**γ.** Αφού $(A\Delta E) = (AB\Gamma)$, έχουμε $\dfrac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)} = \dfrac{1}{\mu} \Leftrightarrow 1 = \dfrac{1}{\mu} \Leftrightarrow \mu = 1$.

Άρα, τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ είναι ισεμβαδικά για $\mu = 1$ και για οποιαδήποτε τιμή του λ, όπως αποδείχτηκε στο ερώτημα **β.** .

Επομένως, υπάρχουν άπειρα ζεύγη τιμών των ακεραίων $\lambda$ και $\mu$, για τα οποία είναι $(A\Delta E) = (AB\Gamma)$. Τα ζεύγη αυτά είναι της μορφής $\{(\lambda, 1), \lambda \in \mathbb{N}^*\}$.

Άρα, ο ισχυρισμός του μαθητή είναι αληθής.

## 76 Θέμα 4 - 18371

**α. i.** Τα τρίγωνα $\Delta E\Gamma$ και $AB\Gamma$ έχουν τις γωνίες τους $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}$.

Επομένως $\dfrac{(\Delta E\Gamma)}{(AB\Gamma)} = \dfrac{\Delta E \cdot \Delta\Gamma}{A\Gamma \cdot B\Gamma} = \dfrac{\Delta E \cdot \Delta\Gamma}{2\Delta\Gamma \cdot B\Gamma} = \dfrac{\Delta E}{2B\Gamma}$ (1), αφού $A\Gamma = 2\Delta\Gamma$.

**ii.** • Επειδή το $ΔΕΓΒ$ είναι παραλληλόγραμμο έχουμε $ΔΕ = ΒΓ$. Οπότε η (1) γίνεται

$$\frac{(ΔΕΓ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{ΔΕ}{2ΒΓ} = \frac{ΒΓ}{2ΒΓ} = \frac{1}{2} \qquad (2)$$

• Στο τρίγωνο $ΑΒΓ$ η $ΒΔ$ είναι διάμεσος, οπότε $\frac{(ΑΒΔ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{1}{2}$ (3)

Από (2) και (3) προκύπτει ότι $(ΔΕΓ) = (ΑΒΔ)$.

**β.** Ο μαθητής για να αποδείξει ότι τα τρίγωνα είναι όμοια χρησιμοποιεί το επιχείρημα ότι έχουν δύο πλευρές τους ανάλογες μία προς μια και τις γωνίες $\hat{Δ}$ και $\hat{Γ}$ ίσες. Για να εξασφαλίσουμε όμως την ομοιότητα από το κριτήριο θα έπρεπε οι γωνίες να είναι οι περιεχόμενες των ανάλογων πλευρών, πράγμα το οποίο εδώ δεν συμβαίνει. Οι περιεχόμενες γωνίες στις πλευρές $ΔΕ$, $ΔΓ$ και $ΑΒ$, $ΑΓ$ είναι οι $\hat{Δ}$ και $\hat{Α}$.

## 77 Θέμα 2 - 20638

**α.** Έχουμε $\frac{ν_1}{ν_2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow ν_2 = 2ν_1$.

Οπότε $\frac{ω_1}{ω_2} = \frac{\frac{360^{\circ}}{ν_1}}{\frac{360^{\circ}}{ν_2}} = \frac{360^{\circ} \cdot ν_2}{360^{\circ} \cdot ν_1} = \frac{ν_2}{ν_1} = \frac{2ν_1}{ν_1} = 2$.

**β.** Επειδή $ν_2 = 2ν_1$ και $ν_1 = 5$ έχουμε $ν_2 = 2 \cdot 5 = 10$.

Οπότε $\frac{φ_1}{φ_2} = \frac{180^{\circ} - \frac{360^{\circ}}{ν_1}}{180^{\circ} - \frac{360^{\circ}}{ν_2}} = \frac{180^{\circ} - \frac{360^{\circ}}{5}}{180^{\circ} - \frac{360^{\circ}}{10}} = \frac{108^{\circ}}{144^{\circ}} = \frac{3}{4}$.

## 78 Θέμα 4 - 17600

**α.** Το κανονικό εξάγωνο $ΑΒΓΔΕΖ$ έχει πλευρά $λ_6 = R$.

Το εμβαδόν κανονικού εξαγώνου είναι $(ΑΒΓΔΕΖ) = E_6 = \frac{1}{2} \cdot P_6 \cdot α_6$, όπου $P_6 = 6λ_6 = 6R$ και $α_6 = \frac{R \cdot \sqrt{3}}{2}$.

Άρα $(ΑΒΓΔΕΖ) = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot R \cdot \frac{R \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$.

**β.** Η $ΑΔ$ είναι διάμετρος του κύκλου $(O, R)$ και ισχύει $ΑΔ = 2R$. Το τρίγωνο $ΑΓΔ$ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την $ΑΔ$ αφού η γωνία $Γ$ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο.

Είναι $ΓΔ = λ_6 = R$. Από Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$ΑΔ^2 = ΑΓ^2 + ΓΔ^2 \Leftrightarrow ΑΓ^2 = ΑΔ^2 - ΓΔ^2 \Leftrightarrow ΑΓ^2 = (2R)^2 - R^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ΑΓ^2 = 4R^2 - R^2 \Leftrightarrow ΑΓ^2 = 3R^2 \Leftrightarrow ΑΓ = R \cdot \sqrt{3}$$

Άρα $(ΑΓΔ) = \frac{1}{2} \cdot ΑΓ \cdot ΓΔ = \frac{1}{2} \cdot R \cdot \sqrt{3} \cdot R = \frac{R^2\sqrt{3}}{2}$.

Η $ΑΜ$ διάμεσος του τριγώνου $ΑΓΔ$, άρα $(ΑΜΓ) = \frac{(ΑΓΔ)}{2} = \frac{\frac{R^2\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$.

**γ.** Είναι $(ΑΜΔΕΖ) = (ΑΔΕΖ) + (ΑΜΔ)$.

Έχουμε $(ΑΔΕΖ) = \frac{(ΑΒΓΔΕΖ)}{2} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$ και $(ΑΜΔ) = (ΑΜΓ) = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$,

άρα $(ΑΜΔΕΖ) = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4} + \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{4R^2\sqrt{3}}{4} = R^2\sqrt{3}$.

## 79 Θέμα 4 - 16928

**α.** Αν $R$ η ακτίνα του κύκλου μήκους $L=10$, τότε:

$$L=10 \Leftrightarrow 2\pi R=10 \Leftrightarrow R=\frac{10}{2\pi} \Leftrightarrow R=\frac{5}{\pi}$$

Η πλευρά ενός ισοπλεύρου τριγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας $R$ είναι $\lambda_3=R\sqrt{3}$, οπότε η περίμετρός του είναι $P_3=3\cdot\lambda_3=3R\sqrt{3}=3\cdot\frac{5}{\pi}\cdot\sqrt{3}=\frac{15\sqrt{3}}{\pi}$.

**β.** Η πλευρά του κανονικού εξαγώνου είναι $\lambda_6=R \Leftrightarrow \lambda_6=\frac{5}{\pi}$.

Η περίμετρος του κανονικού εξαγώνου είναι $P_6=6\cdot\lambda_6=6\cdot\frac{5}{\pi}=\frac{30}{\pi}$.

**γ.** Θεωρούμε τα κανονικά πολύγωνα που είναι εγγεγραμμένα στον κύκλο με μήκος 10. Η περίμετρος κάθε τέτοιου κανονικού πολυγώνου είναι μικρότερη από το μήκος του κύκλου στον οποίο είναι εγγεγραμμένο, δηλαδή του 10. Επίσης, εφόσον το πλήθος των πλευρών διπλασιάζεται η τιμή της περιμέτρου είναι όλο και μεγαλύτερη, αλλά παραμένει μικρότερη από το 10.

Είναι $\frac{30}{\pi}=P_6$ , $\frac{15\sqrt{3}}{\pi}=P_3$.

Άρα $P_3<P_6<P_{12}<P_{24}<10 \Leftrightarrow \frac{15\sqrt{3}}{\pi}<\frac{30}{\pi}<P_{12}<P_{24}<10$.

## 80 Θέμα 2 - 18097

**α.** Γνωρίζουμε ότι οι διαγώνιοι ΑΓ και ΒΔ του τετραγώνου είναι κάθετες και το σημείο τομής τους είναι το κέντρο Ο του περιγεγραμμένου κύκλου. Έστω $\alpha$ η πλευρά του τετραγώνου. Με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος στο τρίγωνο ΟΔΑ έχουμε: $\alpha^2=R^2+R^2=2R^2$.

Έχουμε $(ΑΒΓΔ)=4 \Leftrightarrow \alpha^2=4 \Leftrightarrow R=\sqrt{2}$. Άρα $R=\sqrt{2}$.

**β.** Το εμβαδόν του κύκλου είναι $E=\pi R^2=2\pi$.

Επομένως, το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ του τετραγώνου και του περιγεγραμμένου κύκλου του είναι $E-E_\tau=2\pi-4$.

## 81 Θέμα 2 - 21298

**α.** Είναι $L=10\pi$ και $L=2\pi\cdot\rho \Leftrightarrow \rho=\frac{L}{2\pi} \Leftrightarrow \rho=\frac{10\pi}{2\pi} \Leftrightarrow \rho=5$.

**β. i.** Είναι $ΒΓ=2\rho=10$.

Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$ΑΓ^2=ΒΓ^2-ΑΒ^2=100-36=64$, οπότε $ΑΓ=8$.

**ii.** $(ΑΒΓ)=\frac{ΑΒ\cdot ΑΓ}{2}=\frac{6\cdot 8}{2}=\frac{48}{2}=24$.

## 82 Θέμα 2 - 21301

**α.** Έχουμε $E=4\pi \Leftrightarrow \pi\rho^2=4\pi \Leftrightarrow \rho^2=4 \Leftrightarrow \rho=2$.

**β.** • Είναι $ΑΓ=2\rho=4$.

• Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με $\hat{B}=90^0$ και ισοσκελές με $ΑΒ=ΒΓ$, που είναι ίσες ως πλευρές του τετραγώνου ΑΒΓΔ.

Έχουμε $ΑΓ=ΑΒ\cdot\sqrt{2} \Leftrightarrow 4=ΑΒ\cdot\sqrt{2} \Leftrightarrow ΑΒ=\frac{4}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow ΑΒ=\frac{4\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow ΑΒ=2\sqrt{2}$.

**γ.** Το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΒΓΔ είναι $(ΑΒΓΔ)=ΑΒ^2=(2\sqrt{2})^2=8$.

## 83 Θέμα 2 - 21300

**α.** Η γωνία $A\hat{K}\Delta$ είναι η κεντρική γωνία $\hat{\omega}_4$ του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$. Άρα $A\hat{K}\Delta = \frac{360^o}{4} = 90^o$.

Επομένως το τρίγωνο $AK\Delta$ είναι ορθογώνιο με ορθή γωνία την $A\hat{K}\Delta$.

**β. i.** Είναι $(AK\Delta) = \frac{1}{2}\cdot K\Delta \cdot KA = \frac{1}{2}\cdot\rho\cdot\rho = \frac{1}{2}\rho^2$.

Έχουμε $(AK\Delta) = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\rho^2 = 4 \Leftrightarrow \rho^2 = 8 \Leftrightarrow \rho = \sqrt{8}$.

**ii.** Το εμβαδόν του κύκλου είναι $E = \pi\rho^2 = \pi\cdot(\sqrt{8})^2 = 8\pi$.

## 84 Θέμα 2 - 18098

**α.** Τα τόξα $\Theta E$, $EZ$, $ZH$, $H\Theta$ είναι τόξα ίσων κύκλων ακτίνας $\rho = 2$ και αντιστοιχούν σε ίσες επίκεντρες γωνίες $90^o$. Επομένως, οι κυκλικοί τομείς $A\widehat{\Theta E}$, $B\widehat{EZ}$, $\Gamma\widehat{ZH}$, $\Delta\widehat{H\Theta}$ έχουν ίσα εμβαδά. Είναι:

$$A\widehat{\Theta E} = B\widehat{EZ} = \Gamma\widehat{ZH} = \Delta\widehat{H\Theta} = \frac{\pi\rho^2 90}{360} = \frac{\pi\cdot 2^2\cdot 90}{360} = \pi$$

**β.** Το εμβαδόν του τετραγώνου είναι $E = \alpha^2 = 4^2 = 16$.

Οπότε, το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου είναι $E - 4(\widehat{A\Theta E}) = 16 - 4\pi = 4(4-\pi)$.

## 85 Θέμα 2 - 18099

**α.** Η πλευρά και το απόστημα κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας $R$ είναι

$\lambda_6 = R$ , $\alpha_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$. Αφού $R = 2\sqrt{3}$ έχουμε $\lambda_6 = 2\sqrt{3}$ , $\alpha_6 = \frac{2\sqrt{3}\sqrt{3}}{2} = 3$.

**β.** Το εμβαδόν του κανονικού εξαγώνου είναι

$$E_6 = \frac{1}{2}P_6\alpha_6 = \frac{1}{2}6\lambda_6\alpha_6 = 3\cdot 2\sqrt{3}\cdot 3 = 18\sqrt{3}$$

**γ.** Το εμβαδόν του κύκλου είναι $E = \pi R^2 = \pi(2\sqrt{3})^2 = 12\pi$.

Οπότε, το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ του κανονικού εξαγώνου και του περιγεγραμμένου κύκλου του είναι:

$$E - E_6 = 12\pi - 18\sqrt{3} = 6(2\pi - 3\sqrt{3})$$

## 86 Θέμα 2 - 21075

**α.** Είναι $E = 16\pi$, οπότε $E = \pi\rho^2 \Leftrightarrow 16\pi = \pi\rho^2 \Leftrightarrow \rho^2 = 16$, οπότε $\rho = 4$.

**β. i.** Η πλευρά $AB$ του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$ που είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο με ακτίνα $\rho = 4$ είναι $AB = \rho\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

**ii.** Το εμβαδόν του κύκλου είναι $E = 16\pi$, ενώ το εμβαδόν του τετραγώνου είναι $E' = AB^2 = (4\sqrt{2})^2 = 16\cdot 2 = 32$. Επομένως το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται ανάμεσα στο τετράγωνο και στον κύκλο είναι $E - E' = 16\pi - 32$.

## 87 Θέμα 2 - 21122

**α.** Είναι $A\Delta^2 = B\Delta\cdot\Delta\Gamma \Leftrightarrow A\Delta^2 = 1\cdot 4 \Leftrightarrow A\Delta^2 = 4$, οπότε $A\Delta = 2$.

**β.** Το μέτρο του τόξου $\widehat{E\Delta Z}$ είναι $\mu = 90^0$ αφού $\hat{A} = 90^o$ και είναι τόξο του κύκλου ακτίνας $R = A\Delta = 2$.

Άρα το $\widehat{E\Delta Z}$ έχει μήκος $l = \frac{\pi R\mu}{180} = \frac{\pi\cdot 2\cdot 90}{180} = \pi$.

## 88 Θέμα 2 - 20672

**α.** • Η ακτίνα του ημικυκλίου $C_1$ είναι $R_1=\frac{AB}{2}=\frac{6}{2}=3$ και το εμβαδόν του

$$E_1=\frac{\pi R_1^2}{2}=\frac{9\pi}{2}.$$

• Η ακτίνα του ημικυκλίου $C_2$ είναι $R_2=\frac{B\Gamma}{2}=\frac{4}{2}=2$ και το εμβαδόν του

$$E_2=\frac{\pi R_2^2}{2}=\frac{4\pi}{2}=2\pi.$$

• Η ακτίνα του ημικυκλίου $C_3$ είναι $R_3=\frac{A\Gamma}{2}=\frac{2}{2}=1$ και το εμβαδόν του

$$E_3=\frac{\pi R_3^2}{2}=\frac{\pi}{2}.$$

**β.** Το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου είναι $E_1-E_2+E_3=\frac{9\pi}{2}-\frac{4\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\frac{6\pi}{2}=3\pi$.

## 89 Θέμα 2 - 20363

**α.** • Η πλευρά κανονικού 6–γώνου, εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας $R$ είναι ίση με την ακτίνα $R$ του κύκλου. Οπότε $AB=R=OA=OB$, οπότε είναι ισόπλευρο, άρα $A\hat{O}B=60^{o}$, επομένως $\overset{\frown}{AB}=60^{o}$.

• Η πλευρά τετραγώνου, εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας $R$ είναι ίση με $R=\sqrt{2}$. Οπότε $B\Gamma=R\sqrt{2}$ και το τρίγωνο $BO\Gamma$ είναι ορθογώνιο (οι διαγώνιες του τετραγώνου τέμνονται κάθετα), άρα $B\hat{O}\Gamma=90^{o}$, επομένως $\overset{\frown}{B\Gamma}=90^{o}$.

**β.** • Το μήκος του τόξου $\overset{\frown}{AB}$, είναι $\ell_1=\frac{\pi R\cdot 60}{180}=\frac{\pi R}{3}$.

• Το μήκος του τόξου $\overset{\frown}{B\Gamma}$, είναι $\ell_2=\frac{\pi R\cdot 90}{180}=\frac{\pi R}{2}$.

**γ.** Είναι $A\hat{O}\Gamma=A\hat{O}B+B\hat{O}\Gamma=60^{o}+90^{o}=150^{o}$.

Οπότε $\overset{\frown}{OA\Gamma}=\frac{\pi\cdot R^2\cdot 150}{360}=\frac{5\pi R^2}{12}$.

## 90 Θέμα 2 - 21123

**α.** Επειδή $A\hat{O}B=90^{o}$, το $OH$ είναι το απόστημα τετραγώνου πλευράς, εγγεγραμμένου στον κύκλο $(O,R)$, οπότε $OH=\frac{R\sqrt{2}}{2}=\frac{OA\sqrt{2}}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

**β.** • Ο κυκλικός τομέας $O\overset{\frown}{AB}$ αντιστοιχεί στο τόξο $\overset{\frown}{AB}$ με μέτρο $\mu=A\hat{O}B=90^{o}$ και ακτίνα $R=2$, οπότε το εμβαδόν του είναι

$$\left(O\overset{\frown}{AB}\right)=\frac{\pi R^2\mu}{360}=\frac{\pi\cdot 2^2\cdot 90}{360}=\pi.$$

• Ο κυκλικός τομέας $O\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ αντιστοιχεί στο τόξο $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ με μέτρο $\mu=\Gamma\hat{O}\Delta=90^{o}$ και ακτίνα $\rho=OH=\sqrt{2}$, οπότε το εμβαδόν του είναι

$$\left(O\overset{\frown}{\Gamma\Delta}\right)=\frac{\pi\rho^2\mu}{360}=\frac{\pi\cdot(\sqrt{2})^2\cdot 90}{360}=\frac{\pi\cdot 180}{360}=\frac{\pi}{2}.$$

**γ.** Το εμβαδόν του σκιασμένου μέρους, είναι ίσο με τη διαφορά των εμβαδών των κυκλικών τομέων $O\overset{\frown}{AB}$ και $O\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$, δηλαδή $\left(O\overset{\frown}{AB}\right)-\left(O\overset{\frown}{\Gamma\Delta}\right)=\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$.

## 91 Θέμα 2 - 21121

**α.** $(ΑΒΓ)=\frac{1}{2}\cdot ΒΓ\cdot ΑΔ=\frac{1}{2}\cdot 13\cdot 6=39$

**β. i.** Ο κυκλικός τομέας $Α\overset{\frown}{ΕΔΖ}$ αντιστοιχεί στο τόξο $\overset{\frown}{ΕΔΖ}$ με μέτρο $μ=\hat{Α}=90^{o}$ και ακτίνας $R=ΑΔ=6$, οπότε το εμβαδόν του είναι

$$\left(Α\overset{\frown}{ΕΔΖ}\right)=\frac{πR^2μ}{360}=\frac{π\cdot 6^2\cdot 90}{360}=9π.$$

**ii.** Το εμβαδόν του χωρίου που είναι εσωτερικά του τριγώνου ΑΒΓ και εξωτερικά του κύκλου είναι ίσο με τη διαφορά των εμβαδών του τριγώνου ΑΒΓ και του κυκλικού τομέα $Α\overset{\frown}{ΕΔΖ}$, δηλαδή

$$(ΑΒΓ)-\left(Α\overset{\frown}{ΕΔΖ}\right)=39-9π.$$

## 92 Θέμα 2 - 21069

**α.** Το μήκος της χορδής ΒΓ είναι $ΒΓ=3\sqrt{3}=ρ\sqrt{3}$, επομένως η ΒΓ είναι η πλευρά ισοπλεύρου τριγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο. Άρα, το μέτρο του κυρτογώνιου τόξου $\overset{\frown}{ΒΓ}$ είναι $μ=ω_3=\frac{360^0}{3}=120^{o}$.

**β.** Το μήκος κυρτογώνιου τόξου $\overset{\frown}{ΒΓ}$ που έχει $μ=120^{o}$ και αντιστοιχεί στο κύκλο ακτίνας $ρ=3$ είναι $\frac{πρμ}{180}=\frac{π\cdot 3\cdot 120}{180}=2π$.

**γ.** Το εμβαδόν του κυκλικού τομέα $Ο\overset{\frown}{ΒΓ}$ είναι $\left(Ο\overset{\frown}{ΒΓ}\right)=πρ^2\frac{μ}{360}=π\cdot 3^2\frac{120}{360}=3π$.

## 93 Θέμα 4 - 17599

**α.** Έχουμε:
- $(ΑΒΓΔ)=α\cdot α\cdot α=α^2$
- $(\overset{\frown}{ΑΒΔ})=\frac{π\cdot α^2\cdot 90}{360}=\frac{π\cdot α^2}{4}$

Άρα $(x_1)=(ΑΒΓΔ)-(\overset{\frown}{ΑΒΔ})=α^2-\frac{π\cdot α^2}{4}=\frac{α^2}{4}\cdot(4-π)$

**β.**
- $(x_2)=\frac{π\cdot(\frac{α}{2})^2\cdot 180}{360}=\frac{π\cdot α^2}{8}$
- $(x_3)=(\overset{\frown}{ΑΒΔ})-x_2=\frac{π\cdot α^2}{4}-\frac{π\cdot α^2}{8}=\frac{π\cdot α^2}{8}$

**γ.** $(x_2)-(x_1)=\frac{π\cdot α^2}{8}-\frac{α^2}{4}\cdot(4-π)=...=\frac{α^2}{8}\cdot(3π-8)>0$, οπότε $(x_2)>(x_1)$.

## 94 Θέμα 4 - 21103

**α.** Το κάθε ημικύκλιο έχει $ρ=\frac{2α}{2}=α$.

Το κάθε ημικύκλιο έχει μέτρο $μ=180^{o}$, οπότε το μήκος τους είναι $\frac{πρμ}{180}=\frac{πα180}{180}=πα$.

**β. i.** Η περίμετρος της καρδιάς αποτελείται από τα δύο ημικύκλια και τις πλευρές ΑΔ και ΔΓ. Από το **α.** ερώτημα το κάθε ημικύκλιο έχει μήκος $πα$ οπότε η περίμετρος είναι $πα+πα+2α+2α=2πα+4α=(2π+4)\cdot α$.
Άρα $(2π+4)α=2π+4\Leftrightarrow α=1$.

**ii.** Στο ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΒΕΖ $(\hat{Β}=90^{o}$, $ΒΕ=ΒΖ=α)$ έχουμε
$ΕΖ=ΒΕ\sqrt{2}=α\sqrt{2}=1\cdot\sqrt{2}=\sqrt{2}$.

**γ.** • Τα δύο ημικύκλια είναι ίσα γιατί έχουν την ίδια ακτίνα $\rho = \alpha$, οπότε το άθροισμά τους θα είναι ένας κυκλικός δίσκος με ακτίνα α. Το εμβαδόν του θα είναι $(\tau) = \pi\rho^2 = \pi\alpha^2$.

• Το τετράγωνο $ΑΒΓΔ$ έχει εμβαδόν $(ΑΒΓΔ) = (ΑΒ)^2 = (2\alpha)^2 = 4\alpha^2$.

Οπότε $\dfrac{(\tau)}{(ΑΒΓΔ)} = \dfrac{\pi\alpha^2}{4\alpha^2} = \dfrac{\pi}{4} < 1$ , αφού $\pi < 4$.

## 95 Θέμα 4 - 21197

**α. i.** • Το ημικύκλιο με διάμετρο $ΑΒ = 2\alpha$ έχει ακτίνα $\dfrac{ΑΒ}{2} = \alpha$ και εμβαδόν $Ε = \dfrac{\pi\alpha^2}{2}$.

Έχουμε $Ε = 10 \Leftrightarrow \dfrac{\pi\alpha^2}{2} = 10 \Leftrightarrow \pi\alpha^2 = 20 \Leftrightarrow \alpha^2 = \dfrac{20}{\pi}$.

• Είναι $(ΑΒΓΔ) = ΑΒ^2 = (2\alpha)^2 = 4\alpha^2 = 4\cdot\dfrac{20}{\pi} = \dfrac{80}{\pi}$ .

**ii.** Το σημείο $Λ$ είναι το μέσο της πλευράς $ΓΔ$, οπότε $ΔΛ = \dfrac{2\alpha}{2} = \alpha$.

Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο $ΑΔΛ$ έχουμε:

$$ΑΛ^2 = ΑΔ^2 + ΔΛ^2 = (2\alpha)^2 + \alpha^2 = 5\alpha^2 = 5\cdot\frac{20}{\pi} = \frac{100}{\pi} .$$

**β. i.** Το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου $ΑΒΜΝΑ$ είναι η διαφορά του εμβαδού του τεταρτοκυκλίου $Α\overset{\frown}{ΜΝ}$ από το εμβαδόν $Ε$ του ημικυκλίου με διάμετρο την $ΑΒ$, δηλαδή $(ΑΒΜΝΑ) = (Α\overset{\frown}{ΜΝ}) - Ε$.

Είναι $(Α\overset{\frown}{ΜΝ}) = \dfrac{\pi\cdot ΑΛ^2}{4} = \dfrac{\pi\cdot\dfrac{100}{\pi}}{4} = \dfrac{100}{4} = 25$ και $Ε = 10$. Οπότε $(ΑΒΜΝΑ) = 25 - 10 = 15$.

**ii.** $\dfrac{(Α\overset{\frown}{ΜΝ})}{(ΑΒΓΔ)} = \dfrac{25}{\dfrac{80}{\pi}} = \dfrac{25\pi}{80} = \dfrac{5\pi}{16}$.

## 96 Θέμα 4 - 20361

**α.** Φέρνουμε τις ακτίνες $ΟΑ$, $ΟΒ$.

Η $ΑΒ$ είναι πλευρά κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο οπότε $\overset{\frown}{ΑΒ} = \dfrac{360^\circ}{6} = 60^\circ$.

Άρα $Α\hat{Ο}Β = 60^\circ$ επομένως το τρίγωνο $ΟΑΒ$ θα είναι ισόπλευρο πλευράς $R$. Δηλαδή $ΑΒ = R = ΟΑ = ΟΒ$ και επιπλέον θα έχει όλες του τις γωνίες ίσες με $60^\circ$.

Η $ΟΑ$ ως ακτίνα που αντιστοιχεί στο σημείο επαφής, είναι κάθετη στην εφαπτομένη $x'x$, επομένως $Ο\hat{Α}Γ = 90^\circ$.

Άρα $Β\hat{Α}Γ = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ , οπότε $ΒΓ = \dfrac{ΑΒ}{2} = \dfrac{R}{2}$.

Έτσι στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$ΑΓ^2 = ΑΒ^2 - ΒΓ^2 \Leftrightarrow ΑΓ^2 = R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2 \Leftrightarrow ΑΓ^2 = R^2 - \frac{R^2}{4} \Leftrightarrow ΑΓ^2 = \frac{3R^2}{4} \text{ , οπότε } ΑΓ = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$$

**β.** Επειδή οι $ΟΑ$, $ΒΓ$ είναι κάθετες στην $x'x$, θα είναι μεταξύ τους παράλληλες. Άρα το τετράπλευρο $ΟΑΓΒ$ είναι τραπέζιο με βάσεις $ΟΑ$, $ΒΓ$ και ύψος $ΑΓ$.

$$\text{Οπότε } (ΟΑΓΒ) = \frac{ΟΑ + ΒΓ}{2}\cdot ΑΓ = \frac{R + \dfrac{R}{2}}{2}\cdot\frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{3R}{4}\cdot\frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{8}.$$

**γ.** Το ζητούμενο εμβαδόν $E$ που ορίζεται από την χορδή $AB$ και το τόξο $\overset{\frown}{AB}$ είναι

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\cdot B\Gamma\cdot A\Gamma = \frac{1}{2}\cdot\frac{R}{2}\cdot\frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{R^2\sqrt{3}}{8}$$

**δ.** Το εμβαδόν είναι $E = (OA\Gamma B) - (O\overset{\frown}{AB})$.

Από ερώτημα **β.** έχουμε $(OA\Gamma B) = \dfrac{3\sqrt{3}R^2}{8}$.

Επίσης $(O\overset{\frown}{AB}) = \dfrac{\pi R^2\cdot 60}{360} = \dfrac{\pi R^2}{6}$ .

Άρα $E = \dfrac{3\sqrt{3}R^2}{8} - \dfrac{\pi R^2}{6} = \dfrac{9\sqrt{3}R^2 - 4\pi R^2}{24} = \dfrac{(9\sqrt{3}-4\pi)R^2}{24}$ .

## 97 Θέμα 4- 21659

**α.** Έχουμε:

- $AB = R = \lambda_6$ , οπότε $A\hat{O}B = \dfrac{360^o}{6} = 60^o$ , άρα το μέτρο του τόξου $\overset{\frown}{AB}$ είναι $\mu = 60^o$ , $(1)$.
- $B\Gamma = R\sqrt{2} = \lambda_4$ , οπότε $B\hat{O}\Gamma = \dfrac{360^o}{4} = 90^o$ , άρα το μέτρο του τόξου $\overset{\frown}{B\Gamma}$ είναι $\mu = 90^o$ , $(2)$.
- Το μήκος $\ell_1$ του τόξου $\overset{\frown}{AB}$ είναι $\ell_1 = \dfrac{\pi R\cdot 60}{180} = \dfrac{\pi R}{3}$ .
- Το μήκος $\ell_2$ του τόξου $\overset{\frown}{B\Gamma}$ είναι $\ell_2 = \dfrac{\pi R\cdot 90}{180} = \dfrac{\pi R}{2}$ .

**β.** Λόγω των $(1)$, $(2)$ είναι $A\hat{O}\Gamma = A\hat{O}B + B\hat{O}\Gamma = 150^o$ .

- Το μήκος $\ell_3$ του μη κυρτογώνιου τόξου $\overset{\frown}{A\Gamma}$ είναι

$$\ell_3 = 2\pi R - \ell_1 - \ell_2 = 2\pi R - \frac{\pi R}{3} - \frac{\pi R}{2} = \frac{12\pi R - 2\pi R - 3\pi R}{6} = \frac{7\pi R}{6} .$$

- Είναι $(O\overset{\frown}{A\Gamma}) = \dfrac{\pi R^2\cdot 150}{360} = \dfrac{5\pi R^2}{12}$

**γ.**
- $(\tau_1) = (O\overset{\frown}{AB}) - (OAB) = \dfrac{\pi R^2\cdot 60}{360} - \dfrac{R^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\pi R^2}{6} - \dfrac{R^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{(2\pi - 3\sqrt{3})R^2}{12}$
- $(\tau_2) = (O\overset{\frown}{B\Gamma}) - (OB\Gamma) = \dfrac{\pi R^2\cdot 90}{360} - \dfrac{1}{2}OB\cdot O\Gamma = \dfrac{\pi R^2}{4} - \dfrac{R^2}{2} = \dfrac{(\pi-2)R^2}{4}$

Άρα $(\tau_1) + (\tau_2) = \dfrac{(2\pi - 3\sqrt{3})R^2}{12} + \dfrac{(\pi-2)R^2}{4} = \dfrac{(2\pi + 3\pi - 6 - 3\sqrt{3})R^2}{12} = \dfrac{(5\pi - 6 - 3\sqrt{3})R^2}{12}$ .

## 98 Θέμα 4 - 21138

**α. i.** Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $OA\Lambda$ και έχουμε

$OA^2 = A\Lambda^2 - \Lambda O^2 = 2^2 - 1^2 = 3$ , οπότε $OA = \sqrt{3}$ .

**ii.** Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $OAK$ και έχουμε

$AK^2 = KO^2 + OA^2 = (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 = 6$ , οπότε $R = AK = \sqrt{6}$ .

**β.** Η ευθεία $K\Lambda$ είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής, άρα το $O$ είναι το μέσο της $AB$ , οπότε $AB = 2\cdot OA \Leftrightarrow AB = 2\sqrt{3}$ .

**i.** • Επειδή $AB = 2\sqrt{3} = \sqrt{12} = \sqrt{2\cdot 6} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{6} = R\sqrt{2}$ , η $AB$ είναι πλευρά τετραγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο $c_1$ , άρα η κεντρική του γωνία είναι $A\hat{K}B = \dfrac{360}{4} = 90^o$ .

Ο κυκλικός τομέας $K\overset{\frown}{AB}$ αντιστοιχεί στο τόξο $\overset{\frown}{AB}$ του κύκλου $c_1$ με μέτρο $\mu = A\hat{K}B = 90^o$ και ακτίνα $R=\sqrt{6}$ οπότε

$$\left(K\overset{\frown}{AB}\right) = \frac{\pi R^2 \mu}{360} = \frac{\pi\cdot(\sqrt{6})^2\cdot 90}{360} = \frac{3\pi}{2}.$$

- Επειδή $AB = 2\sqrt{3} = \rho\sqrt{3}$ , η $AB$ είναι πλευρά ισόπλευρου τριγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο $c_2$ , άρα η κεντρική του γωνία είναι $A\hat{\Lambda}B = \frac{360^o}{3} = 120^o$ .

Ο κυκλικός τομέας $\Lambda\overset{\frown}{AB}$ αντιστοιχεί στο τόξο $\overset{\frown}{AB}$ του κύκλου $c_2$ με μέτρο $\mu = A\hat{\Lambda}B = 120^o$ και ακτίνα $\rho = 2$ οπότε

$$\left(\Lambda\overset{\frown}{AB}\right) = \frac{\pi\rho^2\mu}{360} = \frac{\pi\cdot 2^2\cdot 120}{360} = \frac{4\pi}{3}.$$

**ii.** Αν $(KAB)$ και $(\Lambda AB)$ είναι τα εμβαδά των τριγώνων $KAB$ και $\Lambda AB$ τότε το εμβαδόν $E$ του σκιασμένου μηνίσκου θα είναι $E = \left(\Lambda\overset{\frown}{AB}\right) - \left(K\overset{\frown}{AB}\right) + (KAB) - (\Lambda AB)$ .

- Είναι $(KAB) = \frac{KA\cdot KB}{2} = \frac{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}{2} = 3$ και $(\Lambda AB) = \frac{AB\cdot\Lambda O}{2} = \frac{2\sqrt{3}\cdot 1}{2} = \sqrt{3}$ .
- Έχουμε από το **β.i.**, $\left(K\overset{\frown}{AB}\right) = \frac{3\pi}{2}$ και $\left(\Lambda\overset{\frown}{AB}\right) = \frac{4\pi}{3}$.

Άρα $E = \frac{4\pi}{3} - \frac{3\pi}{2} + 3 - \sqrt{3} = 3 - \sqrt{3} - \frac{\pi}{6}$.

## 99 Θέμα 4 - 21127

**α. i.** Είναι $MN = \frac{3R}{2}$ και $ON = R$ , άρα $OM = MN - ON = \frac{3R}{2} - R = \frac{R}{2}$ .

Επειδή η χορδή $AB$ έχει απόστημα $OM = \frac{R}{2}$ , είναι ίση με την πλευρά ισοπλεύρου τριγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο $(O, R)$ οπότε $AB = R\sqrt{3}$ .

**ii.** Η γωνία $A\hat{O}B$ είναι ίση με την κεντρική γωνία ισοπλεύρου τριγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο $(O, R)$ , άρα $A\hat{O}B = \frac{360^o}{3} = 120^o$ .

**β. i.** Είναι $R = 10cm$ , οπότε $AB = R\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$ και $OM = \frac{R}{2} = 5cm$ .

Το εμβαδόν του τριγώνου $AOB$ είναι $E_1 = \frac{1}{2}AB\cdot OM = \frac{1}{2}10\sqrt{3}\cdot 5 = 25\sqrt{3}\,cm^2$ .

Ο κυκλικός τομέας $O\overset{\frown}{ANB}$ αντιστοιχεί στο τόξο $\overset{\frown}{ANB}$ με μέτρο $\mu = 360^o - A\hat{O}B = 360^o - 120^o = 240^o$ οπότε το εμβαδόν του είναι

$$E_2 = \frac{\pi R^2\mu}{360} = \frac{\pi\cdot 10^2\cdot 240}{360} = \frac{200\pi}{3}cm^2.$$

Άρα το εμβαδόν $E$ που περικλείεται από την χορδή $AB$ και το τόξο $\overset{\frown}{ANB}$ είναι

$$E = E_2 + E_1 = \left(\frac{200\pi}{3} + 25\sqrt{3}\right)cm^2.$$

**ii.** Το τόξο $\overset{\frown}{ANB}$ έχει μέτρο $\mu = 240^o$ και αντιστοιχεί στο κύκλο ακτίνας $R = 10cm$ .

Οπότε το μήκος του είναι $\frac{\pi R\mu}{180} = \frac{\pi\cdot 10\cdot 240}{180} = \frac{40\pi}{3}cm$ .

## 100 Θέμα 4 - 18043

**α. i.** Είναι: • $AB = \lambda_4$ , οπότε το τόξο $\overset{\frown}{AB}$ έχει μέτρο $\frac{360^o}{4} = 90^o$ .

• $A\Delta = \lambda_6$ , οπότε το τόξο $A\Delta = \frac{360^o}{6} = 60^o$ γιατί αντιστοιχεί σε τόξο κανονικού εξάγωνου.

Επομένως $\overset{\frown}{\Delta\Gamma} = 360^o - \overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{B\Gamma} - \overset{\frown}{A\Delta} = 360^o - 90^o - 120^o - 60^o = 90^o$ .

Άρα $\Delta\Gamma = \lambda_4 = \rho\sqrt{2}$ .

**ii.** Το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος είναι $(\tau) = (O\overset{\frown}{B\Gamma}) - (OB\Gamma)$.

• $\left(O\overset{\frown}{B\Gamma}\right) = \frac{\pi\rho^2 120}{360} = \frac{\pi\rho^2}{3}$

• $(OB\Gamma) = \frac{1}{2} OB \cdot O\Gamma \cdot \eta\mu 120^o = \frac{1}{2}\rho \cdot \rho \cdot \eta\mu 60^o = \frac{1}{2}\rho \cdot \rho \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\rho^2\sqrt{3}}{4}$ .

Άρα $(\tau) = \frac{\pi\rho^2}{3} - \frac{\rho^2\sqrt{3}}{4}$ .

**β.** Αφού η ΒΓ διέρχεται από το Ο , τότε θα είναι διάμετρος παράλληλη στην ΑΔ .

Τα τόξα $\overset{\frown}{AB}$ , $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ θα είναι ίσα γιατί περιέχονται μεταξύ παραλλήλων χορδών, δηλαδή $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ .

Είναι $\overset{\frown}{BA} + \overset{\frown}{A\Delta} + \overset{\frown}{\Delta\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow 2\overset{\frown}{BA} + 60^o = 180^o \Leftrightarrow \overset{\frown}{BA} = \frac{180^o - 60^o}{2} = 60^o$ .

Άρα το μήκος του τόξου $\overset{\frown}{AB}$ είναι: $\pi\rho\frac{\mu}{180} = \pi\rho\frac{60}{180} = \frac{\pi\rho}{3}$ .

## 101 Θέμα 1 - 16097

**α. i.** Σωστό **ii.** Λάθος **iii.** Λάθος **iv.** Λάθος **v.** Λάθος

**β.** Θεώρημα Ι (απόδειξη), σελίδα 72 σχολικό βιβλίο (Σχήμα 7).

## 102 Θέμα 3 - 17908

**α.** Είναι: $\gamma^2 = 5^2 = 25$ και $\alpha^2 + \beta^2 = 4^2 + \left(\sqrt{17}\right)^2 = 16 + 17 = 33$ .

Οπότε $\gamma^2 < \alpha^2 + \beta^2$ άρα η $\hat{\Gamma} < 90^o$ , επομένως το τρίγωνο ΑΒΓ είναι οξυγώνιο, αφού απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου βρίσκεται η μεγαλύτερη γωνία του που είναι οξεία.

**β. i.** Λόγω του ερωτήματος **α.** , η γωνία Γ είναι οξεία. Οπότε από τη γενίκευση του Πυθαγορείου θεωρήματος είναι: $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha \cdot \Delta\Gamma \Leftrightarrow 25 = 33 - 2 \cdot 4 \cdot \Delta\Gamma \Leftrightarrow 8 \cdot \Delta\Gamma = 8 \Leftrightarrow \Delta\Gamma = 1$ .

Οπότε $\Delta B = B\Gamma - \Delta\Gamma = 4 - 1 = 3$.

**ii.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ , από το Πυθαγόρειο θεώρημα είναι:

$A\Delta^2 = \beta^2 - \Delta\Gamma^2 = \left(\sqrt{17}\right)^2 - 1^2 = 16$ , οπότε $A\Delta = 4$ .

Άρα $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot B\Gamma \cdot A\Delta = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8$ .

## 103 Θέμα 3 - 21783

**α.** Επειδή $\hat{\Gamma} = 90^o$ και $\hat{A} = 30^o$ είναι η $B\Gamma = \frac{AB}{2} = \frac{2}{2} = 1$ .

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ , από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε

$A\Gamma^2 = AB^2 - B\Gamma^2 = 2^2 - 1^2 = 3$ , οπότε $A\Gamma = \sqrt{3}$ .

**β.** Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $AB\Gamma$ είναι ορθογώνια και έχουν τη γωνία $\hat{A}$ κοινή, οπότε είναι όμοια.

Άρα $\dfrac{A\Delta}{AB}=\dfrac{AB}{A\Gamma}\Leftrightarrow\dfrac{A\Delta}{2}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow A\Delta=\dfrac{4}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow A\Delta=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ .

**γ.** Το $K$ είναι μέσο του $A\Delta$ , οπότε η $AK=\dfrac{A\Delta}{2}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ .

Άρα $(KAB)=\dfrac{1}{2}\cdot AB\cdot AK\cdot \eta\mu 30^{o}=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ .

## 104 Θέμα 3 - 21102

**α. i.** Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο $A\Delta\Gamma$:

$A\Gamma^2=A\Delta^2+\Delta\Gamma^2=\alpha^2+\alpha^2=2\alpha^2$ , άρα $A\Gamma=\sqrt{2\alpha^2}=\alpha\sqrt{2}$ .

**ii.** Είναι $\Delta E=\dfrac{\Delta\Gamma}{2}=\dfrac{\alpha}{2}$.

Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο $A\Delta E$:

$AE^2=A\Delta^2+\Delta E^2=\alpha^2+\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)^2=\alpha^2+\dfrac{\alpha^2}{4}=\dfrac{5\alpha^2}{4}$ , άρα $AE=\sqrt{\dfrac{5\alpha^2}{4}}=\alpha\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

**β.** Η προβολή του $AE$ στην $A\Gamma$ είναι το τμήμα $AZ$.

Η γωνία $\hat{A}_1$ είναι οξεία γωνία επειδή οι πλευρές της περιέχονται στην ορθή γωνία $B\hat{A}\Delta$ του τετραγώνου.

Είναι $E\Gamma=\dfrac{\Delta\Gamma}{2}=\dfrac{\alpha}{2}$.

Εφαρμόζουμε το γενικευμένο Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο $AE\Gamma$:

$$E\Gamma^2=AE^2+A\Gamma^2-2\cdot A\Gamma\cdot AZ\Leftrightarrow\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2=\left(\frac{\alpha\sqrt{5}}{2}\right)+\left(\alpha\sqrt{2}\right)^2-2\cdot\alpha\sqrt{2}\cdot AZ\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\alpha^2}{4}=\frac{5\alpha^2}{4}+2\alpha^2-2\alpha\sqrt{2}\cdot AZ\Leftrightarrow\alpha^2=5\alpha^2+8\alpha^2-8\alpha\sqrt{2}\cdot AZ$$

$$\Leftrightarrow 8\alpha\sqrt{2}\cdot AZ=12\alpha^2\Leftrightarrow AZ=\frac{12\alpha^2}{8\alpha\sqrt{2}}\Leftrightarrow AZ=\frac{3\alpha\sqrt{2}}{4}.$$

## 105 Θέμα 3 - 19037

**α.**
- $\Delta B=\dfrac{1}{5}AB$ , οπότε $A\Delta=\dfrac{4}{5}AB$
- $E\Gamma=\dfrac{1}{4}B\Gamma$ , οπότε $BE=\dfrac{3}{4}B\Gamma$
- $Z\Gamma=\dfrac{1}{2}A\Gamma$ , οπότε $AZ=\dfrac{1}{2}A\Gamma$

Τα τρίγωνα $\Delta BE$ και $AB\Gamma$ έχουν κοινή τη γωνία $\hat{B}$ , οπότε

$$\frac{(\Delta BE)}{(AB\Gamma)}=\frac{\Delta B\cdot BE}{AB\cdot B\Gamma}\Leftrightarrow\frac{(\Delta BE)}{(AB\Gamma)}=\frac{\frac{1}{5}AB\frac{3}{4}B\Gamma}{AB\cdot B\Gamma}\Leftrightarrow\frac{(\Delta BE)}{(AB\Gamma)}=\frac{3}{20}$$

Τα τρίγωνα $E\Gamma Z$ και $AB\Gamma$ έχουν κοινή τη γωνία $\hat{\Gamma}$ , οπότε

$$\frac{(E\Gamma Z)}{(AB\Gamma)}=\frac{E\Gamma\cdot Z\Gamma}{B\Gamma\cdot A\Gamma}\Leftrightarrow\frac{(E\Gamma Z)}{(AB\Gamma)}=\frac{\frac{1}{4}B\Gamma\frac{1}{2}A\Gamma}{B\Gamma\cdot A\Gamma}\Leftrightarrow\frac{(E\Gamma Z)}{(AB\Gamma)}=\frac{1}{8}$$

Τα τρίγωνα $ZA\Delta$ και $AB\Gamma$ έχουν κοινή τη γωνία $\hat{A}$ , οπότε

$$\frac{(\mathrm{Z A \Delta})}{(\mathrm{AB\Gamma})}=\frac{\mathrm{A\Delta}\cdot\mathrm{AZ}}{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{A\Gamma}}\Leftrightarrow\frac{(\mathrm{ZA\Delta})}{(\mathrm{AB\Gamma})}=\frac{\frac{4}{5}\mathrm{AB}\frac{1}{2}\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{A\Gamma}}\Leftrightarrow\frac{(\mathrm{ZA\Delta})}{(\mathrm{AB\Gamma})}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$$

**β.** Από το σχήμα έχουμε

$$(\mathrm{AB\Gamma})=(\mathrm{\Delta BE})+(\mathrm{E\Gamma Z})+(\mathrm{ZA\Delta})+(\mathrm{\Delta EZ})$$

Από το **α.** ερώτημα είναι:

$$(\mathrm{\Delta BE})=\frac{3}{20}(\mathrm{AB\Gamma})=\frac{3}{20}\cdot 120=18$$

$$(\mathrm{E\Gamma Z})=\frac{1}{8}(\mathrm{AB\Gamma})=\frac{1}{8}\cdot 120=15$$

$$(\mathrm{ZA\Delta})=\frac{4}{10}(\mathrm{AB\Gamma})=\frac{2}{5}\cdot 120=48$$

Οπότε:

$$(\mathrm{AB\Gamma})=18+15+48+(\mathrm{\Delta EZ})\Leftrightarrow(\mathrm{\Delta EZ})=39$$