

Αναστάσιος Χ. Μπάρλας

Μαθηματικά

Β' Λυκείου

Ομάδα προσανατολισμού
Θετικών σπουδών

Τράπεζα
Θεμάτων
2022

ενημέρωση 6/5/2022

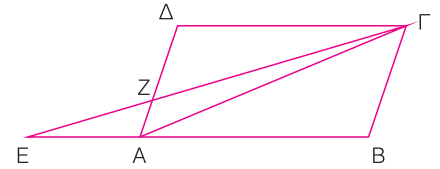
ΘΕΜΑΤΑ ΤΡΑΠΕΖΑΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

3. Πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα

1 Θέμα 2 - 21165

Θεωρούμε το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και έστω $\vec{AB} = \vec{\alpha}$ και $\vec{A\Delta} = \vec{\beta}$.

Τα σημεία E και Z είναι τέτοια ώστε $\vec{AE} = -\frac{1}{2} \cdot \vec{AB}$ και $\vec{AZ} = \frac{1}{3} \cdot \vec{A\Delta}$.



α. Να αποδείξετε ότι: $\vec{EZ} = \frac{1}{2} \cdot \vec{\alpha} + \frac{1}{3} \cdot \vec{\beta}$ και $\vec{Z\Gamma} = \vec{\alpha} + \frac{2}{3} \cdot \vec{\beta}$.

β. Να αποδείξετε ότι: $\vec{Z\Gamma} = 2\vec{EZ}$.

γ. Να δείξετε ότι τα σημεία Z , E και Γ είναι συνευθειακά.

2 Θέμα 2 - 15010

α. Δίνονται τα μη συνευθειακά σημεία του επιπέδου A , B , Γ και τα διανύσματα $\vec{B\Delta}$ και $\vec{\Gamma E}$ τέτοια ώστε $\vec{B\Delta} = \vec{BA} + \vec{B\Gamma}$ και $\vec{\Gamma E} = \vec{\Gamma A} + \vec{\Gamma B}$.

i. Να δείξετε ότι $\vec{A\Delta} = \vec{B\Gamma}$ και $\vec{AE} = \vec{\Gamma B}$.

ii. Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{A\Delta}$ και \vec{AE} είναι αντίθετα.

β. Να δικαιολογήσετε γιατί τα σημεία A , Δ και E είναι συνευθειακά.

4. Συντεταγμένες στο επίπεδο

3 Θέμα 2 - 14666

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, -3)$ και $\vec{\beta} = (-2, -1)$.

α. Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{u} = 3\vec{\alpha} - 5\vec{\beta}$ και $\vec{v} = 5\vec{\alpha} - 9\vec{\beta}$.

β. Αν $\vec{w} = 2\vec{u} - \vec{v}$, να γράψετε το \vec{w} ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$.

γ. Αν τα $\vec{\beta}$, \vec{w} , \vec{u} είναι τα διανύσματα θέσης των σημείων K , Λ , και M αντιστοίχως, να αποδείξετε ότι τα σημεία αυτά είναι συνευθειακά.

4 Θέμα 2 - 16580

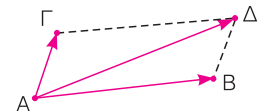
Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνονται τα σημεία $A(2, 4)$, $B(11, 5)$, $\Gamma(3, 7)$ και ένα σημείο Δ ώστε το $A\Delta$ να είναι ίσο με το άθροισμα των \vec{AB} και $\vec{A\Gamma}$.

Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες:

α. των διανυσμάτων \vec{AB} και $\vec{A\Gamma}$.

β. του διανύσματος $\vec{A\Delta}$.

γ. του σημείου Δ .



5 Θέμα 2 – 17070

Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνονται τα σημεία $A(3, 4)$, $B(2, 1)$, $\Gamma(3, -1)$ και $\Delta(4, 2)$.

- Να σχεδιάσετε τα παραπάνω σημεία A , B , Γ και Δ .
- Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων \vec{AB} και $\vec{\Delta\Gamma}$.
- Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

6 Θέμα 2 – 16581

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνονται τα σημεία $A(-1, 6)$, $B(1, 2)$ και $\Gamma(3, -2)$.

- Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων \vec{AB} και $\vec{B\Gamma}$.
- Να αποδείξετε ότι τα σημεία A , B και Γ είναι συνευθειακά.
- Να αποδείξετε ότι το B είναι μέσο του ευθύγραμμου τμήματος $A\Gamma$.

7 Θέμα 2 – 16579

Δίνονται τα σημεία $A(2, 1)$ και $B(6, 7)$ του καρτεσιανού επιπέδου Oxy .

- Να σχεδιάσετε το διάνυσμα \vec{AB} .
- Αν $\vec{v} = \vec{AB}$ να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος \vec{v} .
- Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{u} = (-8, -12)$ και \vec{v} του β. ερωτήματος είναι αντίρροπα.

8 Θέμα 2 – 16147

Δίνονται τα διανύσματα: $\vec{a} = 3\vec{i} + 3\sqrt{3}\vec{j}$, $\vec{b} = \sqrt{2}\vec{i}$, $\vec{\gamma} = -3\vec{j}$ και $\vec{\delta} = (-1, 1)$.

- Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης καθενός από τα διανύσματα \vec{a} , \vec{b} και $\vec{\delta}$.
- Να γράψετε τη γωνία που σχηματίζει καθένα από τα διανύσματα \vec{a} , \vec{b} , $\vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$ με το θετικό ημιάξονα Ox .
- Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων \vec{a} και $\vec{\gamma}$.

9 Θέμα 2 – 19038

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (2, 3)$, $\vec{b} = (-1, 1)$ και $\vec{\gamma} = (-5, -5)$.

- Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα \vec{b} με τον άξονα $x'x$.
- Να αποδείξετε ότι $|\vec{\gamma}| = 5|\vec{b}|$.
- Να υπολογίσετε τους πραγματικούς αριθμούς λ , μ ώστε το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ να γραφεί στη μορφή $\vec{\gamma} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$.

10 Θέμα 2 – 16151

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (3, 3)$ και $\vec{b} = (-\sqrt{3}, 1)$.

- Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης των διανυσμάτων \vec{a} και \vec{b} καθώς και τη γωνία που σχηματίζει καθένα από αυτά με τον άξονα $x'x$.
- Να βρείτε τη γωνία (\vec{a}, \vec{b}) .

11 Θέμα 4 – 17076

Δίνονται τα σημεία $A(-3, -1)$, $B(0, 3)$ και $M(x, y)$ του καρτεσιανού επιπέδου Oxy .

- Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων \vec{AM} , \vec{MB} και \vec{AB} .
- Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων \vec{AM} , \vec{MB} και \vec{AB} .
- Να αποδείξετε ότι $|\vec{AM}| + |\vec{MB}| \geq 5$.
- Θεωρήστε τον ισχυρισμό: «Υπάρχει ζεύγος πραγματικών αριθμών (x, y) τέτοιο ώστε να ισχύει $\sqrt{(x+3)^2 + (y+1)^2} + \sqrt{x^2 + (y-3)^2} = 4$ ».

Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

12 Θέμα 4 – 17077

Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy τα σημεία A και B έχουν διανύσματα θέσεως

$$\vec{OA} = 2\vec{i} + \lambda\vec{j} \quad \text{και} \quad \vec{OB} = (\lambda+1)\vec{i} + (\lambda+3)\vec{j}, \quad \text{με } \lambda \in \mathbb{R}$$

- Να αποδείξετε ότι $\vec{AB} = (\lambda-1)\vec{i} + 3\vec{j}$.
- Να βρείτε την απόσταση των σημείων A και B ως συνάρτηση του λ .
- Για ποιες τιμές του λ η απόσταση των σημείων A και B είναι ίση με 5;
- Θεωρήστε τον ισχυρισμό: «Υπάρχει πραγματικός αριθμός λ τέτοιος ώστε η απόσταση των σημείων A και B να παίρνει τη μικρότερη δυνατή τιμή.»

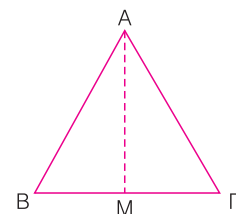
Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

5. Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων**13 Θέμα 2 – 16141**

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ πλευράς 10 και το μέσο M της πλευράς $B\Gamma$.

- Να βρεθούν τα μέτρα των γωνιών:

- | | | |
|----------------------------|---------------------------------|----------------------------------|
| i. (\vec{AB}, \vec{AM}) | ii. $(\vec{AM}, \vec{B\Gamma})$ | iii. $(\vec{AM}, \vec{A\Gamma})$ |
| iv. (\vec{BM}, \vec{AM}) | v. $(\vec{AM}, \vec{B\Gamma})$ | |



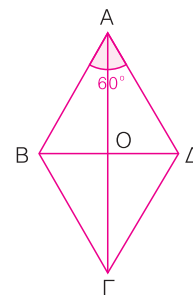
- Να υπολογιστούν τα εσωτερικά γινόμενα:

- | | | |
|-----------------------------------|------------------------------------|-------------------------------------|
| i. $\vec{AM} \cdot \vec{B\Gamma}$ | ii. $\vec{AM} \cdot \vec{A\Gamma}$ | iii. $\vec{AM} \cdot \vec{B\Gamma}$ |
|-----------------------------------|------------------------------------|-------------------------------------|

14 Θέμα 2 – 16144

Δίνεται ρόμβος $AB\Gamma\Delta$ με κέντρο O , πλευρά 4 και $\hat{A} = 60^\circ$. Να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα :

- | | | |
|-----------------------------------|--|-----------------------------------|
| α. $\vec{AB} \cdot \vec{A\Delta}$ | β. $\vec{A\Delta} \cdot \vec{B\Gamma}$ | γ. $\vec{O\Delta} \cdot \vec{AO}$ |
| δ. $\vec{O\Delta} \cdot \vec{OB}$ | ε. $\vec{A\Delta} \cdot \vec{A\Gamma}$ | |

**15 Θέμα 2 – 15038**

Θεωρούμε διανύσματα \vec{a} , $\vec{\beta}$ τέτοια ώστε $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{\beta}| = 4$ και $(\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$.

- Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων \vec{a} , $\vec{\beta}$.
- Να βρείτε τα \vec{a}^2 και $\vec{\beta}^2$.
- Να αποδείξετε ότι $(3\vec{a} - \vec{\beta}) \cdot (\vec{a} - 3\vec{\beta}) = 15$.

16 Θέμα 2 - 20888

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$, για τα οποία ισχύουν: $|\vec{\alpha}|=4$, $|\vec{\beta}|=5$, $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})=\frac{2\pi}{3}$ και $\vec{\gamma}=2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}$.

Να υπολογίσετε:

- το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$.
- το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$.

17 Θέμα 2 - 15825

Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=4$, $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})=\frac{\pi}{3}$ και το $\vec{\gamma}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}$.

- Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}=4$.
- Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}=0$.
- Να βρείτε τη $(\vec{\alpha}, \vec{\gamma})$.

18 Θέμα 2 - 16428

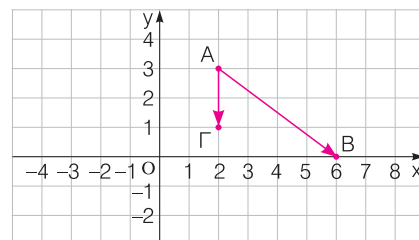
Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με: $|\vec{\alpha}|=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $|\vec{\beta}|=\frac{1}{2}$ και $|3\vec{\alpha}+2\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}-2\vec{\beta}|$.

- Να αποδείξετε ότι: $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}=-\frac{3}{8}$.
- Να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

19 Θέμα 2 - 17075

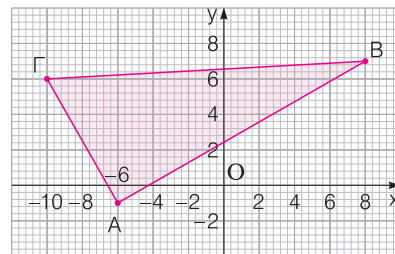
Στο διπλανό σχήμα δίνονται τα διανύσματα \vec{AB} και \vec{AG} του καρτεσιανού επιπέδου Oxy .

- Να αποδείξετε ότι $\vec{AB}=(4, -3)$ και $\vec{AG}=(0, -2)$.
- Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων \vec{AB} και \vec{AG} .

**20 Θέμα 2 - 15996**

Δίνονται τα σημεία $A(-6, -1)$, $B(8, 7)$, $\Gamma(-10, 6)$, τα οποία ορίζουν τρίγωνο $AB\Gamma$.

- Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων \vec{AB} , $\vec{B\Gamma}$ και του αθροίσματός τους $\vec{AB}+\vec{B\Gamma}$.
- Ένας μαθητής βλέποντας το τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχυρίστηκε ότι είναι ορθογώνιο. Να ελέγξετε την αλήθεια του ισχυρισμού.

**21 Θέμα 2 - 15073**

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(1, 2)$ και $\vec{\beta}=(2, 3)$.

- Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\gamma}=2\vec{\alpha}+\vec{\beta}$.
- Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$.
- Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$.

22 Θέμα 2 – 15463

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{AB} = (2, 1)$ και $\vec{AG} = (3, -1)$.

α. Να αποδείξετε ότι $\vec{BG} = (1, -2)$.

β. Να αποδείξετε ότι $\vec{AB} \perp \vec{BG}$.

γ. Να αποδείξετε ότι $|\vec{AB}| = |\vec{BG}|$.

23 Θέμα 2 – 16427

Δίνονται τα σημεία $A(-2, 3)$, $B(0, 8)$, $\Gamma(5, 3)$ και $\Delta(10, 5)$. Να υπολογίσετε:

α. το εσωτερικό γινόμενο $\vec{AB} \cdot \vec{\Gamma\Delta}$.

β. τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{u} = \vec{AB} + \vec{\Gamma\Delta}$ με τον άξονα $x'x$.

24 Θέμα 2 - 15186

Δίνονται τα σημεία $A(2, 1)$, $B(6, 3)$, $\Delta(1, -2)$ και $\Gamma(9, 2)$.

Να αποδείξετε ότι:

α. Το μέσο M του τμήματος AB έχει συντεταγμένες $(4, 2)$ και το μέσο N του τμήματος $\Gamma\Delta$ έχει συντεταγμένες $(5, 0)$.

β. $\vec{MN} = (1, -2)$ και $\vec{\Delta\Gamma} = (8, 4)$.

γ. $\vec{MN} \perp \vec{\Delta\Gamma}$.

25 Θέμα 2 - 14586

Δίνονται τα σημεία $A(1, 2)$, $B(3, 4)$ και $\Gamma(5, -2)$.

α. Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων \vec{AB} , \vec{AG} και να αποδείξετε ότι η γωνία \hat{A} είναι ορθή.

β. Αν M είναι το μέσο του $B\Gamma$, να βρείτε τα μέτρα των \vec{AM} και \vec{BG} .

γ. Να γραφεί το \vec{BG} ως γραμμικός συνδυασμός των \vec{AG} και \vec{AM} .

26 Θέμα 2 - 20685

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u} = (1, 1)$, $\vec{w} = (-10, 2)$ και τα σημεία $A(-1, 2)$, $B(\beta, 0)$, $\Gamma(0, \gamma)$. Τα διανύσματα

\vec{u} , \vec{AB} είναι κάθετα και το διάνυσμα \vec{w} είναι παράλληλο στο διάνυσμα \vec{AG} .

α. Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος \vec{AB} και να αποδείξετε ότι $\beta = 1$.

β. Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος \vec{AG} και να αποδείξετε ότι $\gamma = \frac{9}{5}$.

γ. Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{AB} \cdot \vec{AG}$.

27 Θέμα 2 – 14953

Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(-2, 5)$, $B(7, 8)$, $\Gamma(1, -4)$.

α. Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων \vec{AB} και \vec{AG} .

β. Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{AB} \cdot \vec{AG}$.

γ. Να βρείτε, σε μοίρες, τη γωνία \hat{BAG} .

28 Θέμα 2 – 15379

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (1, 3)$, $\vec{\beta} = (3, -1)$.

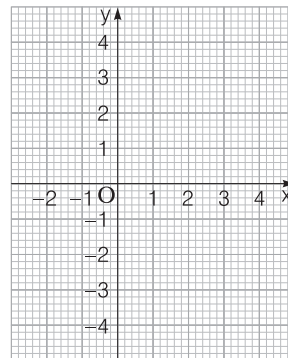
Να υπολογίσετε:

- α.** το εσωτερικό γινόμενο $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$ και την γωνία μεταξύ των δύο διανυσμάτων \vec{a} , $\vec{\beta}$.
β. το διάνυσμα $\vec{\gamma} = 2\vec{a} - \vec{\beta}$.

29 Θέμα 2 – 15317

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{v} = (3, 0)$ και $\vec{w} = (-3, 4)$.

- α.** Να δείξετε ότι τα διανύσματα δεν είναι παράλληλα.
β. i. Στο διπλανό σύστημα συντεταγμένων να σχεδιάσετε τα διανύσματα \vec{v} και \vec{w} .
ii. Να προσδιορίσετε το είδος της γωνίας θ που σχηματίζουν τα διανύσματα.

**30 Θέμα 2 – 16426**

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (2, -1)$ και $\vec{\beta} = (-3, 2)$.

- α.** Να υπολογίσετε το γινόμενο $\vec{a} \cdot (2\vec{a} - \vec{\beta})$.
β. Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{\gamma} = (x, y)$ όταν $\vec{\gamma} \perp \vec{a}$ και $|\vec{\gamma}| = \sqrt{5}$.

31 Θέμα 4 – 18547

Δίνονται τα σημεία $A(0, -1)$, $B(\lambda, 1)$ και $\Gamma(\lambda - 2, \lambda - 3)$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α.** Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε :
i. Τα σημεία A , B και Γ να είναι κορυφές τριγώνου.
ii. Το τρίγωνο $AB\Gamma$ να είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 90^\circ$.
β. Για $\lambda = -2$, να βρείτε:
i. Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{AB} \cdot \vec{A\Gamma}$.
ii. Το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

32 Θέμα 4 – 15658

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (2, -2)$ και $\vec{\beta} = (1, 1)$ τα οποία έχουν κοινή αρχή το σημείο $K(2, 1)$.

- α.** Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα \vec{a} και $\vec{\beta}$ είναι κάθετα.
β. Αν το σημείο A είναι το πέρας του διανύσματος \vec{a} , B είναι το πέρας του διανύσματος $\vec{\beta}$ και $\Gamma(x_\Gamma, y_\Gamma)$ ένα τυχαίο σημείο της ευθείας AB ,
i. να δείξετε ότι οι συντεταγμένες των σημείων A και B είναι $A(4, -1)$ και $B(3, 2)$.
ii. να δείξετε ότι $3x_\Gamma + y_\Gamma = 11$.
iii. να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου $\Gamma(x_\Gamma, y_\Gamma)$, αν ισχύει ότι το Γ είναι εσωτερικό σημείο του ευθύγραμμου τμήματος AB και $|\vec{K\Gamma}| = \frac{1}{2} |\vec{AB}|$.

33 Θέμα 4 – 15042

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημείο του επιπέδου M , τέτοιο ώστε:

$$\vec{AB} - 2\vec{AM} + \vec{A\Gamma} = \vec{0}$$

- α.** Να αποδείξετε ότι τα σημεία B , Γ , M είναι συνευθειακά.
- β.** Να αποδείξετε ότι το M είναι το μέσο του $B\Gamma$.
- γ.** Έστω πραγματικοί αριθμοί κ , λ τέτοιοι ώστε $\vec{AB} \cdot \vec{A\Gamma} = \kappa$ και $\vec{AM} \cdot \vec{B\Gamma} = \lambda$.
Αν επιπλέον είναι γνωστό ότι για τα μη παράλληλα διανύσματα $\vec{A\Gamma}$, \vec{AB} ισχύει ότι $\kappa \vec{A\Gamma} = \lambda \vec{AB}$, τότε:
 - i.** Να αποδείξετε ότι $\kappa = \lambda = 0$.
 - ii.** Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές. Να προσδιορίσετε την ορθή γωνία και τις πλευρές που είναι ίσες.

6. Εξίσωση ευθείας**34 Θέμα 2 – 15271**

Δίνονται τα σημεία $A(-3, 2)$, $B(1, 6)$ και $\Gamma(-13, -7)$.

- α.** Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα A , B .
- β.** Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα A , B έχει εξίσωση $y = x + 5$.
- γ.** Να αιτιολογήσετε γιατί το σημείο Γ δεν είναι πάνω στην AB .

35 Θέμα 2 – 15986

Δίνονται τα σημεία $A(1, 1)$ και $B(2, 3)$.

- α. i.** Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα A , B .
ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας AB είναι η $\varepsilon: y = 2x - 1$.
- β.** Να εξετάσετε αν το σημείο $\Gamma(2^{100}, 5)$ ανήκει στην ευθεία ε .

36 Θέμα 2 – 16002

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $A(3, -2)$ και $\Gamma(5, 2)$. Αν το σημείο $M(3, \frac{1}{2})$, είναι το μέσο της $B\Gamma$, τότε:

- α.** Να αποδείξετε ότι $B(1, -1)$.
- β.** Να βρείτε το μήκος της πλευράς $B\Gamma$.
- γ.** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας $A\Gamma$.

37 Θέμα 2 – 16774

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές τα σημεία $A(2, 5)$, $B(3, 6)$ και $\Gamma(-1, -2)$.

- α.** Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας $B\Gamma$.
- β.** Να βρείτε την εξίσωση του ύψους που άγεται από το A .
- γ.** Να βρείτε την γωνία που σχηματίζει η ευθεία AB με τον άξονα $x'x$.

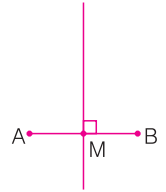
38 Θέμα 2 – 20885

Η ευθεία ε διέρχεται από το σημείο $A(-3, -1)$ και σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\frac{3\pi}{4}$.

- α.** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε .
- β.** Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου, που σχηματίζει η ευθεία ε με τους άξονες $x'x$ και $y'y$, είναι:
 $E = 8$.

39 Θέμα 2 – 15027

Δίνονται τα σημεία $A(1, -1)$ και $B(3, 5)$ όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



- α.** Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας AB .
- β.** Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου M του τμήματος AB .
- γ.** Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου του τμήματος AB .

40 Θέμα 2 – 18351

Δίνονται τα σημεία $A(-1, 5)$, $B(3, 3)$. Να υπολογίσετε:

- α.** Τις συντεταγμένες του μέσου M του τμήματος AB .
- β.** Τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας AB .
- γ.** Την εξίσωση της μεσοκαθέτου η του τμήματος AB .

41 Θέμα 2 – 15044

Δίνονται τα σημεία $A(0, 5)$ και $B(6, -1)$.

- α. i.** Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A και B .
- ii.** Να αποδείξετε ότι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AB , είναι το σημείο $M(3, 2)$.
- β.** Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκάθετης ευθείας ϵ του ευθύγραμμου τμήματος AB .

42 Θέμα 2 – 15657

Δίνονται οι ευθείες: $\epsilon_1: 2x + y = 6$ και $\epsilon_2: x - 2y = -2$.

- α.** Να βρείτε το κοινό τους σημείο M .
- β.** Να δείξετε ότι οι ευθείες ϵ_1 , ϵ_2 και $\epsilon_3: 3x - y = 4$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

43 Θέμα 2 – 18236

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $A(-1, 5)$ και $B(2, 1)$. Αν οι πλευρές $A\Gamma$ και $B\Gamma$ βρίσκονται πάνω στις ευθείες $\epsilon_1: y = -x + 4$ και $\epsilon_2: y = -\frac{1}{2}x + 2$ αντίστοιχα, τότε:

- α.** Να αποδείξετε ότι $\Gamma(4, 0)$.
- β.** Να βρείτε:
 - i.** το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας $A\Gamma$
 - ii.** την εξίσωση του ύψους BD .

44 Θέμα 2 – 16766

Δίνονται οι ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 με εξισώσεις $x - 3y = 4$ και $9x + 3y = 6$ αντίστοιχα.

- α.** Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 είναι κάθετες.
- β.** Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 τέμνονται στο σημείο $A(1, -1)$.
- γ.** Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο A και είναι κάθετη στον άξονα $x'x$.

45 Θέμα 2 – 21662

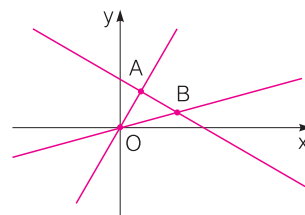
Δίνεται η ευθεία $\epsilon: -x + y - 2 = 0$ και τα σημεία $A(-5, 1)$ και $B(-3, 5)$.

- α.** Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου A ως προς το σημείο B .
- β.** Να βρείτε:
 - i.** την εξίσωση της ευθείας ϵ' που διέρχεται από το B και είναι κάθετη στην ϵ .
 - ii.** το σημείο τομής των ευθειών ϵ και ϵ' .
 - iii.** το συμμετρικό του σημείου B ως προς την ευθεία ϵ .

46 Θέμα 4 – 15029

Στο διπλανό σχήμα δίνονται τα σημεία $O(0, 0)$, $A(1, \sqrt{3})$, $B(\sqrt{3}+1, \sqrt{3}-1)$.

- Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας OA καθώς και τη γωνία ω που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$.
- Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας AB καθώς και τη γωνία φ που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$.
- Να δείξετε ότι το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με $\hat{A} = 90^\circ$.
- Να δείξετε ότι $\varepsilon\phi 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$.

**47 Θέμα 4 – 18568**

Δίνονται τα σημεία $A(2, 4)$, $B(-1, 0)$ και $\Gamma(3, -2)$.

- Να αποδείξετε ότι τα σημεία A , B , Γ αποτελούν κορυφές τριγώνου $AB\Gamma$.
- Αν η ευθεία AB τέμνει τον άξονα $y'y$ σε ένα σημείο Δ και η ευθεία $A\Gamma$ τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα σημείο E , τότε:
 - Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Δ και E .
 - Να αποδείξετε ότι $\overline{A\Delta} = 2\overline{AB}$ και $\overline{AE} = 2\overline{E\Gamma}$.
- Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΔE είναι παράλληλη της $B\Gamma$.

48 Θέμα 4 – 15275

Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε το σημείο $M(2, 1)$.

- Μια ευθεία ε με συντελεστή διεύθυνσης λ διέρχεται από το M . Να βρείτε:
 - Την εξίσωση της.
 - Για ποιες τιμές του λ η ευθεία σχηματίζει τρίγωνο με τους άξονες.
- Έστω ότι η ευθεία ε τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία A , B αντίστοιχα.
 - Να βρείτε, με τη βοήθεια του λ , τα μήκη των τμημάτων OA , OB .
 - Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η ευθεία σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο.
 - Να υπολογίσετε, σε κάθε περίπτωση, το εμβαδόν του ισοσκελούς τριγώνου που σχηματίζεται.

49 Θέμα 4 – 14978

Δίνονται τα σημεία $A(1, 1)$, $B(3, 3)$.

- Αν $M(x, y)$ σημείο του επιπέδου, να βρείτε τις αποστάσεις d_1 , d_2 του M από τα A και B αντίστοιχα.
- Να γράψετε τη σχέση που πρέπει να πληρούν οι d_1 , d_2 , ώστε το σημείο M να ανήκει στη μεσοκάθετο του AB .
- Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου του AB .
- Να βρείτε σημείο Σ τέτοιο ώστε το τρίγωνο ΣAB να είναι ισόπλευρο.

50 Θέμα 4 – 15475

Δύο εργοστάσια A και B τα οποία σε ένα σύστημα συντεταγμένων έχουν συντεταγμένες $A(2, 1)$, $B(4, 3)$, βρίσκονται κοντά σε μια ακτή που πρόκειται να κατασκευαστεί μια αποβάθρα και θα εξυπηρετεί τα δύο εργοστάσια.



- Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που συνδέει τα δύο εργοστάσια.
- Αν η ακτή είναι ευθύγραμμη με εξίσωση $\varepsilon: y = 2x - 7$, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου της ακτής στο οποίο πρέπει να τοποθετηθεί η αποβάθρα ώστε να απέχει εξ ίσου από τα δύο εργοστάσια.
- Αν το ζητούμενο σημείο του ερωτήματος β. είναι $N(4, 1)$, να βρείτε πόσο απέχει το κάθε εργοστάσιο από το σημείο αυτό.

51 Θέμα 4 – 15194

Δίνονται τα σημεία του επιπέδου $A(1, 1)$, $B(4, 4)$ και $\Gamma(3, 1)$.

- α.** Να δείξετε ότι τα σημεία αυτά σχηματίζουν τρίγωνο.
- β.** Να δείξετε ότι η μεσοκάθετος του τμήματος $B\Gamma$ είναι η ευθεία $\varepsilon: y = -\frac{1}{3}x + \frac{11}{3}$.
- γ.** Να βρείτε σημείο K της ευθείας ε του **β.** ερωτήματος τέτοιο ώστε $(KA) = (KB)$. Τι ιδιότητα έχει το σημείο K ;

52 Θέμα 4 – 17078

Δίνονται τα σημεία $A(3, 2\alpha)$, $B(4, \alpha)$, $\Gamma(\alpha+1, 1-\alpha)$ και $\Delta(\alpha, 1)$, με $\alpha \in \mathbb{R}$.

- α.** Να αποδείξετε ότι:
- Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία A και B έχει εξίσωση $y = -\alpha x + 5\alpha$.
 - Τα σημεία Γ και Δ ανήκουν στην ευθεία AB αν και μόνο αν $\alpha = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$.
 - Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο όταν $\alpha \neq \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$.
- β.** Θεωρήστε τον ισχυρισμό: «Υπάρχει πραγματικός αριθμός α ώστε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ να είναι τετράγωνο.» Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

53 Θέμα 4 - 21160

Σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy θεωρούμε το τρίγωνο που ορίζεται από τα σημεία $O(0, 0)$, $B(\kappa, 0)$ και $\Gamma(0, 2\kappa)$ όπου κ θετικός πραγματικός αριθμός. Εξωτερικά του τριγώνου $OB\Gamma$ κατασκευάζουμε τετράγωνα $OB\Delta E$ και $OGZH$, τότε:

- α.** Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που ανήκουν τα ευθύγραμμα τμήματα $\Gamma\Delta$ και BZ .
- β.** Να βρεθεί η εξίσωση του ύψους του τριγώνου $OB\Gamma$ που διέρχεται από το O .
- γ.** Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $\Gamma\Delta$, BZ και το ύψος του **β.** ερωτήματος διέρχονται από το ίδιο σημείο.

7. Γενική μορφή εξίσωσης ευθείας**54 Θέμα 4 – 15253**

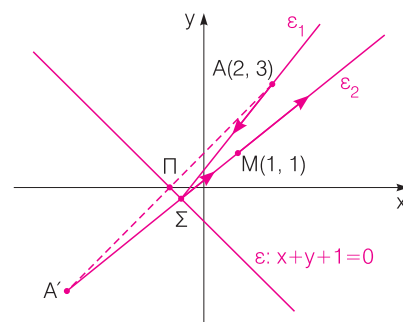
Δίνεται η εξίσωση $(\mu^2 - 1)x + (3\mu^2 - 2\mu - 1)y - 5\mu^2 + 4\mu + 1 = 0$, (1), όπου $\mu \in \mathbb{R}$.

- α.** Να βρείτε για ποιες τιμές του μ η (1) παριστάνει ευθεία ε .
- β.** Να βρείτε για ποιες τιμές του μ οι ευθείες ε :
- είναι παράλληλες στον $x'x$.
 - είναι παράλληλες στον $y'y$.
 - διέρχονται από το $(0, 0)$.
- γ.** Να δείξετε ότι όλες οι ευθείες ε που προκύπτουν από την (1) διέρχονται από σταθερό σημείο.

55 Θέμα 4 – 15439

Μία φωτεινή ακτίνα διερχόμενη από το σημείο $A(2, 3)$ και προσπίπτουσα στην ευθεία ε με εξίσωση $x + y + 1 = 0$, μετά την ανάκλασή της διέρχεται από το σημείο $M(1, 1)$.

- α. i.** Να αποδείξετε ότι η προβολή του σημείου A πάνω στην ευθεία ε είναι το σημείο $\Pi(-1, 0)$.
- ii.** Να αποδείξετε ότι το συμμετρικό του σημείου A ως προς την ευθεία ε , είναι το σημείο $A'(-4, -3)$.



- β. i.** Αν γνωρίζετε ότι η ανακλώμενη ακτίνα είναι η ευθεία ε_2 , η οποία διέρχεται από τα σημεία A' , Σ , M , τότε να βρείτε την εξίσωσή της.
- ii.** Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου πρόσπτωσης Σ της φωτεινής ακτίνας ε_1 πάνω στην ευθεία ε .
- γ.** Αν $\Sigma\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$, τότε να βρείτε την εξίσωση της προσπίπτουσας ακτίνας ε_1 .

56 Θέμα 4 – 16003

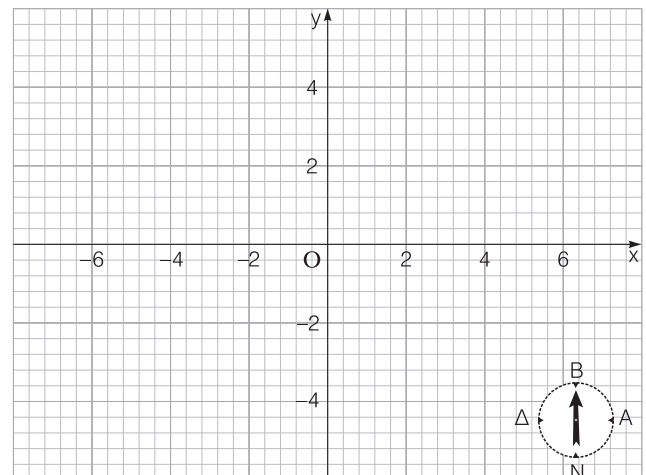
Θεωρούμε την οικογένεια των ευθειών $\varepsilon_a : (a-4)x - 2ay + a + 4 = 0$, $a \in \mathbb{R}$.

- α.** Να βρείτε τις ευθείες που προκύπτουν όταν $a = 0$ και όταν $a = 1$ και κατόπιν να προσδιορίσετε το κοινό τους σημείο M .
- β.** Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες της οικογένειας διέρχονται από το M .
- γ.** Έστω ότι μια ευθεία της παραπάνω οικογένειας τέμνει τους θετικούς ημιάξονες Ox , Oy στα σημεία A και B αντίστοιχα.
- i.** Να αποδείξετε ότι $0 < a < 4$.
- ii.** Να βρείτε για ποια τιμή του a ισχύει $(OA) = 2(OB)$.

57 Θέμα 4 – 16477

Σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy , η εξίσωση ευθείας $\varepsilon_\lambda : \lambda x + (1-\lambda)y + 2 = 0$, όπου λ αριθμός που μεταβάλλεται στο \mathbb{R} , παριστάνει τη φωτεινή ακτίνα που εκπέμπει ένας περιστρεφόμενος φάρος Φ . Ακόμη δίνεται ότι ένα φορτηγό πλοίο είναι αγκυροβολημένο στο σημείο $O(0, 0)$.

- α. i.** Να βρείτε τις συντεταγμένες του φάρου Φ .
- ii.** Να εξετάσετε αν υπάρχει φωτεινή ακτίνα που εκπέμπεται από το φάρο προς το αγκυροβολημένο πλοίο.
- β.** Ένα ρυμουλκό πλοίο P βρίσκεται βόρεια του φάρου Φ . Η φωτεινή ακτίνα που φωτίζει το P έχει εξίσωση $x + y + 4 = 0$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου P όταν είναι γνωστό ότι η συντομότερη διαδρομή που πρέπει να διανύσει το ρυμουλκό πλοίο για να πάει προς το αγκυροβολημένο φορτηγό πλοίο είναι ίση με 4 μονάδες μήκους.



58 Θέμα 4 – 18244

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : y = \sqrt{3}x$ και $\varepsilon_2 : y = x$.

- α.** Να σχεδιάσετε τις ε_1 , ε_2 στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.
- β.** Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει κάθε μια από τις ευθείες ε_1 και ε_2 με τον άξονα $x'x$.
- γ.** Να αιτιολογήσετε γιατί η οξεία γωνία των ε_1 , ε_2 είναι 15° .
- δ.** Να αποδείξετε ότι $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$.

59 Θέμα 4 – 15681

Δίνονται τα σημεία $O(0, 0)$, $A(\alpha, 0)$, $B(\frac{\alpha}{2}, \beta)$ και $M(\frac{\alpha}{2}, 0)$, όπου α, β σταθεροί θετικοί πραγματικοί αριθμοί.

- Να μεταφέρετε τα παραπάνω σημεία σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων. Κατόπιν, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο OAB είναι ισοσκελές και το σημείο M είναι το μέσο της βάσης του OA .
- Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις των ευθειών OB και AB είναι $OB: 2\beta x - \alpha y = 0$ και $AB: 2\beta x + \alpha y - 2\alpha\beta = 0$ αντίστοιχα.
- Αν d_1 είναι η απόσταση του σημείου M από την ευθεία OB και d_2 η απόσταση του σημείου M από την ευθεία AB , να αποδείξετε ότι $d_1 = d_2$.
- Ποια πρόταση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας έχει αποδειχθεί;

60 Θέμα 4 – 17695

Υποθέτουμε, ότι σε ένα επίπεδο που έχουμε εφοδιάσει με ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, κινούνται δύο σημεία A και B . Κάθε χρονική στιγμή t με $t \geq 0$ η θέση του πρώτου σημείου είναι $A(t-1, 2t-1)$ και του δευτέρου $B(3t-1, -4t-1)$.

- Να βρείτε τις εξισώσεις των γραμμών πάνω στις οποίες κινούνται τα δύο σημεία.
- Υπάρχει χρονική στιγμή κατά την οποία τα δύο σημεία ταυτίζονται;
- Να υπολογιστεί η απόσταση των δύο σημείων την χρονική στιγμή $t = 2$.
- Να βρεθεί η χρονική στιγμή t κατά την οποία η απόσταση του σημείου A από την ευθεία $\varepsilon: 4x + 3y + 7 = 0$ ισούται με 6.

8. Απόσταση σημείου από ευθεία – Εμβαδόν τριγώνου
61 Θέμα 2 – 18240

Δίνεται το σημείο $A(1, 2)$ και η ευθεία $\varepsilon: y = x + 3$.

- Να βρείτε την απόσταση του σημείου A από την ευθεία ε .
- Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η που διέρχεται από το A και είναι παράλληλη στην ε .
- Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων τις ευθείες η , ε .

62 Θέμα 2 – 16759

Δίνονται οι ευθείες ε_1 , ε_2 και ε_3 με εξισώσεις $x - 2y = -1$, $2x + y = 4$ και $y = -1$, αντίστοιχα.

- Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι κάθετες.
- Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται στο σημείο $A\left(\frac{7}{5}, \frac{6}{5}\right)$.
- Να υπολογίσετε την απόσταση του σημείου A από την ευθεία ε_3 .

63 Θέμα 2 - 18979

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 2x + 3y = 5$ και $\varepsilon_2: 4x + 6y = 8$.

- Να δείξετε ότι οι ευθείες ε_1 , ε_2 είναι παράλληλες.
- Να αποδείξετε ότι το σημείο $A(1, 1)$ είναι σημείο της ευθείας ε_1 .
- Να βρείτε την απόσταση του σημείου A από την ευθεία ε_2 .

64 Θέμα 2 – 16425

Δίνονται οι ευθείες: $\varepsilon_1 : y = \frac{2}{3}x + 1$ και $\varepsilon_2 : x = \frac{3}{2}y + 9$.

- α.** Να αποδείξετε ότι: $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$.
- β.** Να υπολογίσετε την απόσταση των ευθειών ε_1 και ε_2 .

65 Θέμα 2 – 15440

Δίνονται τα σημεία $A(0, 2)$, $B(3, 0)$ και $\Gamma(1, 1)$.

- α.** Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων \vec{AB} , \vec{AG} .
- β. i.** Να εξετάσετε αν τα σημεία A , B και Γ ορίζουν τρίγωνο.
- ii.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

66 Θέμα 2 – 16769

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές $A(1, 7)$, $B(-1, 5)$ και $\Gamma(3, 3)$.

- α.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.
- β.** Αν M είναι το μέσο της πλευράς $B\Gamma$, τότε να υπολογίσετε:
- i.** Τις συντεταγμένες του M .
- ii.** Την εξίσωση της διαμέσου AM .

67 Θέμα 2 – 16771

Δίνονται τα σημεία $A(2, 1)$, $\Gamma(4, -1)$ και το διάνυσμα $\vec{AB} = (3, -1)$.

- α.** Να βρεθεί το σημείο B .
- β.** Αν $B(5, 0)$:
- i.** Να δείξετε ότι τα σημεία A , B και Γ σχηματίζουν τρίγωνο.
- ii.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

68 Θέμα 2 – 16810

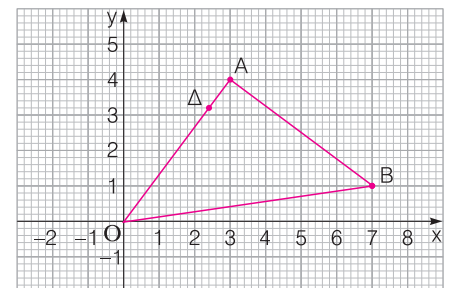
Στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε τα σημεία $A(1, 1)$, $B(5, 2)$, $\Gamma(0, -2)$ και $\Delta(8, 0)$.

- α.** Να τοποθετήσετε τα παραπάνω σημεία του επιπέδου σε ένα πρόχειρο σχήμα και να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία αυτά είναι τραπέζιο.
- β.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραπεζίου του ερωτήματος **α**.

69 Θέμα 2 – 17805

Δίνεται το τρίγωνο AOB με $A(3, 4)$, $B(7, 1)$, O η αρχή των αξόνων και το σημείο $\Delta\left(\frac{12}{5}, \frac{16}{5}\right)$ της πλευράς AO .

- α.** Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων \vec{OA} και \vec{AD} .
- β.** Να δείξετε ότι $\vec{AD} = -\frac{1}{5}\vec{OA}$.
- γ.** Δίνεται ότι $(OAB) = \frac{25}{2}$ τετραγωνικές μονάδες. Να δείξετε ότι $(A\Delta B) = \frac{1}{5}(OAB)$.



70 Θέμα 2 – 16194

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 8\chi + \psi - 28 = 0$, $\varepsilon_2: \chi - \psi + 1 = 0$, $\varepsilon_3: 3\chi + 4\psi + 5 = 0$.

- α.** Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής M των ε_1 και ε_2 .
- β.** Αν το σημείο τομής είναι το $M(3, 4)$ να υπολογίσετε:
 - i.** Το μέτρο του διανύσματος \vec{OM} , όπου O η αρχή των αξόνων.
 - ii.** Την απόσταση του σημείου M από την ευθεία ε_3 .

71 Θέμα 4 – 16057

Δίνονται τα σημεία $A(2, 0)$, $B(3, 4)$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α. i.** Να βρείτε την εξίσωση που περιγράφει όλες τις ευθείες που διέρχονται από το σημείο A και έχουν κλίση λ .
- ii.** Να αποδείξετε ότι η ευθεία, η οποία διέρχεται από το σημείο A , έχει κλίση λ και απέχει απόσταση ίση με 1 από το σημείο B , έχει εξίσωση $\varepsilon: 15x - 8y - 30 = 0$.
- β.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει και άλλη ευθεία ζ , εκτός από την ε , η οποία διέρχεται από το σημείο A και απέχει απόσταση ίση με 1 από το σημείο B .
- γ.** Να βρείτε τις εξισώσεις των διχοτόμων των γωνιών που σχηματίζουν οι ευθείες ε και ζ .

72 Θέμα 4 – 15380

Δίνονται τα σημεία $A(1, 3)$, $B(-2, 2)$ και η ευθεία $\varepsilon: 3x + y + \alpha = 0$, με $\alpha \in \mathbb{R}$.

- α.** Να βρείτε για ποια τιμή του α , η απόσταση του σημείου A από το σημείο B είναι ίση με την απόσταση του σημείου A από την ευθεία ε .
- β.** Για $\alpha = 4$
 - i.** Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$, όπου Γ το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα $y'y$.
 - ii.** Να βρείτε το σημείο της ευθείας ε που απέχει την μικρότερη απόσταση από την αρχή των αξόνων.

73 Θέμα 4 – 15433

Δύο οικισμοί A και B βρίσκονται στις θέσεις που ορίζουν τα σημεία $A(-1, -2)$ και $B(3, 1)$. Εξωτερικά των οικισμών υπάρχει ευθύγραμμος δρόμος με εξίσωση $\delta: x + y - 1 = 0$.

- α.** Να βρείτε σε ποια θέση του δρόμου δ :
 - i.** Ο οικισμός A έχει τη μικρότερη απόσταση από τον δρόμο.
 - ii.** Υπάρχει το Κέντρο Υγείας της περιοχής, αν είναι γνωστό ότι ισαπέχει από τους δύο οικισμούς.
- β.** Να βρείτε τη θέση Γ ενός αυτοκινήτου πάνω στο δρόμο, αν είναι γνωστό, ότι το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζουν τα τρία σημεία A , B και Γ είναι ίσο με 8 .

74 Θέμα 4 – 14984

Θεωρούμε τα σημεία $A(-2, -3)$ και $B(7, 9)$. Έστω S το σύνολο των σημείων M που είναι κορυφές των τριγώνων AMB ώστε $(AMB) = 12$ τ.μ.

- α.** Να αποδείξετε ότι το S αποτελείται από τα σημεία των παραλλήλων ευθειών $\varepsilon_1: 4x - 3y - 9 = 0$ και $\varepsilon_2: 4x - 3y + 7 = 0$.
- β.** Να αποδείξετε ότι η ευθεία AB είναι η μεσοπαράλληλη των ε_1 και ε_2 .
- γ.** Θεωρούμε ένα σημείο M_1 στην ε_1 και ένα σημείο M_2 στην ε_2 ώστε να σχηματίζεται το τετράπλευρο AM_1BM_2 . Πόσο είναι το εμβαδόν του; Πόσα τετράπλευρα $AXBY$ υπάρχουν, αν το X πρέπει να είναι σημείο της ε_1 και το Y σημείο της ε_2 , που έχουν το ίδιο εμβαδόν με το AM_1BM_2 ; Εξηγήστε.

75 Θέμα 4 – 15273

Θεωρούμε τα σταθερά σημεία $A(3, 4)$, $B(2, 5)$ και $\Gamma(-2, 2)$ και το μεταβλητό σημείο $M(4\alpha - 1, 3\alpha + 1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

- α.** Να αποδείξετε ότι τα A, B, Γ σχηματίζουν τρίγωνο.
- β.** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας $B\Gamma$.
- γ.** Να αποδείξετε ότι τα σημεία M κινούνται στην ευθεία που διέρχεται από το A και είναι παράλληλη στην $B\Gamma$.
- δ.** Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε θέση του σημείου M ισχύει $(MB\Gamma) = (AB\Gamma)$. Πως αιτιολογείται αυτό γεωμετρικά;

76 Θέμα 4 – 17694

Στο χάρτη μίας πεδινής περιοχής, που είναι εφοδιασμένος με ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, δύο κωμοπόλεις A και B έχουν συντεταγμένες $A(3, 6)$ και $B(7, -2)$.

- α.** Ανάμεσα στις δύο κωμοπόλεις, θα κατασκευαστεί ευθεία σιδηροδρομική γραμμή, κάθε σημείο της οποίας θα ισαπέχει από αυτές. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας, πάνω στην οποία βρίσκεται η σιδηροδρομική γραμμή.
- β.** Πάνω στην σιδηροδρομική γραμμή θα κατασκευαστεί σταθμός Σ , ώστε το εμβαδόν της περιοχής που ορίζεται από τα σημεία A , B και Σ να ισούται με 20 τετραγωνικές μονάδες. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σταθμού Σ στο χάρτη.

77 Θέμα 4 – 15987

Δίνονται τα σημεία $A(1, 1)$ και $B(2, 3)$.

- α.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας AB είναι η $\varepsilon: y = 2x - 1$.
- β.** Να αιτιολογήσετε αν το σημείο $\Gamma(2^{100}, 5)$ ανήκει ή όχι στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από την ευθεία ε και την αρχή των αξόνων $O(0, 0)$.
- γ.** Να αιτιολογήσετε αν το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο από το εμβαδόν του τριγώνου AOB .

9. Ο κύκλος**78 Θέμα 2 – 18700**

Δίνεται κύκλος C με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 5.

- α.** Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου C και να τον σχεδιάσετε στο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.
- β.** Δίνεται το σημείο $A(3, -4)$.
 - i.** Να αποδείξετε ότι το σημείο A ανήκει στον κύκλο C .
 - ii.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου C στο σημείο A .

79 Θέμα 2 – 16773

- α.** Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το $O(0, 0)$ και διέρχεται από το σημείο $A(1, 2)$.
- β.** Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 = 5$.
 - i.** Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης του στο σημείο A .
 - ii.** Να βρεθεί το σημείο B , το οποίο είναι αντιδιαμετρικό του A σε αυτόν τον κύκλο.

80 Θέμα 2 - 18241

Δίνεται ο κύκλος C με εξίσωση $x^2 + y^2 = 25$. Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων

- α.** τον κύκλο C .
- β.** τις εφαπτόμενες του C που διέρχονται από τα σημεία τομής του C με τον $y'y$ και να γράψετε τις εξισώσεις τους.
- γ.** τις εφαπτόμενες του C που διέρχονται από τα σημεία τομής του C με τον $x'x$ και να γράψετε τις εξισώσεις τους.

81 Θέμα 2 – 15028

Έστω κύκλος C με κέντρο $K(1, 2)$ και ακτίνα $\rho = 2$ και ευθεία ε με εξίσωση $3x + 4y - 1 = 0$.

- α. Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου C .
- β. Να δείξετε ότι η απόσταση του κέντρου $K(1, 2)$ από την ευθεία ε είναι ίση με 2.
- γ. Να δείξετε ότι η ευθεία ε εφάπτεται στον κύκλο C .

82 Θέμα 2 – 17317

Δίνεται ο κύκλος $C: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ και η ευθεία $\varepsilon: 3x - 4y = 8$.

- α. Να βρείτε το κέντρο K του κύκλου C και την ακτίνα του.
- β. Αν $K(1, 2)$, να δείξετε ότι η απόσταση του κέντρου του κύκλου C από την ευθεία ε είναι $d(K, \varepsilon) = \frac{13}{5}$.
- γ. Να αιτιολογήσετε γιατί η ευθεία και ο κύκλος δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.

83 Θέμα 2 – 18239

Δίνεται το σημείο $K(-3, 1)$ και η ευθεία $\varepsilon: 4x - 3y + 5 = 0$.

- α. Να αποδείξετε ότι η απόσταση του σημείου K από την ευθεία ε είναι ίση με 2.
- β. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C που έχει κέντρο το σημείο K και εφάπτεται στην ευθεία ε .
- γ. Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων τον κύκλο C και την ευθεία ε .

84 Θέμα 2 - 20890

Δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές τα σημεία $A(3, -3)$, $B(2, -8)$ και $\Gamma(7, -3)$. Να βρείτε:

- α. την εξίσωση της πλευράς $B\Gamma$.
- β. την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το A και εφάπτεται στην πλευρά $B\Gamma$.

85 Θέμα 2 – 18238

Δίνονται τα σημεία $A(1, 3)$ και $B(-3, 5)$.

- α. Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου K του τμήματος AB .
- β. Να αποδείξετε ότι $(KA) = \sqrt{5}$.
- γ. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα AB .

86 Θέμα 2 – 16808

Τα σημεία $A(-8, 1)$, $B(4, 5)$ και $\Gamma(-4, 9)$ είναι σημεία ενός κύκλου C .

- α. Να αποδείξετε ότι το ευθύγραμμο τμήμα AB είναι διάμετρος του κύκλου.
- β. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C .

87 Θέμα 2 – 15994

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$, (1).

- α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.
- β. Να σχεδιάσετε τον κύκλο c και να βρείτε, χρησιμοποιώντας το σχήμα ή με οποιονδήποτε άλλον τρόπο, τα κοινά του σημεία με τους άξονες.

88 Θέμα 2 – 15680

Δίνεται ο κύκλος $C: x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ με κέντρο $K(1, 2)$ και η ευθεία $\varepsilon: 3x + 4y + 1 = 0$.

- α.** Να αποδείξετε ότι η ακτίνα του κύκλου C είναι $\rho = 2$.
- β.** Να αποδείξετε ότι η απόσταση του κέντρου K από την ευθεία ε είναι $\frac{12}{5}$.
- γ.** Να αιτιολογήσετε γιατί η ευθεία ε και ο κύκλος C δεν έχουν κοινά σημεία.

89 Θέμα 2 – 19039

Δίνεται η εξίσωση $(x - 1)(x + 3) + (y + 1)(y - 3) = -4$, (1).

- α.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(-1, 1)$ και ακτίνα $R = 2$.
- β. i.** Να βρείτε τα σημεία A και B του κύκλου (K, R) τα οποία έχουν τετμημένη ίση με -1 .
- ii.** Να αποδείξετε ότι τα σημεία A και B είναι αντιδιαμετρικά.

90 Θέμα 4 – 18567

Δίνεται ο κύκλος $C: x^2 + y^2 = 4$ και το σημείο $A(2\sqrt{2}, 0)$.

- α. i.** Να αποδείξετε ότι το σημείο A είναι εξωτερικό του κύκλου C .
- ii.** Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του κύκλου C που διέρχονται από το σημείο A και να αποδείξετε ότι είναι μεταξύ τους κάθετες.
- β.** Αν B, Γ τα σημεία επαφής του κύκλου C με τις εφαπτόμενες ευθείες από το σημείο A , να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου $ABO\Gamma$.

91 Θέμα 4 – 18569

Δίνεται ο κύκλος $C: x^2 + y^2 = 1$.

- α.** Αν A και A' είναι τα σημεία τομής του κύκλου C με τους ημιάξονες Ox και Ox' αντίστοιχα, τότε:
 - i.** Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες των σημείων A και A' είναι $A(1, 0)$ και $A'(-1, 0)$.
 - ii.** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το A και σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 150° .
- β.** Αν η ευθεία ε τέμνει τον κύκλο C και στο σημείο B , να αποδείξετε ότι η χορδή AB έχει μήκος $\sqrt{3}$.
- γ.** Αν η ευθεία ε έχει εξίσωση $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x - 1)$, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ζ που διέρχεται από τα σημεία A' και B .

92 Θέμα 4 – 14954

Θεωρούμε τις εξισώσεις $\varepsilon_1: \mu x - y - \mu = 0$ και $\varepsilon_2: (\mu + 1)x + (\mu - 1)y - \mu + 1 = 0$, $\mu \in \mathbb{R}$.

- α.** Να αποδείξετε ότι οι ε_1 και ε_2 παριστάνουν εξισώσεις ευθειών για κάθε τιμή της παραμέτρου μ .
- β.** Να αποδείξετε ότι η οξεία γωνία των ευθειών ε_1 και ε_2 είναι 45° για κάθε τιμή της παραμέτρου μ .
- γ.** Να αποδείξετε ότι τα σημεία τομής των ευθειών ε_1 και ε_2 ανήκουν στον κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 1 .

93 Θέμα 4 – 18237

Θεωρούμε τα σημεία $A(-1, 2)$, $B(3, 2)$, $\Gamma(1, 4)$.

- α.** Να αποδείξετε ότι σχηματίζουν τρίγωνο.
- β.** Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκάθετης της πλευράς $B\Gamma$.
- Έστω ότι η μεσοκάθετη της πλευράς $B\Gamma$ είναι η ευθεία $\varepsilon: y = x + 1$.
- γ.** Να βρείτε σημείο K στην μεσοκάθετη της πλευράς $B\Gamma$ που ισαπέχει από τα A, B .
- δ.** Να βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $AB\Gamma$.

94 Θέμα 4 – 18247

Δίνονται τα σημεία $O(0, 0)$, $A(\alpha, 0)$ και $B(0, \beta)$, όπου $\alpha, \beta > 0$.

- α.** Να βρείτε συναρτήσει των α, β
- τις συντεταγμένες του μέσου M του τμήματος AB .
 - την απόσταση (OM) .
- β.** Αν $(OM) = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}$, τότε:
- να αποδείξετε ότι $(OM) = \frac{(AB)}{2}$
 - να γράψετε την πρόταση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας που έχει αποδειχθεί.
- γ.** Να βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου OAB .

95 Θέμα 4 – 15030

Δίνεται ο κύκλος $C: (x-2)^2 + (y+3)^2 = 5$ και η ευθεία $\varepsilon: 2x + y + 5 = 0$.

- α.** Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου C .
- β.** Να δείξετε ότι ο κύκλος C και η ευθεία ε δεν έχουν κοινά σημεία.
- γ.** Να δείξετε ότι υπάρχουν δύο ευθείες η_1, η_2 που είναι παράλληλες στην ευθεία ε και εφάπτονται του κύκλου C και να βρείτε τις εξισώσεις τους.
- δ.** Να βρείτε τη μεσοπαράλληλη των ευθειών η_1, η_2 .

96 Θέμα 4 – 15646

Δίνονται οι κύκλοι $C_1: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 9$ και $C_2: (x-4)^2 + (y-4)^2 = 9$.

- α.** Να δείξετε ότι τα κέντρα K, Λ των κύκλων C_1 και C_2 αντίστοιχα βρίσκονται στην διχοτόμο της γωνίας $\chi\hat{O}y$ του συστήματος συντεταγμένων.
- β.** Να βρείτε τα σημεία τομής B, Γ των κύκλων C_1 και C_2 .
- γ.** Να βρείτε τα σημεία της ευθείας $y = x$ ώστε το τρίγωνο που σχηματίζεται με τα B, Γ να έχει εμβαδόν $\frac{21}{2}$ τ.μ.

97 Θέμα 4 – 15082

Δίνονται δύο κύκλοι με εξισώσεις: $C_1: (x-2)^2 + (y-3)^2 = 8$ και $C_2: (x-7)^2 + (y+2)^2 = 18$.

- α.** Να υπολογίσετε το μήκος της διακέντρου (KL) , όπου K, Λ τα κέντρα των κύκλων C_1, C_2 αντίστοιχα. Ακολουθώντας να δείξετε ότι οι δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.
- β. i.** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας KL .
- ii.** Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας KL με τον κύκλο C_1 και το σημείο επαφής των δύο κύκλων.
- γ.** Να βρείτε την εξίσωση της κοινής εσωτερικής εφαπτομένης των κύκλων.

98 Θέμα 4 - 20091

Τα σημεία $A(-7, -1)$ και $B(3, -5)$ είναι σημεία ενός κύκλου C κέντρου K . Το σημείο M είναι το μέσο της χορδής AB και μία ευθεία ε διέρχεται από τα σημεία K και M .

- α.** Να βρείτε:
- Τις συντεταγμένες του σημείου M .
 - Την εξίσωση της ευθείας KM .
- β.** Αν από το κέντρο K του κύκλου διέρχεται η ευθεία $(\delta): x + y = -12$, τότε:
- Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου K .
 - Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C .

99 Θέμα 4 - 15189

Δίνονται τα σημεία $A(-2, 0)$ και $B(2, -2)$.

- Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου K και το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος AB .
- Να δείξετε ότι ο κύκλος C με διάμετρο AB έχει εξίσωση $C: x^2 + (y+1)^2 = 5$.
- Να δείξετε ότι τα σημεία $M(x, y)$ του επιπέδου για τα οποία $(AMB) = 5$ ανήκουν στις ευθείες $\varepsilon_1: x + 2y - 3 = 0$ και $\varepsilon_2: x + 2y + 7 = 0$.
- Να δείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 εφάπτονται του κύκλου C .

100 Θέμα 4 - 18415

Δίνεται η εξίσωση $(x - 3\lambda)^2 + (y + 2\lambda)^2 = 1$, (1) όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ και η ευθεία $\varepsilon: 2x + 3y = 0$.

- Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ τα κέντρα των κύκλων που προκύπτουν από την (1) ανήκουν στην ευθεία ε .
- Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ που απέχουν μεταξύ τους 2 μονάδες και έχουν μεσοπαράλληλη την ευθεία ε .
- Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που προκύπτουν από την (1) εφάπτονται σε δύο σταθερές ευθείες.
- Να βρείτε το εμβαδόν ενός τετραγώνου του οποίου δύο απέναντι πλευρές ανήκουν στις ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, αντίστοιχα.

101 Θέμα 4 - 15993

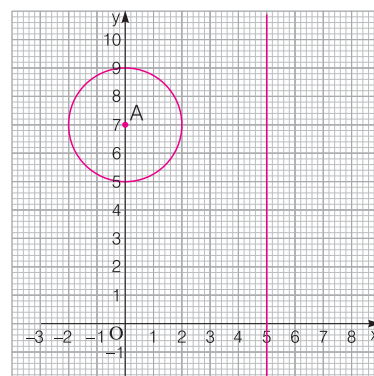
Δίνεται η εξίσωση $(x - 2)^2 + (y - \lambda)^2 = \lambda^2 + 1$, (1), όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του λ η (1) παριστάνει κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.
- Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την (1) για τις διάφορες τιμές του λ διέρχονται από δύο σταθερά σημεία.
- Αν $A(1, 0)$ και $B(3, 0)$ είναι τα μοναδικά σημεία από τα οποία διέρχονται όλοι οι κύκλοι, τότε να βρείτε την εξίσωση της κοινής χορδής τους και να αποδείξετε ότι είναι κάθετη στην ευθεία που διέρχεται από τα κέντρα των κύκλων.
- Αν ένα σημείο $M(a, b)$ επαληθεύει την (1) για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε να αποδείξετε ότι $a \cdot b = 0$.

102 Θέμα 4 - 15791

Στο διπλανό σχήμα έχουμε σχεδιάσει κύκλο C_1 κέντρου A και την ευθεία $\varepsilon: x = 5$.

- Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C_1 .
- Έστω ένα σημείο του επιπέδου $B(x_1, y_1)$.
 - Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο $B(x_1, y_1)$ και ακτίνα 2.
 - Να βρείτε το μήκος της διακέντρου AB σε συνάρτηση με τις συντεταγμένες του σημείου B .
- Να βρείτε όλους τους κύκλους του ερωτήματος β.ι. με ακτίνα 2, που εφάπτονται εξωτερικά στον C_1 και στην ευθεία ε .

**103 Θέμα 4 - 15272**

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2x + 4y = -1$.

- Να αποδείξετε ότι παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.
- Να αποδείξετε ότι το σημείο $M(3, 2)$ βρίσκεται έξω από τον κύκλο.
- Να βρείτε τις εφαπτόμενες του κύκλου που διέρχονται από το M .

104 Θέμα 4 – 15080

Δίνονται οι εξισώσεις $C_1: x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0$, (1) και $C_2: x^2 + y^2 - 6x + 8 = 0$, (2).

- α.** Να δείξετε ότι οι (1) και (2) είναι εξισώσεις κύκλων, με κέντρα $K(1, 0)$, $\Lambda(3, 0)$ και ακτίνες $\rho_1 = 3$, $\rho_2 = 1$ αντίστοιχα.
- β. i.** Να βρείτε το μήκος της διακέντρου (ΚΛ).
- ii.** Να δείξετε ότι ο κύκλος C_2 εφάπτεται εσωτερικά του κύκλου C_1 .
- γ.** Να βρείτε τις εξισώσεις των ακτίνων του κύκλου C_1 που εφάπτονται στον κύκλο C_2 .

105 Θέμα 4 – 15081

Δίνονται οι κύκλοι $C_1: x^2 + y^2 + 2\sqrt{2}x + 1 = 0$ και $C_2: x^2 + y^2 - 6\sqrt{2}x + 9 = 0$.

- α.** Να δείξετε ότι οι κύκλοι C_1 και C_2 έχουν κέντρα $K(-\sqrt{2}, 0)$, $\Lambda(3\sqrt{2}, 0)$ και ακτίνες $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 3$ αντίστοιχα.
- β. i.** Να δείξετε ότι από την αρχή των αξόνων διέρχονται δύο κοινές εφαπτόμενες των κύκλων C_1 και C_2 .
- ii.** Να σχεδιάσετε ένα πρόχειρο σχήμα όπου να φαίνονται οι κύκλοι και οι δύο αυτές εφαπτόμενες.

106 Θέμα 4 - 18416

Δίνεται η εξίσωση $x(x-4) + y(y-2) = 2(x+y-4)$, (1).

- α.** Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(3, 2)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{5}$.
- β.** Δίνονται τα σημεία $A(4, 4)$ και $B(2, 0)$.
- i.** Να δείξετε ότι τα σημεία A και B είναι αντιδιαμετρικά σημεία του κύκλου.
- ii.** Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του κύκλου οι οποίες είναι παράλληλες στην διάμετρο AB .
- γ.** Να βρείτε την τιμή της παραμέτρου λ ώστε η ευθεία (η) με εξίσωση $y = \lambda x + 4$ να τέμνει τον παραπάνω κύκλο σε δύο σημεία Γ και Δ ώστε $(\Gamma\Delta) = \sqrt{20}$.

107 Θέμα 4 – 15432

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 4kx - 2ky + 4 = 0$, (1) με $k \in \mathbb{R}$.

- α.** Να βρείτε τις τιμές του $k \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση (1) να παριστάνει κύκλο.
- β.** Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου και την ακτίνα του κάθε κύκλου.
- γ.** Να βρείτε την ευθεία στην οποία ανήκουν τα κέντρα των παραπάνω κύκλων.
- δ.** Για $k = 1$ να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης του αντίστοιχου κύκλου της εξίσωσης (1) στο σημείο $\Gamma(2, 2)$.

108 Θέμα 4 – 15628

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + (4-2k)x - 2(1+k)y + 5-2k = 0$, (1), όπου $k \in (0, +\infty)$.

- α.** Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $M(k-2, k+1)$ και ακτίνα $k\sqrt{2}$ για κάθε $k > 0$.
- β.** Να αποδείξετε ότι το σημείο M ανήκει σε μια σταθερή ευθεία για κάθε $k > 0$.
- γ.** Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: y = -x - 1$ είναι εφαπτομένη του παραπάνω κύκλου για κάθε $k > 0$.

109 Θέμα 4 - 21154

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 4ax - 4ay = 0$, (1), όπου a είναι πραγματικός αριθμός.

- α.** Να βρείτε τις τιμές του a για τις οποίες η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο.
- β.** Να προσδιορίσετε το κέντρο K και την ακτίνα R των κύκλων ως συνάρτηση του a .
- γ.** Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων για τις διάφορες τιμές του a του ερωτήματος **α.**
- δ.** Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του a ώστε ο αντίστοιχος κύκλος που ορίζεται από την εξίσωση (1) να εφάπτεται στον άξονα $x'x$.

110 Θέμα 4 – 20229

Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 + y^2 - (\lambda + 8)x + \lambda y + 7 = 0, (1), \text{ με } \lambda \in \mathbb{R}$$

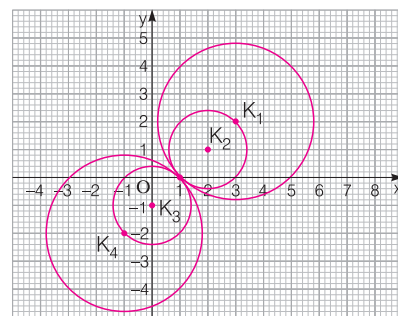
- Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο, του οποίου να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα.
- Να βρείτε την εξίσωση της γραμμής πάνω στην οποία κινούνται τα κέντρα των κύκλων αυτών.
- Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, όλοι οι παραπάνω κύκλοι, διέρχονται από δύο σταθερά σημεία, τα οποία και να βρεθούν.
- Θεωρούμε τον κύκλο που ορίζεται από την (1) για $\lambda = 0$. Να βρεθούν τα σημεία του κύκλου αυτού, που απέχουν από την αρχή των αξόνων την ελάχιστη και την μέγιστη απόσταση αντίστοιχα.

111 Θέμα 4 – 15826

Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 + y^2 - 2(\lambda + 1)x - 2\lambda y + 2\lambda + 1 = 0, (1), \text{ όπου } \lambda \in \mathbb{R}$$

- Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο και να γράψετε ως συνάρτηση του λ τις συντεταγμένες του κέντρου K και την ακτίνα ρ .
- Τι παριστάνει η εξίσωση (1) για $\lambda = 0$;
- Στο διπλανό σχήμα φαίνονται 4 κύκλοι με τα αντίστοιχα κέντρα τους K_1, K_2, K_3, K_4 που προκύπτουν από την (1) για 4 αντίστοιχες τιμές του λ . Αξιοποιώντας το σχήμα,
 - να αποδείξετε ότι τα κέντρα όλων των κύκλων που προκύπτουν από την (1) βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία της οποίας να βρείτε την εξίσωση.
 - να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που προκύπτουν από την (1) διέρχονται από σταθερό σημείο του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες.
 - να αποδείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: x + y - 1 = 0$ είναι κοινή εφαπτομένη όλων των κύκλων που προκύπτουν από την (1).



112 Θέμα 4 - 21276

Σε μια σύγχρονη πόλη, κατασκευάζεται σιδηροδρομικό δίκτυο που περιλαμβάνει:

- τη γραμμή γ_1 , κάθε σημείο της οποίας στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων είναι της μορφής: $A(\lambda - 1, 2\lambda + 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
 - τη γραμμή γ_2 , που περνάει από το σταθμό $\Sigma(-4, 2)$ και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{u} = (-1, 3)$.
- Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών πάνω στις οποίες βρίσκονται οι γραμμές γ_1 και γ_2 .
 - Η είσοδος του αθλητικού σταδίου μιας συνοικίας θα βρίσκεται στο σημείο $K(1, 1)$ του ορθοκανονικού συστήματος συντεταγμένων. Οι κατασκευαστές θέλουν να συνδέσουν την είσοδο του σταδίου απ' ευθείας με κάθετο δρόμο, με μια από τις γραμμές γ_1 και γ_2 . Να βρείτε με ποια από τις δύο γραμμές είναι πιο συμφέρουσα η σύνδεση. Δίνεται ότι το κόστος σύνδεσης ανά μονάδα μήκους, είναι το ίδιο και για τις δύο γραμμές.
 - Γύρω από το στάδιο θα δημιουργηθεί κυκλικό πάρκο. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου, που θα ορίζει το πάρκο, αν το κέντρο του είναι το σημείο K και επιπλέον ο κύκλος αυτός εφάπτεται της γραμμής γ_1 .

113 Θέμα 4 – 18570

Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 - 4x - 8y - 5 = 0$ και η ευθεία $\varepsilon: 3x - 4y = \mu$, $\mu \in \mathbb{R}$.

- α.** Να βρείτε το κέντρο του κύκλου και την ακτίνα του.
- β.** Αν η ευθεία ε τέμνει τον κύκλο σε δύο διαφορετικά σημεία A , B
 - i.** Να αποδείξετε ότι $-35 < \mu < 15$.
 - ii.** Να βρείτε για ποια τιμή του μ η ευθεία ε διέρχεται από το κέντρο του.
 - iii.** Να βρεθεί σημείο Γ του κύκλου τέτοιο ώστε, το τρίγωνο ΓAB να είναι ισοσκελές με βάση τη χορδή AB .

114 Θέμα 4 – 16191

Δίνονται τα σημεία $A(1, 1)$, $B(5, 5)$.

- α.** Αν για το σημείο $M(x, y)$ ισχύει $\vec{AM}^2 + \vec{BM}^2 = 32$, να αποδείξετε ότι:
 - i.** Το σημείο M βρίσκεται πάνω στην καμπύλη με εξίσωση $\chi^2 + \psi^2 - 6\psi - 6\chi + 10 = 0$, (1).
 - ii.** Η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο.
- β.** Αν το κέντρο του κύκλου είναι το $K(3, 3)$ και η ακτίνα του $\rho = 2\sqrt{2}$:
 - i.** Να διερευνήσετε για ποιες τιμές του λ η ευθεία $\varepsilon: \lambda\chi + \psi = 2$ εφάπτεται του κύκλου (1).
 - ii.** Υπάρχει τιμή του λ για την οποία η ευθεία ε σχηματίζει με την AB γωνία 45° ;

115 Θέμα 4 – 15177

Δίνονται τα σημεία $A(1, 0)$ και $B(0, -1)$ και ο κύκλος c_1 με εξίσωση $c_1: \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 2$.

- α.** Να αποδείξετε ότι το σύνολο των σημείων $N(x, y)$ του επιπέδου, τα οποία ικανοποιούν τη σχέση $\vec{NA}^2 - \vec{NB}^2 = 4$, ανήκουν στην ευθεία ε με εξίσωση $y = -x - 2$.
- β.** Να αποδείξετε ότι το σύνολο των σημείων P του επιπέδου, τα οποία ικανοποιούν την εξίσωση $2x^2 + 2y^2 + 10x + 14y + 21 = 0$, ανήκουν σε κύκλο c_2 κέντρου $\Lambda\left(-\frac{5}{2}, -\frac{7}{2}\right)$ και ακτίνας $R = 2\sqrt{2}$.
- γ. i.** Να αποδείξετε ότι οι δύο κύκλοι c_1 και c_2 εφάπτονται εξωτερικά και στη συνέχεια να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη απόσταση των σημείων τους.
- ii.** Να αποδείξετε ότι η ευθεία ε είναι η κοινή εσωτερική εφαπτομένη των κύκλων c_1 και c_2 .

10. Η παραβολή**116 Θέμα 2 – 20235**

Δίνεται η παραβολή $C: y^2 = 8x$.

- α.** Να βρείτε την εστία και την διευθετούσα της παραβολής.
- β.** Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο της $\left(\frac{1}{8}, 1\right)$ είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon: 8x - 2y + 3 = 0$.

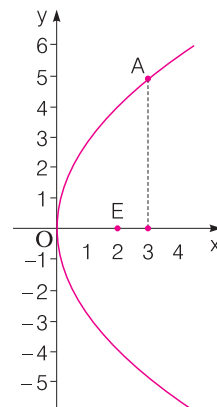
117 Θέμα 2 – 21307

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνεται η παραβολή με εξίσωση $x^2 = 12y$.

- α.** Να αποδείξετε ότι η εστία της παραβολής είναι το σημείο $E(0, 3)$ και να βρείτε τα σημεία της παραβολής που έχουν τεταγμένη 3.
- β.** Να αποδείξετε ότι εφαπτομένες (ε_1) και (ε_2) της παραβολής στα σημεία $A(6, 3)$ και $B(-6, 3)$, αντίστοιχα, έχουν εξισώσεις $y = x - 3$ και $y = -x - 3$.
- γ.** Να βρείτε το σημείο τομής των (ε_1) και (ε_2) .

118 Θέμα 2 - 21306

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνεται η παραβολή με άξονα συμμετρίας τον $x'x$, κορυφή $O(0, 0)$ και εστία $E(2, 0)$, όπως στο διπλανό σχήμα. Το σημείο A της παραβολής έχει τετμημένη 3 και βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο του Oxy .



- α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της παραβολής είναι $y^2 = 8x$ και ότι $A(3, 2\sqrt{6})$.
- β. Να σχεδιάσετε τη διευθετούσα (δ) της παραβολής και να γράψετε την εξίσωσή της.
- γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της παραβολής στο σημείο A .

119 Θέμα 2 - 18242

Δίνεται η παραβολή C με εξίσωση $y^2 = 4x$.

- α. Να βρείτε τις συντεταγμένες της εστίας E και την εξίσωση της διευθετούσας δ της C .
- β. Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης ϵ της C στο σημείο της $M(4, 4)$.
- γ. Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων την παραβολή C , τη διευθετούσα δ και την ευθεία ϵ .

120 Θέμα 4 - 18372

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τα σημεία $A(-2, -2)$, $B(0, -4)$ και την παραβολή $y^2 = 4x$.

- α. Να βρείτε την παράμετρο, την εστία και την διευθετούσα της παραβολής.
- β. Να βρείτε το σημείο M της παραβολής στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στην AB .
- γ. Αν $M(1, -2)$ και K είναι το σημείο τομής της εφαπτομένης ευθείας του προηγούμενου ερωτήματος με τον άξονα $x'x$, να δείξετε ότι το τετράπλευρο $ABMK$ είναι παραλληλόγραμμο.

121 Θέμα 4 - 20092

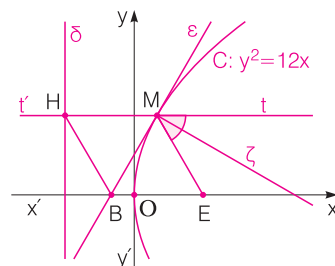
Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4x$, το σημείο της $M(\frac{1}{4}, 1)$ και η ευθεία ϵ του επιπέδου με εξίσωση

$$\epsilon: \frac{x}{3} - \frac{y}{4} + 1 = 0.$$

- α. i. Να δείξετε ότι η ευθεία ϵ δεν έχει κοινά σημεία με την παραβολή και να βρείτε την απόσταση του σημείου M από την ϵ .
 ii. Αν η ευθεία ϵ τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα, να δείξετε ότι $(M\Gamma\Delta) = 5 \text{ τ.μ.}$
- β. i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας ζ της παραβολής με ζ παράλληλη στην ϵ .
 ii. Ποια είναι η απόσταση των ευθειών ζ και ϵ ;

122 Θέμα 4 - 15394

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η παραβολή $C: y^2 = 12x$ με εστία E και η εφαπτομένη ευθεία ϵ της C στο σημείο της $M(1, 2\sqrt{3})$, η οποία τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο B . Από το σημείο M φέρνουμε ευθεία $t't$ παράλληλη προς τον άξονα $x'x$, η οποία τέμνει την διευθετούσα δ στο σημείο H .



- α. Να αποδείξετε ότι η ϵ έχει εξίσωση $y = \sqrt{3} \cdot x + \sqrt{3}$.
- β. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων B , H , E .
- γ. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $MEBH$ είναι ρόμβος.
- δ. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ζ η οποία διχοτομεί την γωνία \widehat{EMt} .

11. Η έλλειψη

123 Θέμα 2 - 21308

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. Να βρείτε:

- α. Τις συντεταγμένες των εστιών E και E' της έλλειψης και την απόστασή τους.
- β. Το μήκος του μικρού άξονα και το μήκος του μεγάλου άξονα της έλλειψης.
- γ. Την εξίσωση της εφαπτομένης (ϵ) της έλλειψης στο σημείο της $B(0, 4)$.

124 Θέμα 2 - 20883

Δίνεται η εξίσωση της έλλειψης $C: 16x^2 + 25y^2 = 400$.

- α. Να βρείτε τα μήκη BB' , AA' του μικρού και του μεγάλου άξονα της έλλειψης, καθώς και τις εστίες της E και E' .
- β. Αν $E'(-3, 0)$ και $E(3, 0)$, να γράψετε την εξίσωση της παραβολής που έχει εστία το σημείο E' και διευθετούσα την ευθεία που διέρχεται από το E και είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$.

12. Η υπερβολή

125 Θέμα 2 - 16128

Δίνεται η υπερβολή $C: \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

- α. Να βρείτε τις συντεταγμένες των εστιών E' και E .
- β. Αν το N είναι τυχαίο σημείο της C , να βρείτε την τιμή της διαφοράς $|(NE') - (NE)|$.
- γ. Να σχεδιάσετε την υπερβολή C .

1ο - 3ο Θέμα

126 Θέμα 1 - 21152

- α. Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως **Σωστή (Σ)** ή **Λανθασμένη (Λ)**, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.
 - i. Κάθε διάνυσμα στον χώρο είναι ίσο με τη διανυσματική ακτίνα του πέρατος μείον τη διανυσματική ακτίνα της αρχής.
 - ii. Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ έχει εξίσωση $x = x_0$.
 - iii. Η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\eta} = (A, B)$.
 - iv. Η παραβολή με εξίσωση $y^2 = 4x$ έχει εστία το σημείο $E(1, 0)$.
 - v. Η εφαπτομένη του κύκλου $x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο του $A(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση $xx_1 + yy_1 = \rho^2$.
- β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ είναι $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$.

127 Θέμα 3 – 18243

Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 4$, $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$ και τα διανύσματα $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $\vec{\delta} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

- α.** Να βρείτε το $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$.
- β.** Να βρείτε το $\vec{\gamma} \cdot \vec{\delta}$.
- γ.** Να βρείτε τα $|\vec{\gamma}|$, $|\vec{\delta}|$.
- δ.** Να βρείτε τη γωνία $(\vec{\gamma}, \vec{\delta})$.

128 Θέμα 3 – 15152

Δίνονται τα σημεία $A(1, 3)$, $B(-2, 2)$ και η ευθεία $\varepsilon: 3x + y + \alpha = 0$ με $\alpha \in \mathbb{R}$.

- α.** Να βρεθεί η απόσταση του σημείου A από το σημείο B .
- β.** Για ποιες τιμές του α , η απόσταση AB είναι ίση με την απόσταση του σημείου A από την ευθεία ε .
- γ.** Για $\alpha = 4$ να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$, όπου Γ το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα $y'y$.

129 Θέμα 3 – 17944

Δίνεται η υπερβολή με εξίσωση της μορφής $C: \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, εστιακή απόσταση $EE' = 2\sqrt{7}$ και εκκεντρότητα $\varepsilon = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

- α.** Να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$, $\beta = \sqrt{3}$.
- β. i.** Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών A, A' της υπερβολής C .
- ii.** Να βρείτε τις εξισώσεις των ασύμπτωτων ευθειών της υπερβολής C .
- γ.** Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων την υπερβολή C , τις ασύμπτωτές της, τις εστίες της και τις κορυφές της.