ΛΥΣΕΙΣ

ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ενημέρωση 6/5/2022

ΕΚΔΟΣΕΙΣ Μπάρλας

ΘΕΜΑΤΑ ΤΡΑΠΕΖΑΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

1 Θέμα 2 - 21165

α. • $\vec{EZ}=\vec{AZ}-\vec{AE}=\frac{1}{3}\cdot\vec{A\Delta}+\frac{1}{2}\cdot\vec{AB}=\frac{1}{3}\cdot\vec{\beta}+\frac{1}{2}\cdot\vec{\alpha}=\frac{1}{2}\cdot\vec{\alpha}+\frac{1}{3}\cdot\vec{\beta}$

• $\vec{Z\Gamma}=\vec{A\Gamma}-\vec{AZ}=(\vec{AB}+\vec{A\Delta})-\vec{AZ}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}-\frac{1}{3}\cdot\vec{\beta}=\vec{\alpha}+\frac{2}{3}\cdot\vec{\beta}$

β. $\vec{Z\Gamma}=\vec{\alpha}+\frac{2}{3}\cdot\vec{\beta}=2\left(\frac{1}{2}\cdot\vec{\alpha}+\frac{1}{3}\cdot\vec{\beta}\right)\overset{\alpha.}{=}2\vec{EZ}$ ή $\vec{Z\Gamma}=2\vec{EZ}$

γ. Επειδή $\vec{Z\Gamma}=2\vec{EZ}$ είναι $\vec{Z\Gamma}//\vec{EZ}$ και τα διανύσματα έχουν κοινό άκρο το σημείο Z, θα έχουν τον ίδιο φορέα. Άρα τα σημεία Z, E και Γ είναι συνευθειακά.

2 Θέμα 2 - 15010

α. i. • $\vec{A\Delta}=\vec{AB}+\vec{B\Delta}=\vec{AB}+(\vec{BA}+\vec{B\Gamma})=\vec{AA}+\vec{B\Gamma}=\vec{0}+\vec{B\Gamma}=\vec{B\Gamma}$, (1)

• $\vec{AE}=\vec{A\Gamma}+\vec{\Gamma E}=\vec{A\Gamma}+(\vec{\Gamma A}+\vec{\Gamma B})=...=\vec{\Gamma B}$, (2)

ii. Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε $\vec{A\Delta}=-\vec{AE}$ δηλαδή τα διανύσματα $\vec{A\Delta}$ και $\vec{AE}$ είναι αντίθετα.

β. Από το **α.** ερώτημα είναι $\vec{A\Delta}=(-1)\vec{AE}$, οπότε $\vec{A\Delta}//\vec{AE}$ και αφού έχουν κοινό σημείο το A, θα έχουν τον ίδιο φορέα. Άρα τα σημεία A, Δ και E είναι συνευθειακά.

3 Θέμα 2 - 14666

α. • $\vec{u}=3\vec{\alpha}-5\vec{\beta}=3(1,-3)-5(-2,-1)=(3,-9)-(-10,-5)=(13,-4)$

• $\vec{v}=5\vec{\alpha}-9\vec{\beta}=5(1,-3)-9(-2,-1)=(5,-15)-(-18,-9)=(23,-6)$

β. $\vec{w}=2\vec{u}-\vec{v}=2(3\vec{\alpha}-5\vec{\beta})-(5\vec{\alpha}-9\vec{\beta})=6\vec{\alpha}-10\vec{\beta}-5\vec{\alpha}+9\vec{\beta}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}=1\cdot\vec{\alpha}+(-1)\cdot\vec{\beta}$

γ. Είναι $\vec{OK}=\vec{\beta}$, $\vec{O\Lambda}=\vec{w}$ και $\vec{OM}=\vec{u}$. Οπότε:

• $\vec{K\Lambda}=\vec{O\Lambda}-\vec{OK}=\vec{w}-\vec{\beta}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}-\vec{\beta}=\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$

• $\vec{\Lambda M}=\vec{OM}-\vec{O\Lambda}=\vec{u}-\vec{w}=3\vec{\alpha}-5\vec{\beta}-\vec{\alpha}+\vec{\beta}=2\vec{\alpha}-4\vec{\beta}=2(\vec{\alpha}-2\vec{\beta})=2\cdot\vec{K\Lambda}$

Άρα $\vec{\Lambda M}=2\cdot\vec{K\Lambda}$, οπότε $\vec{K\Lambda}//\vec{\Lambda M}$ και αφού έχουν κοινό άκρο το Λ, θα έχουν τον ίδιο φορέα.
Επομένως τα σημεία K, Λ, M είναι συνευθειακά.

4 Θέμα 2 - 16580

α. • $\vec{AB}=(x_B-x_A, y_B-y_A)=(11-2, 5-4)=(9,1)$.

• $\vec{A\Gamma}=(x_\Gamma-x_A, y_\Gamma-y_A)=(3-2, 7-4)=(1,3)$.

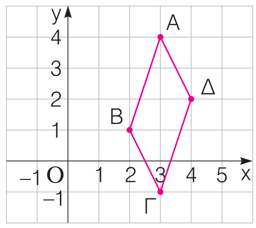
β. Είναι $\vec{A\Delta}=\vec{AB}+\vec{A\Gamma}=(9+1,1+3)=(10,4)$.

γ. Έχουμε $\vec{A\Delta}=(x_\Delta-x_A, y_\Delta-y_A)\Leftrightarrow(10,4)=(x_\Delta-2, y_\Delta-4)\Leftrightarrow\begin{cases}x_\Delta-2=10\\ y_\Delta-4=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_\Delta=12\\ y_\Delta=8\end{cases}$

Άρα $\Delta(12, 8)$.

5 Θέμα 2 - 17070

α.



β. • $\vec{AB} = (x_B - x_A\,,\, y_B - y_A) = (2-3, 1-4) = (-1, -3)$,

• $\vec{\Delta\Gamma} = (x_\Gamma - x_\Delta\,,\, y_\Gamma - y_\Delta) = (3-4, -1-2) = (-1, -3)$.

γ. Από το **β.** ερώτημα προκύπτει ότι $\vec{AB} = \vec{\Delta\Gamma}$. Οπότε οι πλευρές AB και $\Delta\Gamma$ του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ θα είναι ίσες και παράλληλες, άρα το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

6 Θέμα 2 - 16581

α. • $\vec{AB} = (x_B - x_A\,,\, y_B - y_A) = (1-(-1), 2-6) = (2, -4)$.

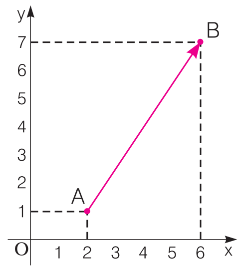
• $\vec{B\Gamma} = (x_\Gamma - x_B\,,\, y_\Gamma - y_B) = (3-1, -2-2) = (2, -4)$.

β. Από το ερώτημα **α.** έχουμε $\vec{AB} = \vec{B\Gamma}$. Επομένως τα διανύσματα είναι συγγραμμικά και αφού το B είναι κοινό άκρο τα σημεία A , B και Γ είναι συνευθειακά.

γ. Είναι $\vec{AB} = \vec{B\Gamma}$ οπότε το B είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος $A\Gamma$.

7 Θέμα 2 - 16579

α.



β. $\vec{v} = \vec{AB} = (x_B - x_A\,,\, y_B - y_A) = (6-2, 7-1) = (4, 6)$.

γ. Είναι $\vec{u} = (-8, -12) = (-2\cdot 4, -2\cdot 6) = -2\cdot(4, 6) = -2\cdot\vec{v}$.

Αφού $\lambda = -2 < 0$ και $\vec{u} = \lambda\cdot\vec{v}$, τα διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ είναι αντίρροπα.

8 Θέμα 2 - 16147

Είναι $\vec{\alpha} = (3, 3\sqrt{3})$, $\vec{\beta} = (\sqrt{2}, 0)$, $\vec{\gamma} = (0, -3)$ και $\vec{\delta} = (-1, 1)$.

α. Έχουμε $\lambda_{\vec{\alpha}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$, $\lambda_{\vec{\beta}} = \dfrac{0}{\sqrt{2}} = 0$, $\lambda_{\vec{\delta}} = \dfrac{1}{-1} = -1$

β. • Έστω ω η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ με το θετικό ημιάξονα Ox . Είναι $\lambda_{\vec{\alpha}} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega = \sqrt{3}$. Αφού το πέρας του διανύσματος βρίσκεται στο 1^o τεταρτημόριο (θετικές συντεταγμένες), είναι $\omega = 60^o$.

• Το διάνυσμα $\vec{\beta} = (\sqrt{2}, 0)$, έχει τεταγμένη 0 , άρα $\vec{\beta} // x'x$, και επειδή το $\vec{\beta}$ έχει θετική τετμημένη σχηματίζει με το θετικό ημιάξονα Ox γωνία 0^o .

• Το διάνυσμα $\vec{\gamma} = (0, -3)$, έχει τετμημένη 0 , άρα $\vec{\gamma} // y'y$, και επειδή το $\vec{\gamma}$ έχει αρνητική τεταγμένη σχηματίζει με το θετικό ημιάξονα Ox γωνία 270^o .

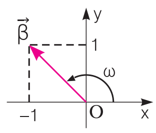
• Έστω φ είναι η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\delta}$ με το θετικό ημιάξονα Ox. Αφού $\lambda_{\vec{\delta}} = -1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\varphi = -1$. Αφού το διάνυσμα έχει αρνητική τετμημένη και θετική τεταγμένη το πέρας του βρίσκεται στο 2^o τεταρτημόριο, άρα $\varphi = 145^o$.

γ. • $|\vec{\alpha}| = \sqrt{3^2 + (3\sqrt{3})^2} = \sqrt{9+27} = \sqrt{36} = 6$

• $|\vec{\gamma}| = \sqrt{0^2 + (-3)^2} = \sqrt{0+9} = \sqrt{9} = 3$

9 Θέμα 2 - 19038

α. Έστω ω η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\beta}$ με τον άξονα $x'x$. Είναι



$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{1}{-1} = -1 \;,\; \frac{\pi}{2} < \omega < \pi$$

Άρα $\omega = \frac{3\pi}{4}$.

β. • $|\vec{\gamma}| = \sqrt{(-5)^2 + (-5)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

• $|\vec{\beta}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

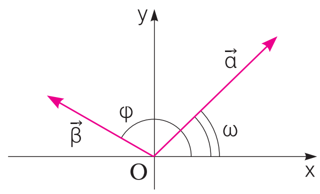
Άρα $|\vec{\gamma}| = 5|\vec{\beta}|$

γ. Είναι $\vec{\gamma} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta} \Leftrightarrow (-5, -5) = \lambda(2, 3) + \mu(-1, 1) \Leftrightarrow (-5, -5) = (2\lambda - \mu, 3\lambda + \mu)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda - \mu = -5 \\ 3\lambda + \mu = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5\lambda = -10 \\ 3\lambda + \mu = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -2 \\ \mu = 1 \end{cases}$$

Άρα $\vec{\gamma} = -2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

10 Θέμα 2 - 16151



α. Είναι $\lambda_{\vec{\alpha}} = \frac{3}{3} = 1$ και $\lambda_{\vec{\beta}} = \frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. Έστω ω η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ με τον άξονα $x'x$ και φ η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\beta}$ με τον άξονα $x'x$. Έχουμε $\varepsilon\varphi\omega = \lambda_{\vec{\alpha}} = 1$ και $\varepsilon\varphi\varphi = \lambda_{\vec{\beta}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. Το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ έχει πέρας στο 1^o τεταρτημόριο, άρα $\omega = 45^o$ και το διάνυσμα $\vec{\beta}$ στο 2^o τεταρτημόριο, άρα $\varphi = 150^o$.

β. Είναι $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \varphi - \omega = 150^o - 45^o = 105^o$

11 Θέμα 4 - 17076

α. • $\overrightarrow{AM} = (x_M - x_A, y_M - y_A) = (x+3, y+1)$,

• $\overrightarrow{MB} = (x_B - x_M, y_B - y_M) = (-x, 3-y)$,

• $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A) = (3, 4)$.

β. • $|\overrightarrow{AM}| = \sqrt{(x+3)^2 + (y+1)^2}$,

• $|\overrightarrow{MB}| = \sqrt{x^2 + (y-3)^2}$,

• $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$.

γ. Έχουμε $|\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}| \le |\overrightarrow{AM}| + |\overrightarrow{MB}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{AB}| \le |\overrightarrow{AM}| + |\overrightarrow{MB}| \Leftrightarrow 5 \le |\overrightarrow{AM}| + |\overrightarrow{MB}|$.

δ. Από το **γ.** ερώτημα ισχύει $|\vec{AM}|+|\vec{MB}|\geq 5$ και αντικαθιστώντας από το **β.** ερώτημα έχουμε
$\sqrt{(x+3)^2+(y+1)^2}+\sqrt{x^2+(y-3)^2}\geq 5$.
Οπότε δεν υπάρχει ζεύγος πραγματικών αριθμών $(x\,,\,y)$ τέτοιο ώστε να ισχύει
$\sqrt{(x+3)^2+(y+1)^2}+\sqrt{x^2+(y-3)^2}=4$
Άρα ο ισχυρισμός είναι ψευδής.

12 Θέμα 4 - 17077

α. $\vec{AB}=\vec{OB}-\vec{OA}=(\lambda+1)\vec{i}+(\lambda+3)\vec{j}-2\vec{i}-\lambda\vec{j}=(\lambda+1-2)\vec{i}+(\lambda+3-\lambda)\vec{j}=(\lambda-1)\vec{i}+3\vec{j}$

β. $(AB)=|\vec{AB}|=\sqrt{(\lambda-1)^2+3^2}=\sqrt{(\lambda-1)^2+9}\,,\,\lambda\in\mathbb{R}$.

γ. $(AB)=5\Leftrightarrow\sqrt{(\lambda-1)^2+9}=5\Leftrightarrow(\lambda-1)^2+9=25\Leftrightarrow(\lambda-1)^2=16$

$\Leftrightarrow(\lambda-1)^2=4^2\Leftrightarrow(\lambda-1=4 \text{ ή } \lambda-1=-4)\Leftrightarrow\lambda=5 \text{ ή } \lambda=-3$.

δ. Για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ έχουμε

$(\lambda-1)^2\geq 0\Leftrightarrow(\lambda-1)^2+9\geq 9\Leftrightarrow\sqrt{(\lambda-1)^2+9}\geq\sqrt{9}\Leftrightarrow(AB)\geq 3$.

Το «=» ισχύει αν και μόνο αν $(\lambda-1)^2=0\Leftrightarrow\lambda-1=0\Leftrightarrow\lambda=1$.

Άρα, για κάθε $\lambda\neq 1$ είναι $(AB)>3$ και όταν $\lambda=1$ είναι $(AB)=3$ που είναι η μικρότερη δυνατή τιμή της.

Επομένως ο ισχυρισμός είναι αληθής.

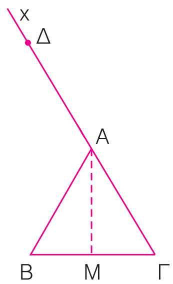
13 Θέμα 2 - 16141

α. Είναι:

i. $(\widehat{\vec{AB},\vec{A\Gamma}})=60^\circ$

ii. $(\widehat{\vec{AM},\vec{B\Gamma}})=90^\circ$

iii. $(\widehat{\vec{AM},\vec{\Gamma A}})=x\hat{A}M=180^\circ-30^\circ=150^\circ$, αφού η διάμεσος προς τη βάση είναι και διχοτόμος της γωνίας της κορυφής.



$\vec{\Gamma A}=\vec{A\Delta}$

$(\widehat{\vec{AM},\vec{\Gamma A}})=(\widehat{\vec{AM},\vec{A\Delta}})=x\hat{A}M$

iv. $(\widehat{\vec{BM},\vec{\Gamma M}})=180^\circ$

v. $(\widehat{\vec{\Gamma M},\vec{\Gamma B}})=0^\circ$

β. Είναι $|\vec{AB}|=|\vec{A\Gamma}|=|\vec{B\Gamma}|=10$ και $|\vec{M\Gamma}|=5$.

Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΜΓ και έχουμε:

$AM^2=A\Gamma^2-M\Gamma^2\Leftrightarrow AM^2=10^2-5^2\Leftrightarrow AM^2=75\Leftrightarrow AM=5\sqrt{3}$ οπότε $|\vec{AM}|=5\sqrt{3}$

i. Είναι $\vec{AM}\perp\vec{B\Gamma}\Leftrightarrow\vec{AM}\cdot\vec{B\Gamma}=0$

ii. $\vec{AM}\cdot\vec{\Gamma A}=|\vec{AM}||\vec{\Gamma A}|\,\text{συν}(\widehat{\vec{AM},\vec{\Gamma A}})=5\sqrt{3}\cdot 10\cdot\text{συν}150^\circ=50\sqrt{3}\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=-75$

iii. Είναι $\vec{\Gamma M}\uparrow\uparrow\vec{\Gamma B}$, οπότε $\vec{\Gamma M}\cdot\vec{\Gamma B}=|\vec{\Gamma M}||\vec{\Gamma B}|=5\cdot 10=50$.

14 Θέμα 2 - 16144

Είναι $|\vec{AB}|=|\vec{B\Gamma}|=|\vec{\Gamma\Delta}|=|\vec{\Delta A}|=4$

α. $\vec{AB}\cdot\vec{A\Delta}=|\vec{AB}|\cdot|\vec{A\Delta}|\cdot\text{συν}|(\widehat{\vec{AB},\vec{A\Delta}})|=4\cdot 4\cdot\text{συν}60^\circ=16\cdot\dfrac{1}{2}=8$

β. Είναι $\vec{A\Delta} \uparrow\uparrow \vec{B\Gamma}$, οπότε $\vec{A\Delta}\cdot\vec{B\Gamma} = |\vec{A\Delta}|\cdot|\vec{B\Gamma}| = 4\cdot 4 = 16$

γ. Οι διαγώνιες ΑΓ και ΒΔ του ρόμβου τέμνονται κάθετα. Οπότε $\vec{O\Delta} \perp \vec{AO} \Leftrightarrow \vec{O\Delta}\cdot\vec{AO} = 0$

δ. Το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές αφού $AB = A\Delta = 4$ και αφού επιπλέον $\hat{A} = 60^o$, το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισόπλευρο. Επίσης $BO = O\Delta = 2$ και $\vec{O\Delta} \uparrow\downarrow \vec{OB}$.

Άρα $\vec{O\Delta}\cdot\vec{OB} = -|\vec{O\Delta}|\cdot|\vec{OB}| = -2\cdot 2 = -4$.

ε. Είναι: $(\widehat{\vec{A\Delta},\vec{\Gamma\Delta}}) = 120^o$. Οπότε $\vec{A\Delta}\cdot\vec{\Gamma\Delta} = |\vec{A\Delta}|\cdot|\vec{\Gamma\Delta}|\cdot \sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{A\Delta},\vec{\Gamma\Delta}}) = 4\cdot 4\cdot \sigma\upsilon\nu 120^o \cdot 4\cdot 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -8$.

15 Θέμα 2 - 15038

α. $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\,\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = 3\cdot 4\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} = 12\cdot\frac{1}{2} = 6$

β. $\vec{\alpha}^2 = |\vec{\alpha}|^2 = 3^2 = 9$ και $\vec{\beta}^2 = |\vec{\beta}|^2 = 4^2 = 16$.

γ. $(3\vec{\alpha}-\vec{\beta})\cdot(\vec{\alpha}-3\vec{\beta}) = 3\vec{\alpha}^2 - \vec{\beta}\cdot\vec{\alpha} - 9\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + 3\vec{\beta}^2 = 3\vec{\alpha}^2 - 10\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + 3\vec{\beta}^2 =$

$= 3\cdot 9 - 10\cdot 6 + 3\cdot 16 = 15$.

16 Θέμα 2 - 20888

α. $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = 4\cdot 5\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3} = 20\cdot(-\frac{1}{2}) = -10$

β. Έχουμε: $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$, οπότε

$\vec{\gamma}^2 = (2\vec{\alpha}+3\vec{\beta})^2 \Leftrightarrow |\vec{\gamma}|^2 = 4\vec{\alpha}^2 + 12\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + 9\vec{\beta}^2 \Leftrightarrow |\vec{\gamma}|^2 = 4|\vec{\alpha}|^2 + 12\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + 9|\vec{\beta}|^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |\vec{\gamma}|^2 = 4\cdot 4^2 + 12\cdot(-10) + 9\cdot 5^2 \Leftrightarrow |\vec{\gamma}|^2 = 64 - 120 + 225 \Leftrightarrow |\vec{\gamma}|^2 = 169 \Leftrightarrow |\vec{\gamma}| = 13$.

17 Θέμα 2 - 15825

α. $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = 2\cdot 4\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} = 8\cdot\frac{1}{2} = 4$

β. $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma} = \vec{\alpha}\cdot(\vec{\alpha}-\vec{\beta}) = \vec{\alpha}^2 - \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = |\vec{\alpha}|^2 - 4 = 4 - 4 = 0$

γ. Αφού $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma} = 0$ και $\vec{\alpha}$, $\vec{\gamma} \neq \vec{0}$ έχουμε $\vec{\alpha} \perp \vec{\gamma}$ οπότε $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\gamma}}) = \frac{\pi}{2}$.

18 Θέμα 2 - 16428

α. $|3\vec{\alpha}+2\vec{\beta}| = |\vec{\alpha}-2\vec{\beta}| \Leftrightarrow |3\vec{\alpha}+2\vec{\beta}|^2 = |\vec{\alpha}-2\vec{\beta}|^2 \Leftrightarrow (3\vec{\alpha}+2\vec{\beta})^2 = (\vec{\alpha}-2\vec{\beta})^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9\vec{\alpha}^2 + 12\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + 4\vec{\beta}^2 = \vec{\alpha}^2 - 4\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + 4\vec{\beta}^2 \Leftrightarrow 16\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = -8\vec{\alpha}^2 \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = -\frac{1}{2}\vec{\alpha}^2 \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = -\frac{1}{2}|\vec{\alpha}|^2 \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = -\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$\Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = -\frac{3}{8}$.

β. Είναι $\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = \frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|} = \frac{-\frac{3}{8}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}} = -\frac{3\cdot 4}{8\cdot\sqrt{3}} = -\frac{3}{2\cdot\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, άρα $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = 150^o$, αφού $0^o \leq (\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) \leq 180^o$.

19 Θέμα 2 - 17075

α. • $\vec{AB}=(x_B-x_A\,,\,y_B-y_A)=(6-2,\,0-3)=(4,\,-3)$

• $\vec{A\Gamma}=(x_\Gamma-x_A\,,\,y_\Gamma-y_A)=(2-2,\,1-3)=(0,\,-2)$

β. Είναι $\vec{AB}\cdot\vec{A\Gamma}=(4,\,-3)\cdot(0,\,-2)=4\cdot 0+(-3)\cdot(-2)=0+6=6$.

20 Θέμα 2 - 15996

α. • $\vec{AB}=(8-(-6),\,7-(-1))=(14,\,8)$

• $\vec{B\Gamma}=(-10-8,\,6-7)=(-18,\,-1)$

• $\vec{AB}+\vec{B\Gamma}=\vec{A\Gamma}=(-10-(-6),\,6-(-1))=(-4,\,7)$

β. Είναι $\vec{A\Gamma}=\vec{AB}+\vec{B\Gamma}=(-4,\,7)$.

Έχουμε $\vec{AB}\cdot\vec{A\Gamma}=14\cdot(-4)+8\cdot 7=-56+56=0$.

Οπότε $\vec{AB}\perp\vec{A\Gamma}$, άρα $\hat{A}=90^\circ$, δηλαδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

21 Θέμα 2 - 15073

α. $\vec{\gamma}=2\vec{\alpha}+\vec{\beta}=2\cdot(1,2)+(2,3)=(2+2,4+3)=(4,7)$

β. $|\vec{\gamma}|=\sqrt{4^2+7^2}=\sqrt{16+49}=\sqrt{65}$

γ. $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}=(1,2)\cdot(4,7)=1\cdot 4+2\cdot 7=18$

22 Θέμα 2 - 15463

α. $\vec{B\Gamma}=\vec{A\Gamma}-\vec{AB}=(3,\,-1)-(2,\,1)=(1,\,-2)$

β. $\vec{AB}\cdot\vec{B\Gamma}=(2,\,1)\cdot(1,\,-2)=2-2=0$, οπότε $\vec{AB}\perp\vec{B\Gamma}$

γ. Είναι $|\vec{B\Gamma}|=\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$ και $|\vec{AB}|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$, οπότε $|\vec{AB}|=|\vec{B\Gamma}|$.

23 Θέμα 2 - 16427

α. • $\vec{AB}=(x_B-x_A\,,\,y_B-y_A)=(0+2,\,8-3)=(2,\,5)$

• $\vec{\Gamma\Delta}=(x_\Delta-x_\Gamma\,,\,y_\Delta-y_\Gamma)=(10-5,\,5-3)=(5,\,2)$

Οπότε $\vec{AB}\cdot\vec{\Gamma\Delta}=(2,\,5)\cdot(5,\,2)=2\cdot 5+5\cdot 2=10+10=20$

β. Έστω ω η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{u}$ με τον άξονα $x'x$.

Είναι $\vec{u}=\vec{AB}+\vec{\Gamma\Delta}=(2,\,5)+(5,\,2)=(7,\,7)$, οπότε $\lambda_{\vec{u}}=\frac{7}{7}=1$.

Άρα $\varepsilon\varphi\omega=\lambda_{\vec{u}}\Leftrightarrow\varepsilon\varphi\omega=1\Leftrightarrow\omega=\frac{\pi}{4}$, αφού το $\vec{u}$ έχει πέρας στο 1^{o} τεταρτημόριο.

24 Θέμα 2 - 15186

α. Είναι:

• $x_M=\frac{6+2}{2}=4$ και $y_M=\frac{3+1}{2}=2$

• $x_N=\frac{9+1}{2}=5$ και $y_N=\frac{2-2}{2}=0$

β. Είναι:

- $\vec{MN} = (5-4\,,\,0-2) = (1\,,\,-2)$
- $\vec{\Delta\Gamma} = \big(9-1\,,\,2-(-2)\big) = (8\,,\,4)$

γ. Έχουμε $\vec{MN}\cdot\vec{\Delta\Gamma} = (1\,,\,-2)\cdot(8\,,\,4) = 1\cdot 8 + (-2)\cdot 4 = 8-8 = 0$.

Άρα $\vec{MN} \perp \vec{\Delta\Gamma}$.

25 Θέμα 2 - 14586

α. Είναι $\vec{AB} = (3-1,\, 4-2) = (2,\, 2)$ και $\vec{A\Gamma} = (5-1,\, -2-2) = (4,\, -4)$.

Οπότε $\vec{AB}\cdot\vec{A\Gamma} = 2\cdot 4 + 2\cdot(-4) = 0$, άρα $\vec{AB} \perp \vec{A\Gamma}$, δηλαδή $\hat{A} = 90^{o}$.

β. Το Μ είναι το μέσο του ΒΓ , άρα οι συντεταγμένες του είναι $\left(\dfrac{3+5}{2}, \dfrac{-2+4}{2}\right)$, δηλαδή $M(4,\,1)$.

Είναι $\vec{AM} = (4-1,\, 1-2) = (3,\, -1)$, οπότε $|\vec{AM}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$.

Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στην κορυφή Α και η ΑΜ είναι η διάμεσος προς την υποτείνουσα, άρα $(B\Gamma) = 2(AM)$ και επομένως $|\vec{B\Gamma}| = 2|\vec{AM}| = 2\sqrt{10}$.

γ. Είναι $\vec{B\Gamma} = 2\vec{M\Gamma} = 2(\vec{MA} + \vec{A\Gamma}) = -2\vec{AM} + 2\vec{A\Gamma}$.

26 Θέμα 2 - 20685

α. Είναι $\vec{AB} = \big(\beta-(-1)\,,\,0-2\big) = (\beta+1\,,\,-2)$.

Έχουμε $\vec{u} \perp \vec{AB} \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{AB} = 0 \Leftrightarrow (1\,,\,1)\cdot(\beta+1\,,\,-2) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1\cdot(\beta+1) + 1\cdot(-2) = 0 \Leftrightarrow \beta+1-2 = 0 \Leftrightarrow \beta = 1$.

β. Είναι $\vec{A\Gamma} = \big(0-(-1)\,,\,\gamma-2\big) = (1\,,\,\gamma-2)$.

Έχουμε $\vec{w} \,//\, \vec{A\Gamma}$, οπότε :

$$\det(\vec{w}\,,\,\vec{A\Gamma}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -10 & 2 \\ 1 & \gamma-2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -10(\gamma-2) - 2\cdot 1 = 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \gamma = \frac{9}{5} .$$

γ. Για $\beta = 1$ και $\gamma = \dfrac{9}{5}$ βρίσκουμε $\vec{AB} = (2\,,\,-2)$ και $\vec{A\Gamma} = (1\,,\,-\dfrac{1}{5})$.

Οπότε $\vec{AB}\cdot\vec{A\Gamma} = 2\cdot 1 + (-2)\cdot(-\dfrac{1}{5}) = 2 + \dfrac{2}{5} = \dfrac{12}{5}$.

27 Θέμα 2 - 14953

α.
- $\vec{AB} = (7-(-2),\, 8-5) = (9,\, 3)$
- $\vec{A\Gamma} = (1-(-2),\, -4-5) = (3,\, -9)$

β. $\vec{AB}\cdot\vec{A\Gamma} = 9\cdot 3 + 3\cdot(-9) = 27-27 = 0$.

γ. Είναι $\vec{AB}\cdot\vec{A\Gamma} = 0$, οπότε $(\widehat{\vec{AB}, \vec{A\Gamma}}) = 90^{o}$, άρα $B\widehat{A}\Gamma = 90^{o}$

28 Θέμα 2 - 15379

α. Είναι • $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=1\cdot 3+3\cdot(-1)=3-3=0$

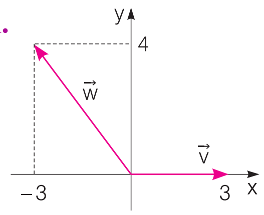
• Επειδή $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0 \Leftrightarrow \vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$, είναι $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=90^{\circ}$

β. $\vec{\gamma}=2\vec{\alpha}-\vec{\beta}=2(1,3)-(3,-1)=(2,6)-(3,-1)=\big(2-3,6-(-1)\big)=(-1,7)$.

29 Θέμα 2 - 15317

α. Είναι $\det(\vec{v},\vec{w})=\begin{vmatrix}3 & 0\\ -3 & 4\end{vmatrix}=12-0=12\neq 0$, οπότε τα $\vec{v}$, $\vec{w}$ δεν είναι παράλληλα.

β. i.



ii. Είναι $\text{συν}(\widehat{\vec{v},\vec{w}})=\dfrac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{v}||\vec{w}|}=\dfrac{-9+0}{\sqrt{3^2+0^2}\sqrt{(-3)^2+4^2}}=\dfrac{-9}{3\cdot 5}=-\dfrac{3}{5}<0$, οπότε η γωνία $(\widehat{\vec{v},\vec{w}})$ είναι αμβλεία.

30 Θέμα 2 - 16426

α. • $2\vec{\alpha}-\vec{\beta}=2\cdot(2,-1)-(-3,2)=(4,-2)+(3,-2)=(7,-4)$

• $\vec{\alpha}\cdot(2\vec{\alpha}-\vec{\beta})=(2,-1)\cdot(7,-4)=14+4=18$

β. Είναι $\vec{\gamma}\perp\vec{\alpha}\Leftrightarrow\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}=0\Leftrightarrow(x,y)\cdot(2,-1)=0\Leftrightarrow 2x-y=0\Leftrightarrow y=2x$.

Οπότε $\vec{\gamma}=(x,2x)$

Έχουμε $|\vec{\gamma}|=\sqrt{5}\Leftrightarrow\sqrt{x^2+4x^2}=\sqrt{5}\Leftrightarrow\sqrt{5x^2}=\sqrt{5}\Leftrightarrow 5x^2=5\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=-1$ ή $x=1$.

Για $x=-1$ είναι $\vec{\gamma}=(-1,-2)$ και για $x=1$ είναι $\vec{\gamma}=(1,2)$

31 Θέμα 4 - 18547

α. i. Είναι: • $\overrightarrow{AB}=(\lambda,1+1)=(\lambda,2)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=(\lambda-2,\lambda-3+1)=(\lambda-2,\lambda-2)$

• $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma})=\begin{vmatrix}\lambda & 2\\ \lambda-2 & \lambda-2\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)-2(\lambda-2)=(\lambda-2)^2$

Πρέπει $(\lambda-2)^2\neq 0\Leftrightarrow\lambda\neq 2$.

ii. Πρέπει $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=0\Leftrightarrow\lambda(\lambda-2)+2(\lambda-2)=0\Leftrightarrow(\lambda+2)(\lambda-2)=0\Leftrightarrow\lambda=2$ ή $\lambda=-2$.
Στο ερώτημα **α.i.** δείξαμε ότι για $\lambda=2$ τα σημεία Α , Β και Γ δεν σχηματίζουν τρίγωνο, οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με $\hat{A}=90^{\circ}$ για $\lambda=-2$.

β. Για $\lambda=-2$ είναι $\overrightarrow{AB}=(-2,2)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=(-4,-4)$.

i. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=0$ από το **α.ii.**

ii. Είναι $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-2)^2+2^2}=2\sqrt{2}$ και $|\overrightarrow{A\Gamma}|=\sqrt{(-4)^2+(-4)^2}=4\sqrt{2}$, οπότε

$(AB\Gamma)=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|\;|\overrightarrow{A\Gamma}|=\dfrac{1}{2}2\sqrt{2}\cdot 4\sqrt{2}=8$.

32 Θέμα 4 - 15658

α. Είναι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=2\cdot 1+(-2)\cdot 1=0$, οπότε $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$.

β. i. Είναι $\overrightarrow{KA}=\vec{\alpha}\Leftrightarrow(x_A-x_K\,,\,y_A-y_K)=(2,-2)$. Οπότε:

- $x_A-x_K=2\Leftrightarrow x_A-2=2\Leftrightarrow x_A=4$
- $y_A-y_K=-2\Leftrightarrow y_A-1=-2\Leftrightarrow y_A=-1$

Άρα $A(4,-1)$.

Είναι $\overrightarrow{KB}=\vec{\beta}\Leftrightarrow(x_B-x_K\,,\,y_B-y_K)=(1,1)$. Οπότε:

- $x_B-x_K=1\Leftrightarrow x_B-2=1\Leftrightarrow x_B=3$
- $y_B-y_K=1\Leftrightarrow y_B-1=1\Leftrightarrow y_B=2$

Άρα $B(3,2)$.

ii. Είναι $\overrightarrow{AB}=(3-4,\,2-(-1))=(-1,3)$. Οπότε:

- $\overrightarrow{A\Gamma}=(x_\Gamma-4,\,y_\Gamma+1)$
- $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma})=\begin{vmatrix}-1 & 3\\ x_\Gamma-4 & y_\Gamma+1\end{vmatrix}=-y_\Gamma-1-3x_\Gamma+12=-3x_\Gamma-y_\Gamma+11$

Τα A, B, Γ, είναι συνευθειακά οπότε $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma})=0\Leftrightarrow 3x_\Gamma+y_\Gamma=11$

iii. $|\overrightarrow{K\Gamma}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|\Leftrightarrow(K\Gamma)=\frac{1}{2}(AB)\Leftrightarrow\sqrt{(x_\Gamma-2)^2+(y_\Gamma-1)^2}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{(3-4)^2+(2+1)^2}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow(x_\Gamma-2)^2+(y_\Gamma-1)^2=\frac{10}{4}\overset{\beta.ii.}{\Leftrightarrow}(x_\Gamma-2)^2+(10-3x_\Gamma)^2=\frac{10}{4}\Leftrightarrow x_\Gamma^2-4x_\Gamma+4+100-60x_\Gamma+9x_\Gamma^2=\frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow 10x_\Gamma^2-64x_\Gamma+104=\frac{5}{2}\Leftrightarrow 20x_\Gamma^2-128x_\Gamma+203=0$$

Βρίσκουμε $\Delta=144$ και ρίζες $x_\Gamma=\frac{7}{2}$ και $x_\Gamma=\frac{29}{10}$.

Είναι $x_A=4$, $x_B=3$ και πρέπει το x_Γ να είναι μεταξύ των x_A , x_B . Οπότε $x_\Gamma=\frac{7}{2}$, αφού $\frac{29}{10}<3$.

Επίσης $y_\Gamma=11-3x_\Gamma=11-3\cdot\frac{7}{2}=11-\frac{21}{2}=\frac{1}{2}$. Άρα $K\left(\frac{7}{2},\frac{1}{2}\right)$.

33 Θέμα 4 - 15042

α. Με το B ως σημείο αναφοράς, έχουμε:

$$\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{A\Gamma}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}-2(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{BA})+(\overrightarrow{B\Gamma}-\overrightarrow{BA})=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{B\Gamma}-\overrightarrow{BA}=2\overrightarrow{BM}$$

$$\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{B\Gamma}=2\overrightarrow{BM}\Leftrightarrow\overrightarrow{B\Gamma}=2\overrightarrow{BM}\Leftrightarrow\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{B\Gamma}$$

Αφού $\overrightarrow{B\Gamma}\neq\vec{0}$, προκύπτει $\overrightarrow{BM}\,//\,\overrightarrow{B\Gamma}$ και αφού έχουν κοινό άκρο το B , τα B , Γ και είναι συνευθειακά.

β. Είναι $\overrightarrow{B\Gamma}=2\overrightarrow{BM}\Leftrightarrow\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{M\Gamma}=2\overrightarrow{BM}\Leftrightarrow\overrightarrow{M\Gamma}=\overrightarrow{BM}$

Οπότε το M είναι το μέσο του $\overrightarrow{B\Gamma}$.

γ. i. Επειδή τα σημεία A , B , Γ ως κορυφές τριγώνου δεν είναι συνευθειακά, οπότε τα μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$ δεν είναι παράλληλα.

- Αν $\kappa \neq 0$, τότε $\kappa \vec{A\Gamma} = \lambda \vec{AB} \Leftrightarrow \vec{A\Gamma} = \frac{\lambda}{\kappa}\vec{AB}$, δηλαδή $\vec{A\Gamma} // \vec{AB}$ που είναι άτοπο. Άρα $\kappa = 0$.
- Αν $\lambda \neq 0$, τότε $\kappa \vec{A\Gamma} = \lambda \vec{AB} \Leftrightarrow \vec{AB} = \frac{\kappa}{\lambda}\vec{A\Gamma}$, δηλαδή $\vec{A\Gamma} // \vec{AB}$ που είναι άτοπο. Άρα $\lambda = 0$.

Επομένως $\kappa = \lambda = 0$.

ii. Έχουμε: $\vec{AB} \cdot \vec{A\Gamma} = 0$ και $\vec{AM} \cdot \vec{B\Gamma} = 0$.

Οπότε τα $\vec{AB}$, $\vec{A\Gamma}$ είναι κάθετα. Επομένως, το τρίγωνο είναι ορθογώνιο, με $\vec{A} = 90^o$.

- Η διάμεσος ΑΜ του τριγώνου είναι κάθετη στην πλευρά ΒΓ, δηλαδή είναι και ύψος, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

Άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι και ισοσκελές με βάση την ΒΓ, άρα $AB = A\Gamma$.

34 Θέμα 2 - 15271

α. Ο συντελεστής διεύθυνσης είναι $\lambda = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{6-2}{1+3} = 1$.

β. Η ευθεία έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 1$ και διέρχεται από το σημείο $A(-3, 2)$, οπότε έχει εξίσωση $y - 2 = 1(x+3) \Leftrightarrow y = x + 5$.

γ. Για $x = -13$ έχουμε: $y = -13 + 5 = -8 \neq y_\Gamma = -7$.

Άρα το σημείο Γ δεν είναι πάνω στην ΑΒ.

35 Θέμα 2 - 15986

α. i. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας είναι $\lambda_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3-1}{2-1} = \frac{2}{1} = 2$.

ii. Η ευθεία ΑΒ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 2$ και διέρχεται από το σημείο $A(1, 1)$, οπότε έχει εξίσωση $\varepsilon: y - 1 = 2(x-1) \Leftrightarrow y = 2x - 1$.

β. Για $y = 5$ είναι:

$5 = 2x - 1 \Leftrightarrow x = 3 \neq 2^{100}$, άρα το σημείο Γ δεν ανήκει στην (ε).

36 Θέμα 2 - 16002

α. Αν $B(x, y)$, τότε έχουμε:

- $\frac{x+5}{2} = 3 \Leftrightarrow x + 5 = 6 \Leftrightarrow x = 1$
- $\frac{y+2}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow y + 2 = 1 \Leftrightarrow y = -1$

Άρα $B(1, -1)$.

β. Το μήκος της πλευράς ΒΓ είναι $(B\Gamma) = \sqrt{(5-1)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$.

γ. Η ευθεία ΑΓ διέρχεται από το σημείο $A(-3, -2)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \frac{2+2}{5+3} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$,

οπότε η εξίσωσή της είναι η $y + 2 = \frac{1}{2}(x+3) \Leftrightarrow y + 2 = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

37 Θέμα 2 - 16774

α. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ΒΓ είναι $\lambda_{B\Gamma} = \frac{y_\Gamma - y_B}{x_\Gamma - x_B} = \frac{-2-6}{-1-3} = \frac{-8}{-4} = 2$

β. Έστω $ΑΔ$ το ύψος από το $Α$. Τότε $ΑΔ \perp ΒΓ$, οπότε $\lambda_{ΑΔ}\lambda_{ΒΓ} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{ΑΔ} \cdot 2 = -1 \Leftrightarrow \lambda_{ΑΔ} = -\frac{1}{2}$.

Η εξίσωση της ευθείας $ΑΔ$ είναι:

$$y - y_A = \lambda_{ΑΔ}(x - x_A) \Leftrightarrow y - 5 = -\frac{1}{2}(x-2) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + 1 + 5 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + 6$$

γ. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας $ΑΒ$ είναι $\lambda_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{6-5}{3-2} = \frac{1}{1} = 1$

Αν ω η γωνία που σχηματίζει η $ΑΒ$ με τον xx', έχουμε:

$\lambda_{AB} = εφ\omega = 1$, οπότε $\omega = \frac{\pi}{4}$, αφού $0^o \le \omega < 180^o$.

38 Θέμα 2 - 20885

α. Είναι $\lambda = εφ\frac{3\pi}{4} = -1$, οπότε $ε: y - y_A = \lambda(x - x_A) \Leftrightarrow y + 1 = -1(x+3) \Leftrightarrow y = -x - 3 - 1 \Leftrightarrow y = -x - 4$.

β. Από την εξίσωση της ευθείας $ε$ για $x = 0$, βρίσκουμε $y = -4$ και για $y = 0$ βρίσκουμε $x = -4$.

Άρα η ευθεία $ε$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $K(-4, 0)$ και τον $y'y$ στο $Λ(0, -4)$.

Το τρίγωνο είναι το $ΟΚΛ$, που είναι ορθογώνιο, οπότε

$$(ΟΚΛ) = \frac{1}{2}(ΟΚ)\cdot(ΟΛ) = \frac{1}{2}|x_K|\cdot|y_Λ| = \frac{1}{2}|-4|\cdot|-4| = \frac{1}{2}\cdot 4 \cdot 4 = \frac{1}{2}\cdot 16 = 8.$$

39 Θέμα 2 - 15027

α. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας $ΑΒ$ είναι $\lambda = \frac{5-(-1)}{3-1} = \frac{6}{2} = 3$.

β. Το μέσο $Μ$ του τμήματος $ΑΒ$ έχει συντεταγμένες $\frac{1+3}{2} = 2$ και $\frac{-1+5}{2} = 2$ δηλαδή $Μ(2,2)$.

γ. Αν $ε$ η μεσοκάθετος του $ΑΒ$ τότε $ε \perp ΑΒ$, οπότε $\lambda_ε \cdot \lambda = -1 \Leftrightarrow \lambda_ε \cdot 3 = -1 \Leftrightarrow \lambda_ε = -\frac{1}{3}$

Η ευθεία $ε$ διέρχεται από το σημείο $Μ(2,2)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_ε = -\frac{1}{3}$, οπότε

$$ε: y - 2 = -\frac{1}{3}(x-2) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3} + 2 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{8}{3}.$$

40 Θέμα 2 – 18351

α. Το μέσο $Μ$ του τμήματος $ΑΒ$ έχει συντεταγμένες $\frac{-1+3}{2} = 1$, $\frac{5+3}{2} = 4$, οπότε $Μ(1, 4)$.

β. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας $ΑΒ$ είναι:

$$\lambda_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3-5}{3-(-1)} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

γ. Είναι: $\eta \perp AB \Leftrightarrow \lambda_\eta \cdot \lambda_{AB} = -1 \Leftrightarrow \lambda_\eta \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1 \Leftrightarrow \lambda_\eta = 2$.

Η εξίσωση της μεσοκαθέτου (η) του τμήματος $ΑΒ$ είναι:

$$y - y_M = \lambda_\eta(x - x_M) \Leftrightarrow y - 4 = 2(x-1) \Leftrightarrow y = 2x + 2$$

41 Θέμα 2 – 15044

α. i. Είναι $\lambda_{AB} = \frac{-1-5}{6-0} = -1$

ii. Είναι: • $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} = 3$

• $y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} = 2$

Άρα $M(3, 2)$.

β. Η μεσοκάθετη ευθεία (ε) του ευθύγραμμου τμήματος AB διέρχεται από το σημείο $M(3, 2)$ και είναι κάθετη στο AB. Αν η (ε) έχει κλίση λ έχουμε:

$\lambda \cdot \lambda_1 = -1 \Leftrightarrow \lambda \cdot (-1) = -1 \Leftrightarrow \lambda = 1$.

Άρα (ε): $y - 2 = 1 \cdot (x - 3) \Leftrightarrow y = x - 1$

42 Θέμα 2 – 15657

α. Οι συντεταγμένες του M είναι η λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} 2x + y = 6 \\ x - 2y = -2(-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 6 \\ -2x + 4y = 4 \end{cases} \overset{(+)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 5y = 10 \\ x - 2y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 2 \end{cases}$$

Άρα $M(2, 2)$.

β. Είναι $3 \cdot 2 - 2 = 4$ οπότε οι ευθείες ε_1, ε_2 και ε_3 διέρχονται από το ίδιο σημείο.

43 Θέμα 2 – 18236

α. Το σημείο Γ είναι το σημείο τομής των ε_1, ε_2 και έχει συντεταγμένες τη λύση του συστήματος.

$$\begin{cases} y = -x + 4 \\ y = -\dfrac{1}{2}x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 4 = -\dfrac{1}{2}x + 2 \\ y = -x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 8 = -x + 4 \\ y = -x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \end{cases}$$

Άρα $\Gamma(4, 0)$.

β. i. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας $A\Gamma$ είναι

$\lambda_{A\Gamma} = \dfrac{0 - 5}{4 + 1} = -1$

ii. Το ύψος $B\Delta$ είναι κάθετο στην πλευρά $A\Gamma$, οπότε $\lambda_{B\Delta} \cdot \lambda_{A\Gamma} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{B\Delta} \cdot (-1) = -1 \Leftrightarrow \lambda_{B\Delta} = 1$. Επομένως η εξίσωση του ύψους $B\Delta$ είναι: $y - 1 = 1(x - 2) \Leftrightarrow y = x - 1$.

44 Θέμα 2 – 16766

α. • Η ευθεία (ε_1) έχει εξίσωση $x - 3y - 4 = 0$ και συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_1 = -\dfrac{1}{-3} = \dfrac{1}{3}$.

• Η ευθεία (ε_2) έχει εξίσωση $9x + 3y - 6 = 0$

και συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_2 = -\dfrac{9}{3} = -3$.

Είναι $\lambda_1\lambda_2 = \dfrac{1}{3}(-3) = -1$, οπότε οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι κάθετες.

β. Το σύστημα των εξισώσεων των (ε_1), (ε_2):

$$\begin{cases} x - 3y = 4 \\ 9x + 3y = 6 \end{cases} \overset{(+)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 10x = 10 \\ x - 3y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases},$$

έχει λύση το ζεύγος $(1, -1)$. Άρα $A(1, -1)$.

γ. Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A(1, -1)$ και είναι κάθετη στον άξονα $x'x$ έχει εξίσωση $x = 1$.

45 Θέμα 2 – 21662

α. Έστω A' το συμμετρικό του A ως προς το B. Τότε το σημείο B θα είναι το μέσο του AA'.

Είναι: • $x_B = \dfrac{x_A + x_{A'}}{2} \Leftrightarrow x_{A'} = 2x_B - x_A = 2\cdot(-3)-(-5) = -6+5 = -1$ και

• $y_B = \dfrac{y_A + y_{A'}}{2} \Leftrightarrow y_{A'} = 2y_B - y_A = 2\cdot 5 - 1 = 10-1 = 9$

Άρα $A'(-1, 9)$.

β. i. Είναι $\lambda_\varepsilon = -\dfrac{A}{B} = -\dfrac{-1}{1} = 1$ και $\varepsilon' \perp \varepsilon \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon'} \cdot \lambda_\varepsilon = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon'} \cdot 1 = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon'} = -1$.

Οπότε $\varepsilon' : y - y_B = \lambda_{\varepsilon'}(x - x_B) \Leftrightarrow y - 5 = -1\cdot(x+3) \Leftrightarrow y = -x+2$.

ii. Έστω M το σημείο τομής των ευθειών ε , ε' . Οι συντεταγμένες του M είναι η λύση του συστήματος

$\begin{cases} -x+y=2 \\ x+y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y=4 \\ x+y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases}$, άρα $M(0, 2)$.

iii. Αν B' είναι το συμμετρικό του B ως προς την ευθεία ε , τότε το B' είναι σημείο της ευθείας ε' και το M θα είναι το μέσο του BB' οπότε:

• $x_M = \dfrac{x_B + x_{B'}}{2} \Leftrightarrow x_{B'} = 2x_M - x_B = 2\cdot 0 - (-3) = 3$ και

• $y_M = \dfrac{y_B + y_{B'}}{2} \Leftrightarrow y_{B'} = 2y_M - y_B = 2\cdot 2 - 5 = -1$

Άρα $B'(3, -1)$.

46 Θέμα 4 – 15029

α. Η κλίση της ευθείας OA είναι $\lambda_{OA} = \dfrac{\sqrt{3}-0}{1-0} = \sqrt{3}$ και επειδή διέρχεται από την αρχή των αξόνων θα έχει εξίσωση $y = \sqrt{3}\cdot x$. Είναι $\varepsilon\varphi\omega = \lambda_{OA} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega = \sqrt{3}$, οπότε $\omega = 60^\circ$, αφού $0^\circ \le \omega < 180^\circ$.

β. Η κλίση της ευθείας AB είναι $\lambda_{AB} = \dfrac{\sqrt{3}-1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1-1} = \dfrac{-1}{\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ και αφού διέρχεται από το σημείο $A(1, \sqrt{3})$ έχει εξίσωση $y - \sqrt{3} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x-1) \Leftrightarrow y = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\cdot x + \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

Είναι $\varepsilon\varphi\varphi = \lambda_{AB} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\varphi = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, οπότε $\varphi = 150^\circ$.

γ. Είναι $\lambda_{OA}\cdot\lambda_{AB} = \sqrt{3}\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = -1$, οπότε $OA \perp AB$, άρα το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 90^\circ$.

Είναι $(OA) = \sqrt{(1-0)^2 + (\sqrt{3}-0)^2} = 2$, $(AB) = \sqrt{(\sqrt{3}+1-1)^2 + (\sqrt{3}-1-\sqrt{3})^2} = 2$ οπότε $(OA) = (AB)$, άρα το τρίγωνο OAB είναι και ισοσκελές.

δ. Αν θ η γωνία που σχηματίζει η ευθεία OB με τον $x'x$, είναι $\theta = \omega - A\hat{O}B = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$, αφού το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο και ισοσκελές. Άρα

$\varepsilon\varphi\theta = \varepsilon\varphi 15^\circ \Leftrightarrow \lambda_{OB} = \varepsilon\varphi 15^\circ \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{3}-1-0}{\sqrt{3}+1-0} = \varepsilon\varphi 15^\circ \Leftrightarrow \varepsilon\varphi 15^\circ = \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

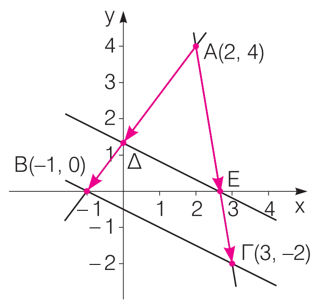
47 Θέμα 4 – 18568

α. Οι συντελεστές διεύθυνσης των ευθειών AB και $A\Gamma$ είναι

$\lambda_{AB} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{0-4}{-1-2} = \dfrac{4}{3}$ και $\lambda_{A\Gamma} = \dfrac{y_\Gamma - y_A}{x_\Gamma - x_A} = \dfrac{-2-4}{3-2} = \dfrac{-6}{1} = -6$.

Οπότε $\lambda_{AB} \neq \lambda_{A\Gamma}$, άρα $AB \nparallel A\Gamma$.

Άρα τα σημεία A, B και Γ αποτελούν κορυφές τριγώνου.



β. • Η ευθεία ΑΒ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\frac{4}{3}$ και διέρχεται από το σημείο $A(2, 4)$, οπότε η εξίσωσή της είναι $y-4=\frac{4}{3}(x-2) \Leftrightarrow y=\frac{4}{3}x-\frac{8}{3}+4 \Leftrightarrow y=\frac{4}{3}x+\frac{4}{3}$.

• Η ευθεία ΑΓ έχει συντελεστή διεύθυνσης -6 και διέρχεται από το σημείο $\Gamma(3,-2)$, οπότε η εξίσωσή της είναι $y+2=-6(x-3) \Leftrightarrow y=-6x+18-2 \Leftrightarrow y=-6x+16$

i. Στην εξίσωση της ευθείας ΑΒ ζητούμε $x=0$ και είναι $y=\frac{4}{3}$. Άρα $\Delta\left(0, \frac{4}{3}\right)$.

Στην εξίσωση της ευθείας ΑΓ θέτουμε $y=0$ και είναι $-6x+16=0 \Leftrightarrow x=\frac{8}{3}$. Άρα $E\left(\frac{8}{3}, 0\right)$.

ii. Είναι: • $\overrightarrow{A\Delta}=\left(0-2, \frac{4}{3}-4\right)=\left(-2, -\frac{8}{3}\right)$ και $\overrightarrow{\Delta B}=\left(-1-0, 0-\frac{4}{3}\right)=\left(-1, -\frac{4}{3}\right)$, οπότε $\overrightarrow{A\Delta}=2\left(-1, -\frac{4}{3}\right)=2\overrightarrow{\Delta B}$

• $\overrightarrow{AE}=\left(\frac{8}{3}-2, 0-4\right)=\left(\frac{2}{3}, -4\right)$ και $\overrightarrow{E\Gamma}=\left(3-\frac{8}{3}, -2-0\right)=\left(\frac{1}{3}, -2\right)$, οπότε $\overrightarrow{AE}=2\left(\frac{1}{3}, -2\right)=2\overrightarrow{E\Gamma}$.

γ. Είναι $\lambda_{\Delta E}=\dfrac{\frac{4}{3}-0}{0-\frac{8}{3}}=-\frac{1}{2}$ και $\lambda_{B\Gamma}=\dfrac{-2-0}{3+1}=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}$, οπότε $\lambda_{\Delta E}=\lambda_{B\Gamma}$, άρα η ευθεία ΔΕ είναι παράλληλη της ΒΓ.

48 Θέμα 4 – 15275

α. i. Αφού η ευθεία διέρχεται από το $M(2, 1)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda \in \mathbb{R}$, η εξίσωσή της είναι $y-1=\lambda(x-2) \Leftrightarrow y=\lambda x-2\lambda+1$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

ii. Η ευθεία τέμνει και τους δυο άξονες όταν δεν είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, δηλαδή $\lambda \neq 0$ και όταν δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων, δηλαδή $-2\lambda+1 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq \frac{1}{2}$.

Άρα η ευθεία σχηματίζει τρίγωνο με τους άξονες μόνο όταν $\lambda \in \mathbb{R}-\left\{0, \frac{1}{2}\right\}$.

β. i. Για $y=0$ έχουμε $\lambda x-2\lambda+1=0 \Leftrightarrow \lambda x=2\lambda-1 \Leftrightarrow x=\frac{2\lambda-1}{\lambda}$, οπότε $A\left(\frac{2\lambda-1}{\lambda}, 0\right)$.

• Για $x=0$ έχουμε $y=-2\lambda+1$, οπότε $B(0, -2\lambda+1)$.

Είναι: • $(OA)=\frac{|2\lambda-1|}{|\lambda|}$

• $(OB)=|-2\lambda+1|=|2\lambda-1|$

ii. Η ευθεία σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο, όταν $(OA)=(OB)$. Είναι:

$(OA)=(OB) \Leftrightarrow \frac{|2\lambda-1|}{|\lambda|}=|2\lambda-1| \Leftrightarrow |2\lambda-1|(|\lambda|-1)=0 \Leftrightarrow |\lambda|-1=0 \Leftrightarrow \lambda=1$ ή $\lambda=-1$, αφού $\lambda \neq \frac{1}{2}$

iii. Αν $\lambda=-1$, τότε $(OA)=3$ και $(OB)=3$, οπότε $(OAB)=\frac{3\cdot 3}{2}=\frac{9}{2}$

Αν $\lambda=1$, τότε $(OA)=1$ και $(OB)=1$, οπότε $(OAB)=\frac{1\cdot 1}{2}=\frac{1}{2}$.

49 Θέμα 4 – 14978

α. • $d_1=(MA)=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$

• $d_2=(MB)=\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2}$

β. Το M ανήκει στη μεσοκάθετο του ευθυγράμμου τμήματος AB, αν και μόνο αν ισαπέχει από τα άκρα του. Δηλαδή πρέπει $d_1=d_2$.

γ. Έχουμε

$$d_1=d_2 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} \Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2} \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2=(x-3)^2+(y-3)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2=(x-3)^2+(y-3)^2 \Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2-2y+1=x^2-6x+9+y^2-6y+9$$

$$\Leftrightarrow -2x-2y+2=-6x-6y+18 \Leftrightarrow x+y-4=0$$

Άρα η μεσοκάθετος του AB είναι η $x+y-4=0$.

δ. Για να είναι το τρίγωνο ΣAB ισόπλευρο, πρέπει το σημείο Σ να είναι σημείο της μεσοκάθετου. Αν $\Sigma(x_\Sigma, y_\Sigma)$ τότε $x_\Sigma+y_\Sigma-4=0 \Leftrightarrow y_\Sigma=4-x_\Sigma$, οπότε $\Sigma(x_\Sigma, 4-x_\Sigma)$.

Είναι: • $(AB)=\sqrt{(1-3)^2+(1-3)^2}=2\sqrt{2}$

• $(\Sigma A)=(\Sigma B)=\sqrt{(x_\Sigma-1)^2+(4-x_\Sigma-1)^2}=\sqrt{(x_\Sigma-1)^2+(x_\Sigma-3)^2}$

$=\sqrt{2x_\Sigma^2-8x_\Sigma+10}$

Πρέπει $(AB)=(\Sigma A)=(\Sigma B)$.

Οπότε $\sqrt{2x_\Sigma^2-8x_\Sigma+10}=2\sqrt{2} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x_\Sigma^2-4x_\Sigma+1=0$.

Βρίσκουμε $x_\Sigma=2\pm\sqrt{3}$ και $\Sigma(2+\sqrt{3}, 2-\sqrt{3})$ ή $\Sigma(2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3})$.

50 Θέμα 4 – 15475

α. Η εξίσωση της ευθείας που συνδέει τα δύο εργοστάσια είναι:

$$AB: y-1=\frac{3-1}{4-2}\cdot(x-2) \Leftrightarrow y-1=1\cdot(x-2) \Leftrightarrow y=x-1$$

β. Το σημείο της ακτής που απέχει εξ ίσου από τα δύο εργοστάσια είναι το σημείο τομής της ευθύγραμμης ακτής με τη μεσοκάθετο της AB.
Βρίσκουμε τις συντεταγμένες του μέσου $M(x_M, y_M)$ της AB.

Είναι $x_M=\frac{2+4}{2}=3$ και $y_M=\frac{1+3}{2}=2$. Άρα $M(3,2)$.

Ο συντελεστής διεύθυνσης της AB είναι $\lambda=1$.
Η μεσοκάθετος ε' της AB θα έχει συντελεστή διεύθυνσης λ' για τον οποίο θα ισχύει:
$\lambda\cdot\lambda'=-1$. Άρα $\lambda'=-1$.

Οπότε $\varepsilon': y-2=-1(x-3) \Leftrightarrow y=-x+5$.

Λύνουμε το σύστημα: $\begin{cases} y=2x-7 \\ y=-x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-7=-x+5 \\ y=-x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x=12 \\ y=-x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$

Άρα το ζητούμενο σημείο είναι το $(4, 1)$.

γ. Η απόσταση του καθενός από τα δύο εργοστάσια A και B από το σημείο N της ακτής είναι η ίδια.
Οπότε υπολογίζουμε τη μία.

Είναι $(AN)=\sqrt{(2-4)^2+(1-1)^2}=\sqrt{2^2+0^2}=2$.

51 Θέμα 4 – 15194

α. Είναι $\lambda_{AB}=\frac{4-1}{4-1}=1$ και $\lambda_{B\Gamma}=\frac{1-4}{3-4}=3$. Αφού $\lambda_{AB}\neq\lambda_{B\Gamma}$ τα σημεία A, B και Γ δεν είναι συνευθειακά, άρα σχηματίζουν τρίγωνο.

β. Για το μέσον M της $B\Gamma$ έχουμε $x_M=\frac{x_B+x_\Gamma}{2}=\frac{4+3}{2}=\frac{7}{2}$ και $y_M=\frac{y_B+y_\Gamma}{2}=\frac{4+1}{2}=\frac{5}{2}$. Άρα $M\left(\frac{7}{2},\frac{5}{2}\right)$.

Η μεσοκάθετος ε είναι κάθετη στη $B\Gamma$, οπότε $\lambda_\varepsilon\cdot\lambda_{B\Gamma}=-1\Leftrightarrow\lambda_\varepsilon\cdot 3=-1\Leftrightarrow\lambda_\varepsilon=-\frac{1}{3}$

Άρα $(\varepsilon): y-\frac{5}{2}=-\frac{1}{3}\left(x-\frac{7}{2}\right)\Leftrightarrow y=-\frac{1}{3}x+\frac{11}{3}$

γ. Το σημείο $K(x,y)$ ανήκει στην ευθεία (ε), οπότε $K\left(x,-\frac{1}{3}x+\frac{11}{3}\right)$.

Έχουμε

$$(KA)=(KB)\Leftrightarrow\sqrt{(x-1)^2+\left(1+\frac{1}{3}x-\frac{11}{3}\right)^2}=\sqrt{(x-4)^2+\left(4+\frac{1}{3}x-\frac{11}{3}\right)^2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(x-1)^2+\left(\frac{1}{3}x-\frac{8}{3}\right)^2=(x-4)^2+\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\right)^2\Leftrightarrow(x-4)^2-(x-1)^2=\left(\frac{1}{3}x-\frac{8}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow-3(2x-5)=-3\left(\frac{2}{3}x-\frac{7}{3}\right)\Leftrightarrow 2x-5=\frac{2}{3}x-\frac{7}{3}\Leftrightarrow 6x-15=2x-7\Leftrightarrow 4x=8\Leftrightarrow x=2$$

Οπότε $y=-\frac{1}{3}\cdot 2+\frac{11}{3}=3$, δηλαδή $K(2,3)$.

Το $K(2,3)$ είναι σημείο της μεσοκάθετου του $B\Gamma$, οπότε $(KB)=(K\Gamma)$ και αφού $(KA)=(KB)$, τελικά $(KA)=(KB)=(K\Gamma)$. Άρα το σημείο K είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $AB\Gamma$.

52 Θέμα 4 – 17078

α. i. AB: $y-y_B=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}(x-x_B)\Leftrightarrow y-\alpha=\frac{\alpha-2\alpha}{4-3}(x-4)\Leftrightarrow y-\alpha=-\alpha(x-4)\Leftrightarrow y=-\alpha x+5\alpha$.

ii. Τα σημεία $\Gamma(\alpha+1,1-\alpha)$ και $\Delta(\alpha,1)$ ανήκουν στην ευθεία AB αν και μόνο αν οι συντεταγμένες τους επαληθεύουν την εξίσωσή της, $y=-\alpha x+5\alpha$. Έχουμε:

- $1-\alpha=-\alpha(\alpha+1)+5\alpha\Leftrightarrow 1-\alpha=-\alpha^2-\alpha+5\alpha\Leftrightarrow\alpha^2-5\alpha+1=0$
- $1=-\alpha\cdot\alpha+5\alpha\Leftrightarrow 1=-\alpha^2+5\alpha\Leftrightarrow\alpha^2-5\alpha+1=0$

Βρίσκουμε $\alpha=\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$.

iii. • $\vec{AB}=(x_B-x_A,\,y_B-y_A)=(4-3,\,\alpha-2\alpha)=(1,-\alpha)$

• $\vec{\Delta\Gamma}=(x_\Gamma-x_\Delta,\,y_\Gamma-y_\Delta)=(\alpha+1-\alpha,\,1-\alpha-1)=(1,-\alpha)$

Είναι $\vec{AB}=\vec{\Delta\Gamma}$ και από το προηγούμενο ερώτημα προκύπτει ότι, όταν $\alpha\neq\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$ τα σημεία Γ και Δ δεν ανήκουν στην ευθεία AB. Άρα το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο όταν $\alpha\neq\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$.

β. Είναι: • $\vec{AB}=(1,-\alpha)$

• $\vec{A\Delta}=(x_\Delta-x_A,\,y_\Delta-y_A)=(\alpha-3,\,1-2\alpha)$

Για να είναι τετράγωνο, αρχικά θα έπρεπε να είναι ρόμβος, οπότε

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{A\Delta}| \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \sqrt{1+\alpha^2} = \sqrt{5\alpha^2 - 10\alpha + 10} \Leftrightarrow 5\alpha^2 - 10\alpha + 10 = 1 + \alpha^2 \Leftrightarrow 4\alpha^2 - 10\alpha + 9 = 0$$

Η τελευταία εξίσωση έχει διακρίνουσα $\Delta = (-10)^2 - 4\cdot 4\cdot 9 = -44 < 0$, άρα δεν έχει πραγματικές ρίζες. Οπότε δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός α ώστε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ να είναι τετράγωνο. Επομένως ο ισχυρισμός είναι ψευδής.

53 Θέμα 4 - 21160

α. Επειδή τα τετράπλευρα $OB\Delta E$ και $O\Gamma ZH$ είναι τετράγωνα, οι συντεταγμένες των κορυφών τους είναι: $\Delta(\kappa, -\kappa)$, $E(0, -\kappa)$, $Z(-2\kappa, 2\kappa)$ και $H(-2\kappa, 0)$.

- Η εξίσωση της ευθείας $\Gamma\Delta$ είναι:

$$y - y_\Delta = \frac{y_\Delta - y_\Gamma}{x_\Delta - x_\Gamma}(x - x_\Delta) \Leftrightarrow y + \kappa = \frac{-\kappa - 2\kappa}{\kappa - 0}(x - \kappa) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y + \kappa = -3(x - \kappa) \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow 3x + y - 2\kappa = 0.$$

- Η εξίσωση της ευθείας BZ είναι:

$$y - y_Z = \frac{y_Z - y_B}{x_Z - x_B}(x - x_Z) \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow 2x + 3y - 2\kappa = 0.$$

β. Η ευθεία (ε) του ύψους από την κορυφή $O(0, 0)$ του τριγώνου $OB\Gamma$, είναι κάθετη στην πλευρά $B\Gamma$.

Είναι: $\lambda_{B\Gamma} = \dfrac{2\kappa - 0}{0 - \kappa} = -2$, οπότε $\lambda_\varepsilon \cdot \lambda_{B\Gamma} = -1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = \dfrac{1}{2}$.

Άρα $\varepsilon : y = \dfrac{1}{2}x$.

γ. • Οι συντεταγμένες του σημείου τομής M των ευθειών (ε) και $\Gamma\Delta$ είναι η λύση συστήματος:

$$\begin{cases} 3x + y - 2\kappa = 0 \\ y = \frac{1}{2}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + \frac{1}{2}x - 2\kappa = 0 \\ y = \frac{1}{2}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{7}\kappa \\ y = \frac{2}{7}\kappa \end{cases}, \quad \text{άρα } M\left(\frac{4}{7}\kappa, \frac{2}{7}\kappa\right).$$

- Οι συντεταγμένες του M την επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας BZ, αφού

$$2\cdot\frac{4}{7}\kappa + 3\cdot\frac{2}{7}\kappa - 2\kappa = \frac{8}{7}\kappa + \frac{6}{7}\kappa - 2\kappa = \frac{14}{7}\kappa - 2\kappa = 2\kappa - 2\kappa = 0.$$

Άρα οι ευθείες $\Gamma\Delta$, BZ και η ευθεία (ε) διέρχονται από το ίδιο σημείο.

54 Θέμα 4 – 15253

α. Η εξίσωση (1) είναι της μορφής $Ax + By + \Gamma = 0$, όπου $A = \mu^2 - 1$, $B = 3\mu^2 - 2\mu - 1$, $\Gamma = -5\mu^2 + 4\mu + 1$.

Είναι: • $A = 0 \Leftrightarrow \mu^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \mu = 1$ ή $\mu = -1$

- $B = 0 \Leftrightarrow 3\mu^2 - 2\mu - 1 = 0 \Leftrightarrow \mu = 1$ ή $\mu = -\dfrac{1}{3}$

Άρα η (1) παριστάνει ευθεία για $\mu \neq 1$.

β. i. $A = 0 \Leftrightarrow \mu = 1$ ή $\mu = -1$. Όμως η τιμή $\mu = 1$ απορρίπτεται από το **α.** οπότε $\mu = -1$.

ii. $B = 0 \Leftrightarrow \mu = 1$ ή $\mu = -\dfrac{1}{3}$. Όμως η τιμή $\mu = 1$ απορρίπτεται από το **α.** οπότε $\mu = -\dfrac{1}{3}$.

iii. $\Gamma = 0 \Leftrightarrow -5\mu^2 + 4\mu + 1 = 0 \Leftrightarrow \mu = 1$ ή $\mu = -\dfrac{1}{5}$. Όμως η τιμή $\mu = 1$ απορρίπτεται από το **α.** οπότε $\mu = -\dfrac{1}{5}$.

γ. Για $\mu = -1$ έχουμε την ε_1: $4y - 8 = 0 \Leftrightarrow y = 2$.

Για $\mu = 0$ έχουμε την ε_2: $-x - y + 1 = 0$.

Οι ε_1 και ε_2 τέμνονται στο σημείο Μ με συντεταγμένες τη λύση του συστήματος $\begin{cases} y=2 \\ -x-y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=-1 \end{cases}$

οπότε $M(-1, 2)$.

Οι συντεταγμένες του Μ επαληθεύουν την (1) για κάθε τιμή του μ αφού

$(\mu^2-1)\cdot(-1)+(3\mu^2-2\mu-1)\cdot 2-5\mu^2+4\mu+1=-\mu^2+1+6\mu^2-4\mu-2-5\mu^2+4\mu+1=0$

Άρα όλες οι ευθείες που προκύπτουν από την (1), διέρχονται από το σταθερό σημείο $M(-1, 2)$.

55 Θέμα 4 – 15439

α. i. Είναι $A\Pi \perp \varepsilon$ και $\lambda_\varepsilon = -\frac{1}{1} = -1$, οπότε $\lambda_\varepsilon \cdot \lambda_{A\Pi} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{A\Pi} = 1$

Άρα $A\Pi : y-3=1(x-2) \Leftrightarrow y=x+1$.

Οι συντεταγμένες του σημείου Π έχουν συντεταγμένες τη λύση του συστήματος

$$\begin{cases} y=x+1 \\ x+y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x+1 \\ 2x+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=-1 \end{cases}$$

Άρα $\Pi(-1, 0)$.

ii. Το Π είναι το μέσον του AA' , οπότε

$$\begin{cases} \dfrac{x_{A'}+2}{2}=-1 \\ \dfrac{y_{A'}+3}{2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=-3 \end{cases} \quad \text{άρα } A'(-4,-3)$$

β. i. Είναι $\varepsilon_2 : y-1=\frac{-3-1}{-4-1}(x-1) \Leftrightarrow 4x-5y+1=0$.

ii. Οι συντεταγμένες του σημείου Σ είναι η λύση του συστήματος των εξισώσεων των ευθειών ε και ε_2 .

Είναι:

$$(-4)\cdot\begin{cases} y+x+1=0 \\ 4x-5y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x-4y-4=0 \\ 4x-5y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+1=0 \\ -9y-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-\frac{1}{3}+1=0 \\ y=-\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{2}{3} \\ y=-\frac{1}{3} \end{cases}, \text{ οπότε } \Sigma\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right).$$

γ. Η ε_1 διέρχεται από τα σημεία $A(2, 3)$ και $\Sigma\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$, οπότε

$$\varepsilon_1 : y-3=\frac{3+\frac{1}{3}}{2+\frac{2}{3}}(x-2) \Leftrightarrow 5x-4y+2=0$$

56 Θέμα 4 – 16003

α. Για $\alpha=0$ έχουμε $\varepsilon_0 : -4x+4=0 \Leftrightarrow x=1$, ενώ για $\alpha=4$ έχουμε $\varepsilon_4 : -8y+8=0 \Leftrightarrow y=1$.

Το κοινό τους σημείο έχει συντεταγμένες τη λύση του συστήματος: $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$.

Άρα οι ευθείες ε_0 , ε_4 έχουν κοινό σημείο $M(1, 1)$.

β. Αρκεί να αποδείξουμε ότι όλες οι ευθείες διέρχονται από το σημείο $M(1, 1)$. Για $x=y=1$ η αρχική εξίσωση γράφεται: $\alpha-4-2\alpha+\alpha+4=0 \Leftrightarrow 0\cdot\alpha=0$, που ισχύει για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$ και προφανώς ισχύει. Άρα, όλες οι ευθείες της οικογένειας διέρχονται από το σημείο Μ.

γ. i. • Οι ευθείες που προκύπτουν για $\alpha=4$ και $\alpha=0$ είναι οι $y=1$ και $x=1$ που δεν τέμνουν και τους δυο άξονες αφού η πρώτη είναι παράλληλη στον $x'x$ και η δεύτερη κάθετη στον $x'x$. Έτσι, βρίσκουμε τα κοινά σημεία των ευθειών της οικογένειας με τους άξονες, όταν $\alpha\neq0$ και $\alpha\neq4$.

Για $x=0$ έχουμε: $y=\frac{\alpha+4}{2\alpha}$, ενώ για $y=0$ έχουμε $x=-\frac{\alpha+4}{\alpha-4}$, οπότε τα κοινά σημεία της ε_α με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ είναι τα $A\left(\frac{\alpha+4}{4-\alpha},0\right)$ και $B\left(0,\frac{\alpha+4}{2\alpha}\right)$ αντίστοιχα. Τα σημεία A και B βρίσκονται στους θετικούς ημιάξονες, μόνο όταν: $\frac{\alpha+4}{4-\alpha}>0$, (1) και $\frac{\alpha+4}{2\alpha}>0$, (2). Είναι:

$(1)\Leftrightarrow(\alpha+4)(4-\alpha)>0\Leftrightarrow(\alpha-4)(\alpha+4)<0\Leftrightarrow-4<\alpha<4$, με $\alpha\neq0$

$(2)\Leftrightarrow2\alpha(\alpha+4)>0\Leftrightarrow\alpha(\alpha+4)>0\Leftrightarrow\alpha<-4$ ή $\alpha>0$, με $\alpha\neq4$

Η συναλήθευση των δυο αποτελεσμάτων δίνει $0<\alpha<4$ που είναι το ζητούμενο.

ii. Όταν $0<\alpha<4$, τα σημεία A, B είναι στους θετικούς ημιάξονες, οπότε $(OA)=\frac{\alpha+4}{4-\alpha}$ και $(OB)=\frac{\alpha+4}{2\alpha}$.

Έχουμε $(OA)=2(OB)\Leftrightarrow\frac{\alpha+4}{4-\alpha}=2\frac{\alpha+4}{2\alpha}\Leftrightarrow\alpha=4-\alpha\Leftrightarrow\alpha=2$.

57 Θέμα 4 – 16477

α. i. Όλες οι φωτεινές ακτίνες που παριστάνει η εξίσωση ε_λ διέρχονται από το φάρο Φ.

Οπότε οι συντεταγμένες του $\Phi(x_\Phi, y_\Phi)$ επαληθεύουν την εξίσωση της ε_λ για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$. Δηλαδή είναι:

$\lambda x_\Phi+(1-\lambda)y_\Phi+2=0\Leftrightarrow\lambda x_\Phi+y_\Phi-\lambda y_\Phi+2=0\Leftrightarrow(x_\Phi-y_\Phi)\lambda+y_\Phi+2=0\Leftrightarrow(x_\Phi-y_\Phi)\lambda=-y_\Phi-2$, $\lambda\in\mathbb{R}$

Πρέπει: $\begin{cases}x_\Phi-y_\Phi=0\\ \text{και}\\ -y_\Phi-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_\Phi=-2\\ \text{και}\\ y_\Phi=-2\end{cases}$. Άρα $\Phi(-2,-2)$.

ii. Έστω ότι υπάρχει φωτεινή ακτίνα που εκπέμπεται από το φάρο προς το αγκυροβολημένο πλοίο. Τότε οι συντεταγμένες του $O(0,0)$ επαληθεύουν την εξίσωση της ε_λ .

Έχουμε $\lambda\cdot0+(1-\lambda)\cdot0+2=0\Leftrightarrow2=0$, που είναι άτοπο.

Άρα δεν υπάρχει φωτεινή ακτίνα που εκπέμπεται από το φάρο προς το αγκυροβολημένο πλοίο.

β. Έστω $P(x_P, y_P)$. Είναι $y_P>y_\Phi\Leftrightarrow y_P>-2$, αφού το ρυμουλκό πλοίο P βρίσκεται βόρεια του φάρου Φ.

Επειδή το P ανήκει στην ευθεία $x+y+4=0$ ισχύει $x_P+y_P+4=0\Leftrightarrow x_P=-4-y_P$. Οπότε $P(-4-y_P, y_P)$ με $y_P>-2$.

Έχουμε $(PO)=4\Leftrightarrow\sqrt{(x_O-x_P)^2+(y_O-y_P)^2}=4\Leftrightarrow\sqrt{(0-(-4-y_P))^2+(0-y_P)^2}=4$

$$\Leftrightarrow\sqrt{(4+y_P)^2+y_P{}^2}=4\Leftrightarrow\sqrt{2y_P^2+8y_P+16}=4$$

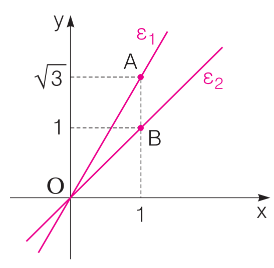
$$\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow\sqrt{2y_P^2+8y_P}=0\Leftrightarrow2y_P(y_P+4)=0\Leftrightarrow y_P=0 \text{ ή } y_P=-4$$

Δεκτή είναι μόνο η $y_P=0>-2$ αφού $-4<-2$.

Άρα $P(-4,0)$.

58 Θέμα 4 – 18244

α. Οι ε_1 , ε_2 διέρχονται από την αρχή των αξόνων και από τα σημεία $A(1,\sqrt{3})$ $B(1,1)$ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



β. Η ε_1 έχει συντελεστή διεύθυνσης $\sqrt{3}$ οπότε σχηματίζει με τον xx' γωνία 60° , ενώ η ε_2 έχει συντελεστή διεύθυνσης 1 οπότε σχηματίζει με τον xx' γωνία 45° .

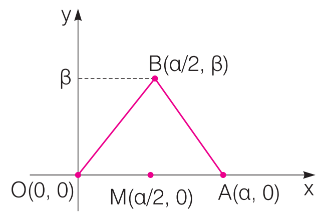
γ. Όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα, η οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες ε_1 , ε_2 είναι η διαφορά των γωνιών που σχηματίζει η κάθε μία από τις ε_1 , ε_2 με τον xx' , δηλαδή $60^\circ-45^\circ=15^\circ$.

δ. Το $\vec{\delta}_1=(1,\sqrt{3})$ είναι παράλληλο στην ευθεία ε_1 και το $\vec{\delta}_2=(1,1)$ είναι παράλληλο στην ευθεία ε_2. Είναι $|\vec{\delta}_1|=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{4}=2$,

$|\vec{\delta}_2|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ και $\vec{\delta}_1\cdot\vec{\delta}_2=(1,\sqrt{3})\cdot(1,1)=1+\sqrt{3}$, οπότε $\sigma\upsilon\nu15^o=\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\delta}_1,\vec{\delta}_2})=\dfrac{\vec{\delta}_1\cdot\vec{\delta}_2}{|\vec{\delta}_1|\cdot|\vec{\delta}_2|}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$.

59 Θέμα 4 – 15681

α. Αφού $\beta\neq0$ τα σημεία O, A, B δεν είναι συνευθειακά. Τα σημεία φαίνονται στο διπλανό σχήμα.



$$(OB)=\sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}-0\right)^2+(\beta-0)^2}=\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}+\beta^2}\ \text{ και}$$

$$(AB)=-\sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}-\alpha\right)^2+(\beta-0)^2}=\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}+\beta^2}$$

Οπότε το τρίγωνο OAB είναι ισοσκελές με βάση την OA.

Είναι $\dfrac{x_O+x_A}{2}=\dfrac{0+\alpha}{2}=\dfrac{\alpha}{2}=x_M$ και $\dfrac{y_O+y_A}{2}=0=y_M$ το μέσο του OA είναι το σημείο $M\left(\dfrac{\alpha}{2},0\right)$.

β. Είναι: • OB: $y-0=\dfrac{\beta-0}{\frac{\alpha}{2}-0}\cdot(x-0)\Leftrightarrow y=\dfrac{2\beta}{\alpha}\cdot x\Leftrightarrow 2\beta x-\alpha y=0$

• AB: $y-0=\dfrac{\beta-0}{\frac{\alpha}{2}-\alpha}\cdot(x-\alpha)\Leftrightarrow y=\dfrac{\beta}{-\frac{\alpha}{2}}\cdot(x-\alpha)\Leftrightarrow y=-\dfrac{2\beta}{\alpha}\cdot(x-\alpha)\Leftrightarrow 2\beta x+\alpha y-2\alpha\beta=0$

γ. • $d_1=\dfrac{\left|2\beta\frac{\alpha}{\beta}-\alpha\cdot0\right|}{\sqrt{(2\beta)^2+\alpha^2}}\overset{\alpha,\beta>0}{=}\dfrac{|\alpha\beta|}{\sqrt{4\beta^2+\alpha^2}}$ και

• $d_2=\dfrac{\left|2\beta\frac{\alpha}{2}+\alpha\cdot0-2\alpha\beta\right|}{\sqrt{(2\beta)^2+\alpha^2}}=\dfrac{|-\alpha\beta|}{\sqrt{4\beta^2+\alpha^2}}\overset{\alpha,\beta>0}{=}\dfrac{\alpha\beta}{\sqrt{4\beta^2+\alpha^2}}$ οπότε πράγματι $d_1=d_2$.

Άρα $d_1=d_2$.

δ. Η πρόταση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας που αποδείχθηκε είναι η εξής: Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο, το μέσο της βάσης ισαπέχει από τις ίσες πλευρές.

60 Θέμα 4 – 17695

α. • Έχουμε $A(t-1,2t-1)$, $t\geq0$. Έστω $A(x,y)$. Είναι:

$$\begin{cases}x=t-1\\y=2t-1\\t\geq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=x+1\\y=2(x+1)-1\\x+1\geq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=x+1\\y=2x+1\\x\geq-1\end{cases}$$

Άρα το σημείο A κινείται στην ημιευθεία ε_1: $y=2x+1$, $x\geq-1$.

• Έχουμε $B(3t-1,-4t-1)$, $t\geq0$. Έστω $B(x,y)$. Είναι:

$$\begin{cases}x=3t-1\\y=-4t-1\\t\geq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=\frac{x+1}{3}\\y=-4\frac{x+1}{3}-1\\\frac{x+1}{3}\geq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=\frac{x+1}{3}\\3y=-4x-7\\x\geq-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=\frac{x+1}{3}\\4x+3y+7=0\\x\geq-1\end{cases}$$

Άρα το σημείο B κινείται στην ημιευθεία ε_1: $4x+3y+7=0$, $x\geq-1$.

β. Αν υπάρχει χρονική στιγμή $t \geq 0$, κατά την οποία τα σημεία A και B ταυτίζονται θα είναι:

$$\begin{cases} x_A = x_B \\ y_A = y_B \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t-1 = 3t-1 \\ 2t-1 = -4t-1 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 0 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 0$$

Άρα τη χρονική στιγμή $t = 0$, τα σημεία A, B ταυτίζονται.

γ. Για $t = 2$ είναι $A(1, 3)$ και $B(5, -9)$, οπότε:

$$(AB) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(5-1)^2 + (-9-3)^2} = \ldots = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$$

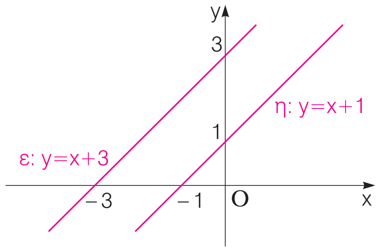
δ. Είναι $d(A, \varepsilon) = 6 \Leftrightarrow \dfrac{|4\cdot(t-1) + 3\cdot(2t-1) + 7|}{\sqrt{4^2+3^2}} = 6 \Leftrightarrow \dfrac{|10t|}{5} = 6 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow |10t| = 30 \Leftrightarrow |t| = 3 \Leftrightarrow t = 3$.

61 Θέμα 2 – 18240

α. Είναι (ε): $y = x+3 \Leftrightarrow x - y + 3 = 0$, οπότε $\delta(A, \varepsilon) = \dfrac{|1-2+3|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

β. Είναι $\eta // \varepsilon$, οπότε $\lambda_\eta = \lambda_\varepsilon = 1$ και αφού η (η) διέρχεται από το $A(1, 2)$ θα έχει εξίσωση $y - 2 = 1\cdot(x-1) \Leftrightarrow y = x+1$.

γ. Οι ευθείες (η), (ε) φαίνονται στο διπλανό σχήμα.



62 Θέμα 2 – 16759

α. Η (ε_1) έχει εξίσωση $x - 2y + 1 = 0$ και συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_1 = -\dfrac{A}{B} = -\dfrac{1}{-2} = \dfrac{1}{2}$.

Η (ε_2) έχει εξίσωση $2x + y - 4 = 0$ και συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_2 = -\dfrac{A}{B} = -\dfrac{2}{1} = -2$.

Οπότε $\lambda_1\lambda_2 = \dfrac{1}{2}(-2) = -1$, δηλαδή οι (ε_1) και (ε_2) είναι κάθετες.

β. Το σημείο τομής των (ε_1) και (ε_2) έχει συντεταγμένες τη λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} x - 2y = -1 \\ 2x + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - 1 \\ 2(2y-1) + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{7}{5} \\ y = \dfrac{6}{5} \end{cases}$$

Άρα οι (ε_1) και (ε_2) τέμνονται στο $A\left(\dfrac{7}{5}, \dfrac{6}{5}\right)$.

γ. Είναι (ε_3): $0\cdot x + 1\cdot y + 1 = 0$, οπότε $d(A, \varepsilon_3) = \dfrac{|0\cdot\frac{7}{5} + \frac{6}{5} + 1|}{\sqrt{0^2+1^2}} = \dfrac{11}{5}$.

63 Θέμα 2 - 18979

α. Οι ευθείες ε_1, ε_2 έχουν συντελεστές διεύθυνσης $\lambda_1 = -\dfrac{2}{3}$ και $\lambda_2 = -\dfrac{4}{6} = -\dfrac{2}{3}$, οπότε $\lambda_1 = \lambda_2$.

Επιπλέον για $x = 0$ βρίσκουμε αντίστοιχα ότι $y = \dfrac{5}{3}$ και $y = \dfrac{4}{3}$, δηλαδή τέμνουν τον άξονα $y'y$ σε διαφορετικά σημεία. Άρα οι ευθείες είναι παράλληλες.

β. Είναι $2\cdot 1 + 3\cdot 1 = 5$. Άρα το σημείο A είναι σημείο της ευθείας ε_1.

γ. Έχουμε $\varepsilon_2 : 4x + 6y = 8 \Leftrightarrow 2x + 3y - 4 = 0$, οπότε

$$d(A\,,\,\varepsilon_2) = \frac{2\cdot 1 + 3\cdot 1 - 4}{\sqrt{2^2+3^2}} = \frac{1}{\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{13}}{13}$$

64 Θέμα 2 – 16425

α. Είναι $\varepsilon_1:\ y=\frac{2}{3}x+1$ με $\lambda_1=\frac{2}{3}$ και

$\varepsilon_2:\ x=\frac{3}{2}y+9 \Leftrightarrow 2x=3y+18 \Leftrightarrow 2x-3y-18=0$ με $\lambda_2=-\frac{A}{B}=-\frac{2}{-3}=\frac{2}{3}$

Οπότε $\lambda_1=\lambda_2$ άρα $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.

β. Από την εξίσωση της ε_1 για $x=0$, βρίσκουμε το $y=1$, οπότε το σημείο $A(0,1)\in\varepsilon_1$. Άρα:

$$d(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=d(A,\varepsilon_2)=\frac{|2\cdot 0-3\cdot 1-18|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\frac{|-21|}{\sqrt{13}}=\frac{21}{\sqrt{13}}=\frac{21\sqrt{13}}{13}$$

65 Θέμα 2 – 15440

α. • $\vec{AB}=(3-0,\ 0-2)=(3,-2)$

• $\vec{A\Gamma}=(1-0,\ 1-2)=(1,-1)$

Β. i. Είναι $\det(\vec{AB},\vec{A\Gamma})=\begin{vmatrix}3 & -2\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-3+2=-1\neq 0$. Οπότε τα σημεία Α, Β και Γ ορίζουν τρίγωνο.

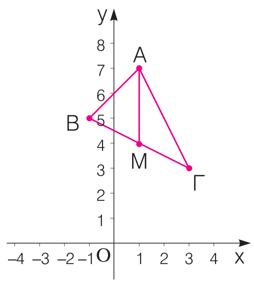
ii. $(AB\Gamma)=\frac{1}{2}|\det(\vec{AB},\vec{A\Gamma})=\frac{1}{2}|-1|=\frac{1}{2}$

66 Θέμα 2 – 16769

α. Είναι: • $\vec{AB}=(x_B-x_A,\ y_B-y_A)=(-1-1,\ 5-7)=(-2,-2)$

• $\vec{B\Gamma}=(x_\Gamma-x_B,\ y_\Gamma-y_B)=(3+1,\ 3-5)=(4,-2)$

Οπότε $(AB\Gamma)=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}-2 & -2\\ 4 & -2\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}|4+8|=6$



β. i. Το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ είναι $M\left(\frac{x_B+x_\Gamma}{2},\frac{y_B+y_\Gamma}{2}\right)$ ή $M(1,4)$.

ii. Είναι $x_M=x_A=1$, οπότε η ευθεία ΑΜ είναι κατακόρυφη, άρα έχει εξίσωση $x=1$.

67 Θέμα 2 – 16771

α. Είναι $\vec{AB}=(x_B-x_A,\ y_B-y_A)\Leftrightarrow(3,-1)=(x_B-2,\ y_B-1)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_B-2=3$ και $y_B-1=-1\Leftrightarrow x_B=5$ και $y_B=0$, άρα $B(5,0)$.

β. i. Είναι $\vec{A\Gamma}=(x_\Gamma-x_A,\ y_\Gamma-y_A)=(4-2,\ -1-1)=(2,-2)$ και $\vec{AB}=(3,-1)$

Είναι $\det(\vec{AB},\vec{A\Gamma})=\begin{vmatrix}3 & -1\\ 2 & -2\end{vmatrix}=3(-2)-2(-1)=-6+2=-4\neq 0$.

Άρα τα σημεία Α, Β και Γ σχηματίζουν τρίγωνο.

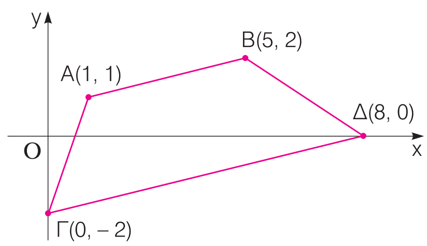
ii. $(AB\Gamma)=\frac{1}{2}|\det(\vec{AB},\vec{A\Gamma})|=\frac{1}{2}|-4|=\frac{1}{2}\cdot 4=2$

68 Θέμα 2 – 16810

α. Είναι: • $\lambda_{AB}=\frac{2-1}{5-1}=\frac{1}{4}$ και $\lambda_{\Gamma\Delta}=\frac{0+2}{8-0}=\frac{1}{4}$, οπότε $AB//\Gamma\Delta$.

• $\lambda_{A\Gamma}=\frac{-2-1}{0-1}=3$ και $\lambda_{B\Delta}=\frac{0-2}{8-5}=-\frac{2}{3}$, οι ευθείες ΑΓ και ΒΔ δεν είναι παράλληλες.

Άρα το ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο.



β. Για το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΓΔ έχουμε: $(\text{ΑΒΓΔ}) = (\text{ΑΒΔ}) + (\text{ΑΓΔ})$.

Για τα εμβαδά των τριγώνων ΑΒΔ και ΑΓΔ βρίσκουμε τα διανύσματα $\vec{\text{ΑΓ}}$, $\vec{\text{ΑΔ}}$ και $\vec{\text{ΑΒ}}$.

Είναι: • $\vec{\text{ΑΓ}} = (-1, -3)$, $\vec{\text{ΑΔ}} = (7, -1)$, $\vec{\text{ΑΒ}} = (4, 1)$

• $\det(\vec{\text{ΑΓ}}, \vec{\text{ΑΔ}}) = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = 22$, $\det(\vec{\text{ΑΒ}}, \vec{\text{ΑΔ}}) = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = -11$

Άρα $(\text{ΑΒΔ}) = \frac{1}{2}|\det(\vec{\text{ΑΒ}}, \vec{\text{ΑΔ}})| = \frac{11}{2}$ και $(\text{ΑΓΔ}) = \frac{1}{2}|\det(\vec{\text{ΑΓ}}, \vec{\text{ΑΔ}})| = 11$

Επομένως $(\text{ΑΒΓΔ}) = \frac{11}{2} + 11 = \frac{33}{2}$.

69 Θέμα 2 – 17805

α. Είναι: • $\vec{\text{ΟΑ}} = (3, 4)$.

• $\vec{\text{ΑΔ}} = (x_\Delta - x_\text{Α}, y_\Delta - y_\text{Α}) = \left(\frac{12}{5} - 3, \frac{16}{5} - 4\right) = \left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$.

β. Έχουμε $\vec{\text{ΑΔ}} = \left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right) = -\frac{1}{5}(3, 4) = -\frac{1}{5}\overrightarrow{\text{ΟΑ}}$.

γ. Είναι $\vec{\text{ΑΒ}} = (x_\text{Β} - x_\text{Α}, y_\text{Β} - y_\text{Α}) = (4, -3)$.

Έχουμε $(\text{ΑΔΒ}) = \frac{1}{2}|\det(\vec{\text{ΑΔ}}, \vec{\text{ΑΒ}}| \overset{\beta.}{=} \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ 4 & -3 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{9}{5} + \frac{16}{5}\right| = \frac{5}{2}$

Είναι $\frac{1}{5}\cdot(\text{ΟΑΒ}) = \frac{1}{5}\cdot\frac{25}{2} = \frac{5}{2}$.

Άρα $(\text{ΑΔΒ}) = \frac{1}{5}(\text{ΟΑΒ})$.

70 Θέμα 2 – 16194

α. Έχουμε $\begin{cases} 8x + y - 28 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x + y = 28 \\ x - y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x = 27 \\ x - y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$.

Άρα $\text{Μ}(3, 4)$.

β. i. Είναι $\vec{\text{ΟΜ}} = (3 - 0, 4 - 0) = (3, 4)$, οπότε $|\vec{\text{ΟΜ}}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$.

ii. $d(\text{Μ}, \varepsilon_3) = \frac{|3\cdot 3 + 4\cdot 4 + 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{30}{5} = 6$

71 Θέμα 4 – 16057

α. i. Οι ευθείες που έχουν κλίση $\lambda \in \mathbb{R}$ και διέρχονται από το σημείο $\text{Α}(2, 0)$ είναι

$\varepsilon_\lambda : y - 0 = \lambda(x - 2) \Leftrightarrow \lambda x - y - 2\lambda = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, (1).

ii. Είναι $d(\text{Β}, \varepsilon_\lambda) = \frac{|3\lambda - 4 - 2\lambda|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} = \frac{|\lambda - 4|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}}$.

Πρέπει $d(\text{Β}, \varepsilon_\lambda) = 1 \Leftrightarrow \frac{|\lambda - 4|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} = 1 \Leftrightarrow |\lambda - 4| = \sqrt{\lambda^2 + 1} \Leftrightarrow (\lambda - 4)^2 = \lambda^2 + 1 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \lambda = \frac{15}{8}$.

Για $\lambda = \frac{15}{8}$, από την (1) έχουμε: $\frac{15}{8}x - y - \frac{30}{8} = 0 \Leftrightarrow 15x - 8y - 30 = 0$.

β. Από το σημείο $A(2,0)$ διέρχεται επίσης η κατακόρυφη ευθεία $\zeta: x=2 \Leftrightarrow x-2=0$.

Είναι $d(B,\zeta)=\frac{|1\cdot 3+0\cdot 4-2|}{\sqrt{1}}=1$. Άρα και η (ζ) απέχει απόσταση 1 από το B .

γ. Έστω δ_1, δ_2 οι διχοτόμοι των γωνιών των $(\varepsilon), (\zeta)$. Αν $M(x_0, y_0)\in \delta_1$ ή δ_2 , τότε

$$d(M,\varepsilon)=d(M,\zeta) \Leftrightarrow \frac{|15x_0-8y_0-30|}{\sqrt{15^2+(-8)^2}}=\frac{|x_0-2|}{\sqrt{1^2+0^2}} \Leftrightarrow |15x_0-8y_0-30|=17|x-2|$$

$$\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow 4x_0-y_0-8=0 \text{ ή } x_0+4y_0-2=0$$

Άρα $\delta_1: 4x-y-8=0$ και $\delta_2: x+4y-2=0$.

72 Θέμα 4 – 15380

α. Σύμφωνα με τα δεδομένα έχουμε $(AB)=d(A,\varepsilon) \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \sqrt{10}=\frac{|6+\alpha|}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow |\alpha+6|=10 \Leftrightarrow \alpha=4$ ή $\alpha=-16$.

β. Για $\alpha=4$ έχουμε $\varepsilon: 3x+y+4=0$.

i. Για $x=0$ είναι $y=-4$, οπότε $\Gamma(0,-4)$.

Είναι $\vec{AB}=(-3,-1)$ και $\vec{A\Gamma}=(-1,-7)$. Οπότε $(AB\Gamma)=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -7 \end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\cdot 20=10$.

ii. Το σημείο που απέχει τη μικρότερη απόσταση από την αρχή των αξόνων, είναι το σημείο τομής της ευθείας ε με την ευθεία δ που διέρχεται από το O και είναι κάθετη στην ε .

Είναι $\lambda_\varepsilon=-3$, οπότε $\lambda_\varepsilon\cdot\lambda_\delta=-1 \Leftrightarrow \lambda_\delta=\frac{1}{3}$. Άρα $\delta: y=\frac{1}{3}x$.

Το ζητούμενο σημείο έχει συντεταγμένες τη λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} 3x+y+4=0 \\ y=\frac{1}{3}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+\frac{1}{3}x+4=0 \\ y=\frac{1}{3}x \end{cases} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \begin{cases} 10x+12=0 \\ y=\frac{1}{3}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{6}{5} \\ y=-\frac{2}{5} \end{cases}$$

. Άρα είναι το σημείο $\left(-\frac{6}{5},-\frac{2}{5}\right)$.

73 Θέμα 4 – 15433

α. i. Το σημείο του δρόμου από το οποίο ο οικισμός A απέχει τη μικρότερη απόσταση είναι το σημείο τομής της ευθείας και της κάθετης ευθείας ε στην ευθεία δ που διέρχεται από το σημείο A .

Είναι $\lambda_\delta=-\frac{1}{1}=-1$, οπότε $\lambda_\delta\cdot\lambda_\varepsilon=-1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon=1$.

Οπότε $\varepsilon: y-(-2)=1\cdot(x-(-1)) \Leftrightarrow x-y-1=0$.

Λύνοντας το σύστημα εξισώσεων των δύο ευθειών ε και δ βρίσκουμε το ζητούμενο σημείο:

$$\begin{cases} x+y-1=0 \\ x-y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2=0 \\ x+y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$$

, οπότε το $(1,0)$.

ii. Η θέση του κέντρου υγείας της περιοχής που ισαπέχει από τους δύο οικισμούς είναι το κοινό σημείο της ευθείας δ και της μεσοκαθέτου ζ του AB .

Είναι $\lambda_{AB}=\frac{1-(-2)}{3-(-1)}=\frac{3}{4}$ και $\lambda_{AB}\cdot\lambda_\zeta=-1 \Leftrightarrow \lambda_\zeta=-\frac{4}{3}$.

Το μέσο M του AB έχει συντεταγμένες $x_M=\frac{-1+3}{2}=1$, $y_M=\frac{-2+1}{2}=-\frac{1}{2}$, οπότε $M(1,-\frac{1}{2})$.

Άρα $\zeta: y+\frac{1}{2}=-\frac{4}{3}(x-1) \Leftrightarrow 8x+6y-5=0$.

Έχουμε $\begin{cases} x+y-1=0 \\ 8x+6y-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1-x \\ 8x+6(1-x)-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=\frac{3}{2} \end{cases}$, οπότε είναι το σημείο $\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$.

β. Έστω $\Gamma(x, y)$ σημείο της $\delta: x+y-1=0 \Leftrightarrow y=1-x$. Άρα $\Gamma(x, 1-x)$.

Είναι $\vec{AB}=(4, 3)$ και $\vec{A\Gamma}=(x+1, 3-x)$.

Έχουμε $(AB\Gamma)=8 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ x+1 & 3-x \end{vmatrix}\right|=8 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow |9-7x|=16 \Leftrightarrow x=-1$ ή $x=\frac{25}{7}$.

Άρα η θέση Γ του αυτοκινήτου είναι στα σημεία $(-1, 2)$ ή $\left(\frac{25}{7}, -\frac{18}{7}\right)$.

74 Θέμα 4 – 14984

α. Έστω $M(x, y)$. Είναι $\vec{AM}=(x+2, y+3)$, $\vec{AB}=(9, 12)$.

Έχουμε $(AMB)=12 \Leftrightarrow \frac{1}{2}|\det(\vec{AM}, \vec{AB})|=12 \Leftrightarrow \left|\begin{vmatrix} x+2 & y+3 \\ 9 & 12 \end{vmatrix}\right|=24 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |12(x+2)-9(y+3)|=24 \Leftrightarrow 3|4(x+2)-3(y+3)|=24$

$\Leftrightarrow |4x+8-3y-9|=8 \Leftrightarrow |4x-3y-1|=8$

$\Leftrightarrow 4x-3y-1=8$ ή $4x-3y-1=-8 \Leftrightarrow 4x-3y-9=0$ ή $4x-3y+7=0$.

Οι ευθείες είναι παράλληλες αφού $\lambda_1=\lambda_2=\frac{4}{3}$ και τέμνουν τον $y'y$ στα $(0, -3)$ και $(0, \frac{7}{3})$ που είναι διαφορετικά.

β. Παρατηρούμε ότι $\lambda_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{9-(-3)}{7-(-2)}=\frac{4}{3}$, άρα η ευθεία AB είναι παράλληλη στις (ε_1) και (ε_2) .

Επομένως αρκεί να αποδείξουμε ότι ένα οποιοδήποτε σημείο της AB ισαπέχει από τις (ε_1) και (ε_2) .

Βρίσκουμε το μέσο του AB που είναι το σημείο $K\left(\frac{-2+7}{2}, \frac{-3+9}{2}\right)$ δηλαδή το $K(\frac{5}{2}, 3)$.

Είναι $d(K, \varepsilon_1)=\frac{|4\cdot\frac{5}{2}-3\cdot 3-9|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{8}{5}$ και $d(K, \varepsilon_2)=\frac{|4\cdot\frac{5}{2}-3\cdot 3+7|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{8}{5}$.

γ. Το τετράπλευρο AM_1BM_2 αποτελείται από τα τρίγωνα AM_1B και AM_2B , οπότε $(AM_1BM_2)=(AM_1B)+(AM_2B)=12+12=24$, αφού $(AMB)=12$, για κάθε σημείο M των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.

Το ίδιο ισχύει για οποιαδήποτε σημεία X, Y των (ε_1) και (ε_2) αντίστοιχα, αρκεί να σχηματίζεται τετράπλευρο (τα σημεία M_1, B, M_2 να μην είναι συνευθειακά).

Άρα υπάρχουν άπειρα τετράπλευρα $AXBY$ με σταθερό εμβαδόν 24 .

75 Θέμα 4 – 15273

α. Είναι: $\vec{AB}=(-1, 1)$ και $\vec{A\Gamma}=(-5, -2)$ οπότε $\det(\vec{AB}, \vec{A\Gamma})=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -5 & -2 \end{vmatrix}=2+5=7\neq 0$.

Άρα τα σημεία A , B , Γ δεν είναι στην ίδια ευθεία, οπότε σχηματίζουν τρίγωνο.

β. Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία B , Γ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=\frac{2-5}{-2-2}=\frac{3}{4}$ και

εξίσωση $y-5=\frac{3}{4}(x-2) \Leftrightarrow y=\frac{3}{4}x+\frac{7}{2}$.

γ. Αν $M(x, y)$ τότε $\begin{cases} x=4\alpha-1 \\ y=3\alpha+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=\frac{x+1}{4} \\ y=3\frac{x+1}{4}+1 \end{cases}$.

Άρα $y=\frac{3}{4}x+\frac{3}{4}+1=\frac{3}{4}x+\frac{7}{4}$.

Άρα το Μ βρίσκεται πάνω στην ευθεία $y=\frac{3}{4}x+\frac{7}{4}$ που είναι παράλληλη στη ΒΓ αφού έχουν ίδια κλίση και τέμνουν το y΄y στα $(0,\frac{7}{2})$, $(0,\frac{7}{4})$ που είναι διαφορετικά.

Για $x=3$ έχουμε $y=\frac{9}{4}+\frac{7}{4}=4$, οπότε η ευθεία αυτή διέρχεται από το Α .

δ. Είναι:
- $(AB\Gamma)=\frac{1}{2}|7|=\frac{7}{2}$
- $\vec{B\Gamma}=(-4,-3)$ και $\vec{BM}=(4\alpha-3,3\alpha-4)$, οπότε

$$\det(\vec{B\Gamma},\vec{BM})=\begin{vmatrix}-4 & -3\\ 4\alpha-3 & 3\alpha-4\end{vmatrix}=-12\alpha+16+12\alpha-9=7 \text{ , άρα } (MB\Gamma)=\frac{1}{2}|7|=\frac{7}{2}$$

Άρα $(MB\Gamma)=(AB\Gamma)$.

Τα εμβαδά των τριγώνων ΑΒΓ , ΜΒΓ είναι ίσα για οποιαδήποτε θέση του Μ , αφού τα τρίγωνα έχουν την ίδια βάση ΒΓ και το ύψος τους υ είναι ίσο με την απόσταση των δύο παράλληλων ευθειών του ερωτήματος **γ.**

76 Θέμα 4 – 17694

α. Εφόσον τα σημεία της ευθείας ε πάνω στην οποία βρίσκεται η σιδηροδρομική γραμμή ισαπέχουν από τα Α , Β αυτή θα είναι η μεσοκάθετος ε του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ . Αν Μ το μέσο του ΑΒ , τότε

$x_M=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{3+7}{2}=5$, $y_M=\frac{y_A+y_B}{2}=2$, άρα $M(5,2)$.

Είναι $\lambda_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{-2-6}{7-3}=-2$ και $\varepsilon\perp AB\Leftrightarrow\lambda_\varepsilon\cdot\lambda_{AB}=-1\Leftrightarrow\lambda_\varepsilon=\frac{1}{2}$.

Άρα $\varepsilon: y-2=\frac{1}{2}(x-5)\Leftrightarrow \varepsilon: 2y-4=x-5\Leftrightarrow\varepsilon: x-2y-1=0$.

β. Αν $\Sigma(x,y)$ σημείο της ε , τότε $x-2y-1=0\Leftrightarrow x=2y+1$, οπότε $\Sigma(2y+1,y)$.

Είναι:
- $\vec{AB}=(x_B-x_A,y_B-y_A)=(7-3,-2-6)=(4,-8)$ και
- $\vec{A\Sigma}=(x_\Sigma-x_A,y_\Sigma-y_A)=(2y+1-3,y-6)=(2y-2,y-6)$

Έχουμε $(AB\Sigma)=20\Leftrightarrow\frac{1}{2}|\det(\vec{AB},\vec{A\Sigma})|=20\Leftrightarrow\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}4 & -8\\ 2y-2 & y-6\end{vmatrix}\right|=20$

$\Leftrightarrow|4(y-6)-(-8)(2y-2)|=40\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow|20y-40|=40$

$\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow y=0$ ή $y=4$

Βρίσκουμε $\Sigma(1,0)$ ή $\Sigma(9,4)$.

77 Θέμα 4 – 15987

α. $\varepsilon: y-y_B=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}(x-x_A)\Leftrightarrow y-3=\frac{3-1}{2-1}(x-2)\Leftrightarrow y=2x-1$

β.
- Για $y=0$ είναι $2x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$, οπότε η ευθεία ε τέμνει τον x΄x στο $A(\frac{1}{2},0)$.
- Για $y=5$ είναι $2x-1=5\Leftrightarrow x=3$, οπότε η ευθεία ε διέρχεται από το $B(3,5)$.

Είναι $x_O<x_A<x_\Gamma$ και $y_B<y_\Gamma$, οπότε το Γ δεν ανήκει στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από την ε και το $O(0,0)$.

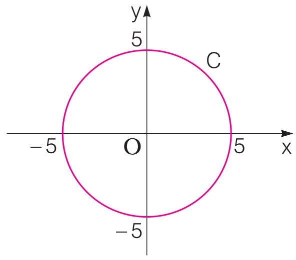
γ. Τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΑΒΓ έχουν την ίδια βάση ΑΒ , με φορέα την ευθεία (ε) .
Οι αποστάσεις Ο και Γ αντίστοιχα από την (ε) είναι τα ύψη των ΑΟΒ , ΑΒΓ .

Είναι: • $d(O,\varepsilon)=\dfrac{|2\cdot 0-0-1|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

• $d(\Gamma,\varepsilon)=\dfrac{|2\cdot 2^{100}-5-1|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{2^{101}-6}{\sqrt{5}}>\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

Άρα $d(O,e)<d(\Gamma,\varepsilon)$ οπότε το τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει μεγαλύτερο εμβαδόν από το AOB.

78 Θέμα 2 – 18700



α. Η εξίσωση του κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων, δηλαδή το $(0,0)$ και ακτίνα 5 είναι $C: x^2+y^2=5^2 \Leftrightarrow x^2+y^2=25$. Ο κύκλος C φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

β. i. Είναι $(OA)=\sqrt{(3-0)^2+(-4-0)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$, οπότε το A ανήκει στον κύκλο C.

ii. Η εξίσωση εφαπτομένης του C στο $A(3,-4)$ είναι $\varepsilon: x\cdot x_A+y\cdot y_A=25 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \varepsilon: 3x-4y=25$.

79 Θέμα 2 – 16773

α. Η ακτίνα του κύκλου είναι $\rho=(OA)=\sqrt{(1-0)^2+(2-0)^2}=\sqrt{5}$

Άρα η εξίσωση του είναι: $x^2+y^2=(\sqrt{5})^2 \Leftrightarrow x^2+y^2=5$.

β. i. Η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο του $A(x_1, y_1)$ είναι:

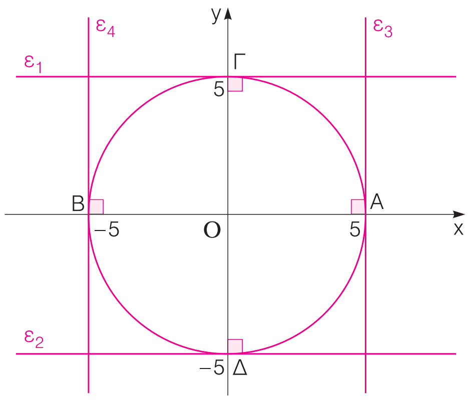
$xx_A+yy_A=\rho^2 \Leftrightarrow x+2y=5$.

ii. Για να είναι το σημείο B αντιδιαμετρικό του A, θα πρέπει το κέντρο O του κύκλου να είναι το μέσο του τμήματος AB. Οπότε:

$$\begin{cases} x_O=\dfrac{x_A+x_B}{2} \\ y_O=\dfrac{y_A+y_B}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0=\dfrac{1+x_B}{2} \\ 0=\dfrac{2+y_B}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0=1+x_B \\ 0=2+y_B\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B=-1 \\ y_B=-2\end{cases}$$, άρα $x_B=-1$ και $y_B=-2$.

Άρα $B(-1,-2)$.

80 Θέμα 2 - 18241



α. Ο κύκλος C, που φαίνεται στο διπλανό σχήμα, έχει κέντρο το $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=\sqrt{25}=5$. Τα σημεία τομής με τον άξονα $x'x$ είναι τα σημεία $A(5,0)$ και $B(-5,0)$ ενώ τα σημεία τομής με τον άξονα $y'y$ είναι τα σημεία $\Gamma(0,5)$ και $\Delta(0,-5)$.

β. Οι εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία $\Gamma(0,5)$ και $\Delta(0,-5)$ είναι κάθετες στις ακτίνες $O\Gamma$, $O\Delta$ οπότε είναι παράλληλες στον $x'x$ άρα έχουν εξισώσεις $y=5$ και $y=-5$ αντίστοιχα.

Είναι οι ευθείες ε_1, ε_2 που φαίνονται στο σχήμα.

γ. Οι εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία $A(5,0)$ και $B(-5,0)$ είναι κάθετες στις ακτίνες OA, OB στον $x'x$, οπότε είναι παράλληλες στον $y'y$ άρα έχουν εξισώσεις $x=5$ και $x=-5$ αντίστοιχα. Είναι οι ευθείες ε_3, ε_4 που φαίνονται στο σχήμα.

81 Θέμα 2 – 15028

α. Είναι C: $(x-1)^2+(y-2)^2=4$.

β. Είναι $d(K,\varepsilon)=\dfrac{|3\cdot 1+4\cdot 2-1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{|3+8-1|}{\sqrt{9+16}}=\dfrac{|10|}{\sqrt{25}}=\dfrac{10}{5}=2$.

γ. Αφού $d(K,\varepsilon)=2=\rho$ η ευθεία (ε) εφάπτεται στον κύκλο C.

82 Θέμα 2 – 17317

α. Ο κύκλος C έχει κέντρο $K(1,2)$ και ακτίνα $\rho=\sqrt{4}=2$.

β. Έχουμε: $d(K,\varepsilon)=\dfrac{|3\cdot1-4\cdot2-8|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{13}{\sqrt{25}}=\dfrac{13}{5}$.

γ. Αφού $d(K,\varepsilon)=\dfrac{13}{5}>2$, η ευθεία και ο κύκλος δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.

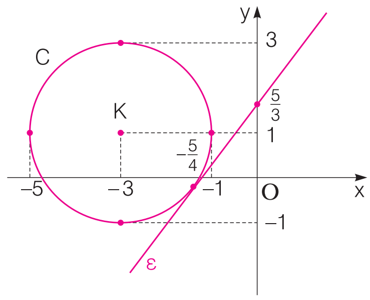
83 Θέμα 2 – 18239

α. Είναι $d(K,\varepsilon)=\dfrac{|4(-3)-3\cdot1+5|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\dfrac{|-10|}{\sqrt{25}}=\dfrac{10}{5}=2$.

β. Ο ζητούμενος κύκλος θα έχει ακτίνα $\rho=d(K,\varepsilon)=2$, οπότε η εξίσωσή του θα είναι η $(x+3)^2+(y-1)^2=4$.

γ. Η ευθεία (ε) τέμνει τους άξονες $x'x$, $y'y$ στα $-\dfrac{5}{4}$, $\dfrac{5}{3}$ αντίστοιχα.

Σχεδιάζουμε με διαβήτη τον κύκλο κέντρου $K(-3,1)$ και $\rho=2$.



84 Θέμα 2 - 20890

α. Είναι

$$B\Gamma: y-y_\Gamma=\frac{y_B-y_\Gamma}{x_B-x_\Gamma}(x-x_\Gamma)\Leftrightarrow y+3=\frac{-8+3}{2-7}(x-7)\Leftrightarrow y+3=\frac{-5}{-5}(x-7)\Leftrightarrow y+3=x-7\Leftrightarrow x-y-10=0$$

β. Η ακτίνα του ζητούμενου κύκλου είναι

$$\rho=d(A,B\Gamma)=\frac{|1\cdot3-1\cdot(-3)-10|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|-4|}{\sqrt{2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}.$$

Οπότε η ζητούμενη εξίσωση είναι:

$$C:(x-x_A)^2+(y-y_A)^2=\rho^2\Leftrightarrow(x-3)^2+(y+3)^2=(2\sqrt{2})^2\Leftrightarrow(x-3)^2+(y+3)^2=8.$$

85 Θέμα 2 – 18238

α. Είναι $x_K=\dfrac{x_A+x_B}{2}=\dfrac{1+(-3)}{2}=-1$ και $y_K=\dfrac{y_A+y_B}{2}=\dfrac{3+5}{2}=4$, οπότε $K(-1,4)$.

β. Είναι $(KA)=\sqrt{(x_K-x_A)^2+(y_K-y_A)^2}=\sqrt{(-1-1)^2+(4-3)^2}=\sqrt{5}$.

γ. Ο κύκλος έχει κέντρο το $K(-1,4)$ και ακτίνα $\rho=(KA)=\sqrt{5}$, οπότε έχει εξίσωση: $(x+1)^2+(y-4)^2=5$.

86 Θέμα 2 – 16808

α. • Το μέσο K του τμήματος AB είναι $K\left(\dfrac{-8+4}{2},\dfrac{1+5}{2}\right)$ ή $K(-2,3)$.

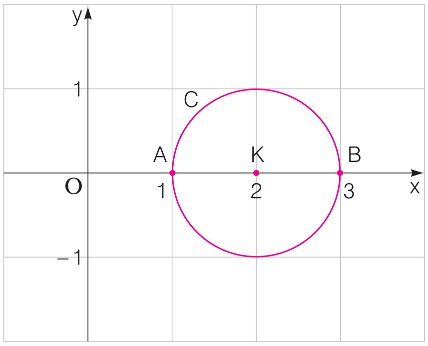
• Είναι $(AB)=\sqrt{(-8-4)^2+(1-5)^2}=\sqrt{144+16}=\sqrt{160}=4\sqrt{10}$.

• Άρα το AB είναι διάμετρος του κύκλου C $(K\Gamma)=\sqrt{(-2+4)^2+(3-9)^2}=\sqrt{4+36}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}=\dfrac{AB}{2}$.

β. Το κέντρο του κύκλου είναι το σημείο $K(-2,3)$ και η ακτίνα του $\rho=2\sqrt{10}$, άρα η εξίσωση του κύκλου C είναι: $(x+2)^2+(y-3)^2=40$.

87 Θέμα 2 – 15994

α. Ως γνωστόν, η εξίσωση $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$, με $A^2+B^2-4\Gamma>0$ παριστάνει κύκλο, με κέντρο $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}$.



Επειδή $A^2+B^2-4\Gamma=(-4)^2+0^2-4\cdot3=4>0$, η (1) παριστάνει κύκλο. Είναι $-\frac{A}{2}=2$, $-\frac{B}{2}=0$ και $\rho=\frac{\sqrt{(-4)^2-4\cdot3}}{2}=1$. Άρα το κέντρο του κύκλου είναι το σημείο $K(2,\,0)$ και η ακτίνα του $\rho=1$.

β. Ο κύκλος (C) φαίνεται στο διπλανό σχήμα.
Ο κύκλος τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $A(1,\,0)$ και $B(3,\,0)$.

88 Θέμα 2 – 15680

α. Είναι $\rho=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}=\frac{\sqrt{(-2)^2+(-4)^2-4\cdot1}}{2}=2$.

β. Είναι $d(K,\varepsilon)=\frac{|3\cdot1+4\cdot2+1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{12}{5}$.

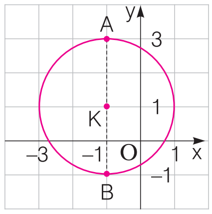
γ. Αφού $d(K,\varepsilon)=\frac{12}{5}>\rho$, η ευθεία ε και ο κύκλος C δεν έχουν κοινά σημεία.

89 Θέμα 2 – 19039

α. Η εξίσωση (1) γίνεται:

$$(x-1)(x+3)+(y+1)(y-3)=-4\Leftrightarrow x^2+3x-x-3+y^2-3y+y-3=-4\Leftrightarrow x^2+2x+y^2-2y=2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+2x+1+y^2-2y+1=2+1+1\Leftrightarrow(x+1)^2+(y-1)^2=2^2\ ,\ (2).$$



Άρα η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(-1,\,1)$ και ακτίνα $R=2$.

β. i. Για $x=-1$ η εξίσωση (2) γίνεται:

$$(-1+1)^2+(y-1)^2=2^2\Leftrightarrow(y-1)^2=4\Leftrightarrow y-1=2 \text{ ή } y-1=-2\Leftrightarrow y=3 \text{ ή } y=-1$$

Άρα τα σημεία είναι: $A(-1,\,3)$ και $B(-1,\,-1)$.

ii. Το μέσο του AB είναι $\left(\frac{-1-1}{2},\frac{3-1}{2}\right)$ ή $(-1,\,1)$, δηλαδή το κέντρο Κ του κύκλου. Άρα τα Α και Β είναι αντιδιαμετρικά σημεία του κύκλου.

90 Θέμα 4 – 18567

α. i. Ο κύκλος C έχει κέντρο $O(0,\,0)$ και ακτίνα $\rho=2$.

Το σημείο $A(2\sqrt{2},\,0)$ είναι εξωτερικό του κύκλου C γιατί $(OA)=|x_A-x_O|=2\sqrt{2}>\rho=2$.

ii. Οι ευθείες που διέρχονται από το σημείο $A(2\sqrt{2},\,0)$ είναι:

- Η κατακόρυφη $x=2\sqrt{2}$ που δεν είναι εφαπτομένη του κύκλου C γιατί $d(O,\varepsilon)=2\sqrt{2}$.
- Οι ευθείες με εξίσωση (ε): $y-0=\lambda(x-2\sqrt{2})$ με $\lambda\in\mathbb{R}$ ή $\lambda x-y-2\lambda\sqrt{2}=0$.

Η (ε) είναι εφαπτομένη του C αν και μόνο αν $d=(O,\varepsilon)=\rho\Leftrightarrow\frac{|\lambda\cdot0-0-2\lambda\sqrt{2}|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=2\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\,|\lambda|=2\sqrt{\lambda^2+1}\Leftrightarrow 8\lambda^2=4\lambda^2+4\Leftrightarrow 4\lambda^2-4=0\Leftrightarrow\lambda^2=1\Leftrightarrow\lambda=\pm1.$$

Για $\lambda=1$, (ε_1): $y=x-2\sqrt{2}$ και για $\lambda=-1$, (ε_2): $y=-x+2\sqrt{2}$.

Παρατηρούμε ότι οι συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 των ευθειών ε_1 και ε_2 είναι 1 και -1 αντίστοιχα και $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$. Άρα οι εφαπτόμενες ευθείες ε_1 και ε_2 του κύκλου από το σημείο Α είναι μεταξύ τους κάθετες.

β. Αν Β, Γ τα σημεία επαφής των εφαπτόμενων ευθειών ε_1 και ε_2 με τον κύκλο C, τότε οι ακτίνες του κύκλου στα σημεία αυτά είναι κάθετες στις αντίστοιχες εφαπτόμενες. Οπότε το τετράπλευρο ΑΒΟΓ έχει 3 ορθές γωνίες, οπότε είναι ορθογώνιο και αφού ΟΓ = ΟΒ = 2 ως ακτίνες του κύκλου είναι ρόμβος. Άρα το ΑΒΟΓ είναι τετράγωνο με πλευρά ίση με την ακτίνα του κύκλου, δηλαδή 2. Επομένως $(ΑΒΟΓ) = 2^2 = 4$.

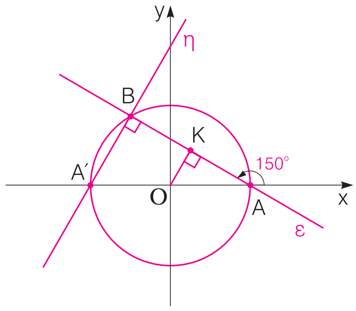
91 Θέμα 4 – 18569

α. i. Ο κύκλος C έχει κέντρο $O(0, 0)$ και ακτίνα $\rho = 1$.

Για $y = 0$ έχουμε: $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Άρα $A'(-1, 0)$ και $A(1, 0)$.

ii. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ε που διέρχεται από το σημείο $A(1, 0)$, είναι $\lambda_\varepsilon = \varepsilon\varphi 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Οπότε $\varepsilon: \; y - 0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1) \Leftrightarrow y = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1) \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{3}x - y + \frac{\sqrt{3}}{3} = 0$.



β. i. Αν ΟΚ το απόστημα της χορδής ΑΒ, τότε

$$OK = d(O, \varepsilon) = \frac{\left|-\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot 0 - 0 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right|}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 1^2}} = \frac{\left|\frac{\sqrt{3}}{3}\right|}{\sqrt{\frac{12}{9}}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{2\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{1}{2} .$$

Αν $AK = \mu = \frac{AB}{2}$, με Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΟΑΚ έχουμε:

$OK^2 + AK^2 = OA^2 \Leftrightarrow AK^2 = 1 - \frac{1}{4} \Leftrightarrow AK^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow AK = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Άρα $AB = \sqrt{3}$.

ii. Η γωνία $A'\hat{B}A$ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο, άρα $A'B \perp BA$ δηλαδή $\eta \perp \varepsilon$, οπότε

$\lambda_\eta = -\frac{1}{\lambda_\varepsilon} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ και $(\eta): y - 0 = \sqrt{3}(x+1) \Leftrightarrow y = \sqrt{3}x + \sqrt{3}$.

92 Θέμα 4 – 14954

α. Για την (ε_1) είναι $B = -1 \neq 0$ και για την (ε_2) είναι $A = \mu + 1 \neq 0$ ή $B = \mu - 1 \neq 0$, οπότε $A = 0 \Leftrightarrow \mu = -1$ και $B = 0 \Leftrightarrow \mu = 1$. Έτσι, δεν υπάρχει τιμή της παραμέτρου μ η οποία να μηδενίζει ταυτόχρονα τους συντελεστές Α και Β των εξισώσεων.

Άρα παριστάνουν ευθείες για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$.

β. Το $\vec{\delta}_1 = (1, \mu)$ είναι παράλληλο στην (ε_1) και $\vec{\delta}_2 = (1-\mu, 1+\mu)$ είναι παράλληλο στην (ε_2) .

Οπότε η οξεία γωνία θ των (ε_1) και (ε_2) θα είναι ίση ή παραπληρωματική της οξείας γωνίας φ των διανυσμάτων $\vec{\delta}_1$ και $\vec{\delta}_2$. Είναι $\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{\vec{\delta}_1 \cdot \vec{\delta}_2}{|\vec{\delta}_1| \cdot |\vec{\delta}_2|}$.

Είναι
- $\vec{\delta}_1 \cdot \vec{\delta}_2 = 1\cdot(1-\mu) + \mu\cdot(1+\mu) = 1 - \mu + \mu + \mu^2 = 1 + \mu^2$.
- $|\vec{\delta}_1| = \sqrt{1+\mu^2}$
- $|\vec{\delta}_2| = \sqrt{(1-\mu)^2 + (1+\mu)^2} = \sqrt{1 - 2\mu + \mu^2 + 1 + 2\mu + \mu^2} = \sqrt{2 + 2\mu^2} =$
  $= \sqrt{2(1+\mu^2)} = \sqrt{2}\sqrt{1+\mu^2} = \sqrt{2}\cdot|\vec{\delta}_1|$

Οπότε $\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{1+\mu^2}{|\vec{\delta}_1|\cdot\sqrt{2}\cdot|\vec{\delta}_1|} = \frac{1+\mu^2}{\sqrt{2}|\vec{\delta}_1|^2} = \frac{1+\mu^2}{\sqrt{2}(1+\mu^2)} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \hat{\theta} = \hat{\varphi} = 45^\circ$.

γ. Για να βρούμε που τέμνονται οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων (ε_1) και (ε_2). Είναι (ε_1): $y=\mu x-\mu$ και η (ε_2) δίνεται

$$(\mu+1)x+(\mu-1)(\mu x-\mu)-\mu+1=0 \Leftrightarrow (\mu+1)x+\mu(\mu-1)x-\mu(\mu-1)-\mu+1=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\mu+1+\mu^2-\mu)x-\mu^2+\mu-\mu+1=0 \Leftrightarrow x=\frac{\mu^2-1}{\mu^2+1}.$$

Οπότε $y=\mu\frac{\mu^2-1}{\mu^2+1}-\mu=\frac{\mu^3-\mu-\mu^3-\mu}{\mu^2+1}=\frac{-2\mu}{\mu^2+1}$.

Άρα τα σημεία τομής των (ε_1) και (ε_2) είναι τα $M\left(\frac{\mu^2-1}{\mu^2+1},\frac{-2\mu}{\mu^2+1}\right)$ για κάθε τιμή $\mu\in\mathbb{R}$.

Ο κύκλος C έχει εξίσωση $x^2+y^2=1$. Είναι

$$\left(\frac{\mu^2-1}{\mu^2+1}\right)^2+\left(\frac{-2\mu}{\mu^2+1}\right)^2=\frac{\mu^4-2\mu^2+1+4\mu^2}{(1+\mu^2)^2}=\frac{\mu^4+2\mu^2+1}{(1+\mu^2)^2}=1$$

Άρα τα σημεία M ανήκουν στον κύκλο C.

93 Θέμα 4 – 18237

α. Είναι: $\vec{AB}=(4,0)$, $\vec{A\Gamma}=(2,2)$ και $\det(\vec{AB},\vec{A\Gamma})=\begin{vmatrix}4 & 0\\ 2 & 2\end{vmatrix}=8\neq 0$.

Άρα τα σημεία A, B, Γ δεν είναι συνευθειακά, οπότε σχηματίζουν τρίγωνο.

β. Η πλευρά $B\Gamma$ έχει μέσο το σημείο $M\left(\frac{3+1}{2},\frac{2+4}{2}\right)$ δηλαδή το $M(2,3)$ και συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{B\Gamma}=\frac{4-2}{1-3}=\frac{2}{-2}=-1$, οπότε η μεσοκάθετη (ε) της $B\Gamma$ που διέρχεται από το M έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=1$. Επομένως (ε): $y-3=x-2 \Leftrightarrow y=x+1$.

γ. Έστω $K(x,y)$ το σημείο της μεσοκάθετης που ισαπέχει από τα σημεία A, B. Είναι $y=x+1$, οπότε: $K(x,x+1)$. Έχουμε

$$(KA)=(KB) \Leftrightarrow (KA)^2=(KB)^2 \Leftrightarrow (x+1)^2+(x-1)^2=(x-3)^2+(x-1)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2+2x+1=x^2-6x+9 \Leftrightarrow 8x=8 \Leftrightarrow x=1$$

Άρα, $K(1,2)$.

δ. Είναι $(KA)=(KB)=(K\Gamma)$ οπότε το σημείο K ισαπέχει από τις κορυφές A, B, Γ του τριγώνου, άρα είναι το περίκεντρό του. Επιπλέον $\rho=(KA)=\sqrt{(-1-1)^2+(2-2)^2}=\sqrt{4}=2$.

Άρα, ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $AB\Gamma$ έχει εξίσωση $(x-1)^2+(y-2)^2=4$.

94 Θέμα 4 – 18247

α. i. Είναι $x_M=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{\alpha}{2}$, $y_M=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{\beta}{2}$, οπότε $M\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\beta}{2}\right)$.

ii. $(OM)=\sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}-0\right)^2+\left(\frac{\beta}{2}-0\right)^2}=\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\beta^2}{4}}=\sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2}{4}}=\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}$

β. i. $(AB)=\sqrt{(\alpha-0)^2+(0-\beta)^2}=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=2\cdot(OM)$ ή $(OM)=\frac{(AB)}{2}$

ii. Η πρόταση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας που έχει αποδειχθεί είναι η εξής:
Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ισούται με το μισό της υποτείνουσας.

γ. Αφού $(OM)=\frac{(AB)}{2}=(AM)=(BM)$ το σημείο Μ ισαπέχει από τις κορυφές του τριγώνου ΟΑΒ , οπότε είναι το περίκεντρό του. Η ακτίνα του κύκλου είναι $\rho=(OM)=\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}$.

Άρα ο κύκλος έχει εξίσωση $\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(x-\frac{\beta}{2}\right)^2=\frac{\alpha^2+\beta^2}{4}$.

95 Θέμα 4 – 15030

α. Ο κύκλος C έχει κέντρο το $K(2,-3)$ και ακτίνα $\rho=\sqrt{5}$.

β. Είναι $d(K,\varepsilon)=\frac{|2\cdot 2+1\cdot(-3)+5|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|6|}{\sqrt{5}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}>\sqrt{5}=\rho$, οπότε ο κύκλος C και η ευθεία (ε) δεν έχουν κοινά σημεία.

γ. Είναι $\lambda_\varepsilon=-2$.
Κάθε ευθεία (η) παράλληλη στην (ε) έχει τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης με την ευθεία (ε) , δηλαδή $\lambda_\eta=-2$.
Οπότε (η): $y=-2x+\beta \Leftrightarrow 2x+y-\beta=0$.

Πρέπει $d(K,\eta)=\rho \Leftrightarrow \frac{|2\cdot 2+1\cdot(-3)-\beta|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{|1-\beta|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5} \Leftrightarrow |1-\beta|=5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1-\beta=5$ ή $1-\beta=-5 \Leftrightarrow \beta=-4$ ή $\beta=6$

Άρα έχουμε δύο εφαπτόμενες τις $\eta_1:\ 2x+y+4=0$ και $\eta_2:\ 2x+y-6=0$.

δ. Είναι $d(K,\eta_1)=d(K,\eta_2)=\rho$ δηλαδή το $K(2,-3)$ ισαπέχει από τις ευθείες (η_1) , (η_2) οπότε ανήκει στη μεσοπαράλληλή τους. Η ζητούμενη μεσοπαράλληλη ως παράλληλη στις (η_1) , (η_2) θα έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=-2$.
Άρα η μεσοπαράλληλη είναι η $y+3=-2(x-2) \Leftrightarrow y=-2x+1$.

96 Θέμα 4 – 15646

α. Ο κύκλος C_1 έχει κέντρο $K(1,1)$ και ακτίνα $\rho=3$ ενώ ο κύκλος C_2 έχει κέντρο $\Lambda(4,4)$ και ακτίνα $\rho=3$. Είναι $x_K=y_K$ και $x_\Lambda=y_\Lambda$, οπότε τα Κ, Λ βρίσκονται στην ευθεία με εξίσωση $y=x$, που είναι διχοτόμος της γωνίας $x\hat{O}y$.

β. Για να βρούμε τα σημεία τομής των κύκλων C_1 και C_2 θα λύσουμε το σύστημα των εξισώσεών τους.
Αφαιρώντας κατά μέλη έχουμε:

$(x-1)^2+(y-1)^2-(x-4)^2-(y-4)^2=0 \Leftrightarrow (x-1)^2-(x-4)^2=(y-4)^2-(y-1)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3(2x-5)=-3(2y-5) \Leftrightarrow 2x-5=5-2y \Leftrightarrow y=5-x$.

Αντικαθιστώντας την τιμή του y στην $(x-1)^2+(y-1)^2=9$,

προκύπτει $(x-1)^2+(4-x)^2=9 \Leftrightarrow 2x^2-10x+8=0 \leftrightarrow x^2-5x+4=0 \Leftrightarrow (x-1)(x-4)=0 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=4$

αντίστοιχες τιμές $y=4$ ή $y=1$. Άρα τα σημεία τομής των κύκλων C_1 και C_2 είναι $B(1,4)$ και $\Gamma(4,1)$.

γ. Έστω $A(x,y)$ που ανήκει στην ευθεία $y=x$. Οπότε έχουμε $A(x,x)$.

Είναι:
- $\vec{AB}=(1-x,4-x)$ και $\vec{A\Gamma}=(4-x,1-x)$
- $(AB\Gamma)=\frac{1}{2}|\det(\vec{AB},\vec{A\Gamma})|=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}1-x & 4-x\\ 4-x & 1-x\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}|(1-x)^2-(4-x)^2|=\frac{1}{2}|6x-15|$

Οπότε $(AB\Gamma)=\frac{21}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}|6x-15|=\frac{21}{2} \Leftrightarrow |6x-15|=21 \Leftrightarrow \begin{cases}6x-15=21\\ 6x-15=-21\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=6\\ x=-1\end{cases}$

Άρα τα σημεία είναι $A(6,6)$ και $A'(-1,-1)$.

97 Θέμα 4 – 15082

α. Ο κύκλος C_1 έχει κέντρο $K(2,3)$ και ακτίνα $\rho_1 = 2\sqrt{2}$, ενώ ο κύκλος C_2 κέντρο $\Lambda(7,-2)$ και ακτίνα $\rho_2 = 3\sqrt{2}$. Οπότε έχουμε $(K\Lambda) = \sqrt{(7-2)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{5^5 + 5^2} = 5\sqrt{2}$.

Ακόμα $\rho_1 + \rho_2 = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$, δηλαδή $(K\Lambda) = \rho_1 + \rho_2$.

Άρα οι κύκλοι C_1, C_2 εφάπτονται εξωτερικά.

β. i. Έχουμε $y-3 = \dfrac{-2-3}{7-2}(x-2) \Leftrightarrow y-3 = -1(x-2) \Leftrightarrow y = -x+5$.

ii. Θα βρούμε τα σημεία τομής της ευθείας $K\Lambda$ με τον κύκλο C_1. Έχουμε

$$\begin{cases}(x-2)^2+(y-3)^2=8\\ y=-x+5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-2)^2+(-x+2)^2=8\\ y=-x+5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-2)^2=4\\ y=-x+5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-2=\pm 2\\ y=-x+5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=4 \text{ ή } x=0\\ y=1 \text{ ή } y=5\end{cases}.$$

Οπότε τα κοινά σημεία της ευθείας $K\Lambda$ με τον κύκλο C_1 είναι τα $A(4,1)$ και $A'(0,5)$.

Είναι $(\Lambda A) = \sqrt{(7-4)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} = \rho_2$.

Άρα το κοινό σημείο της ευθείας και με τους δύο κύκλους είναι το $A(4,1)$, οπότε είναι το σημείο επαφής.

γ. Η κοινή εσωτερική εφαπτομένη (η) των δύο κύκλων είναι κάθετη στην ευθεία $K\Lambda$ και διέρχεται από το σημείο επαφής $A(4,1)$.

Στο ερώτημα **β.i.** έχουμε $\lambda_{K\Lambda} = -1$, οπότε $\lambda_\eta \cdot \lambda_{K\Lambda} = -1 \Leftrightarrow \lambda_\eta \cdot (-1) = -1 \Leftrightarrow \lambda_\eta = 1$, και η κοινή εσωτερική εφαπτομένη των δύο κύκλων έχει εξίσωση:

$(\eta): y-1 = 1(x-4) \Leftrightarrow y = x-3$.

98 Θέμα 4 - 20091

α. i. Το μέσο M του τμήματος AB είναι $M\left(\dfrac{-7+3}{2}, \dfrac{-1-5}{2}\right)$ ή $M(-2, -3)$.

ii. Είναι $\lambda_{AB} = \dfrac{-5+1}{3+7} = -\dfrac{2}{5}$ και $KM \perp AB \Leftrightarrow \lambda_{KM} \cdot \lambda_{AB} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{KM} = \dfrac{5}{2}$.

Άρα $(KM): y - y_M = \dfrac{5}{2}(x - x_M) \Leftrightarrow y+3 = \dfrac{5}{2}(x+2) \Leftrightarrow 2y+6 = 5x+10 \Leftrightarrow 5x-2y+4=0$.

β. i. Το κέντρο K του κύκλου ανήκει στην ευθεία δ και στην ευθεία KM. Άρα οι συντεταγμένες του K είναι η λύση του συστήματος.

$$\begin{cases}5x-2y=-4\\ x+y=-12\end{cases}\begin{vmatrix}\\ \cdot 2\end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}5x-2y=-4\\ 2x+2y=-24\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}7x=-28\\ x+y=-12\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-4\\ y=-8\end{cases}$$

Άρα $K(-4, -8)$.

ii. Είναι $\rho = (KA) = \sqrt{(-4+7)^2 + (-8+1)^2} = \sqrt{9+49} = \sqrt{58}$.

Άρα: $C: (x+4)^2 + (y+8)^2 = 58$.

99 Θέμα 4 - 15189

α. Είναι:

- $K\left(\dfrac{-2+2}{2}, \dfrac{0-2}{2}\right)$ δηλαδή $K(0, -1)$.
- $|\vec{AB}| = \sqrt{(2-(-2))^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

β. Ο κύκλος C με διάμετρο AB έχει κέντρο το μέσο της $K(0,-1)$ και ακτίνα $\rho = \dfrac{|\vec{AB}|}{2} = \sqrt{5}$.

Άρα $C: x^2 + (y+1)^2 = 5$.

γ. Έστω $M(x\,,\,y)$. Είναι $\vec{AM}=(x+2\,,\,y)$ και $\vec{AB}=(4\,,\,-2)$.

Έχουμε: $(ABM)=5 \Leftrightarrow \frac{1}{2}|(\det\vec{AB}\,,\,\vec{AM})|=5 \Leftrightarrow \left|\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ x+2 & y \end{vmatrix}\right|=10 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow |4y+2(x+2)|=10 \begin{cases} 4y+2x+4=10 \\ \text{ή} \\ 4y+2x+4=-10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+4y-6=0 \\ \text{ή} \\ 2x+4y+14=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-3=0 \\ \text{ή} \\ x+2y+7=0 \end{cases}$$

Άρα τα σημεία $M(x\,,\,y)$ ανήκουν στις ευθείες $\varepsilon_1: x+2y-3=0$ και $\varepsilon_2: x+2y+7=0$.

δ. Είναι:
- $d(K\,,\,\varepsilon_1)=\dfrac{|0+2(-1)-3|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}=\rho$
- $d(K\,,\,\varepsilon_2)=\dfrac{|0+2(-1)+7|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}=\rho$

Άρα οι ευθείες ε_1, ε_2 εφάπτονται του κύκλου C.

100 Θέμα 4 – 18415

α. Η (1) παριστάνει για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ κύκλο με κέντρο $K(3\lambda,-2\lambda)$ που ανήκει στην ευθεία ε: $2x+3y=0$, αφού $2\cdot3\lambda+3(-2\lambda)=6\lambda-6\lambda=0$.

β. Αν $M(x,y)\in\varepsilon_1$ ή ε_2, τότε $d(M,\varepsilon)=1 \Leftrightarrow \dfrac{|2x+3y|}{\sqrt{2^2+3^2}}=1 \Leftrightarrow |2x+3y|=\sqrt{13} \Leftrightarrow 2x+3y-\sqrt{13}=0$ ή $2x+3y+\sqrt{13}=0$ που είναι οι εξισώσεις των ευθειών ε_1, ε_2.

γ. Αφού τα κέντρα $K(3\lambda,-2\lambda)$ όλων των κύκλων που προκύπτουν από την (1), ανήκουν στην $\varepsilon: 2x+3y=0$, δηλαδή στη μεσοπαράλληλη των ε_1, ε_2, έχουμε ότι $d(K,\varepsilon_1)=d(K,\varepsilon_2)=1=\rho$. Οπότε όλοι οι κύκλοι που προκύπτουν από την (1) εφάπτονται στις ευθείες ε_1, ε_2.

δ. Το τετράγωνο του οποίου οι δύο απέναντι πλευρές ανήκουν στις ευθείες ε_1, ε_2, θα έχει μήκος πλευράς ίσο με την απόσταση των ε_1, ε_2, δηλαδή 2. Συνεπώς το εμβαδόν του θα είναι ίσο με 4.

101 Θέμα 4 – 15993

α. Η (1) γράφεται $(x-2)^2+(y-\lambda)^2=(\sqrt{\lambda^2+1})^2$, επομένως παριστάνει κύκλο με κέντρο το $K(2,\lambda)$ και ακτίνα $\rho=\sqrt{\lambda^2+1}$, διότι $\lambda^2+1>0$ για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

β. Η εξίσωση (1) γίνεται $x^2-4x+4+y^2-2\lambda y+\lambda^2=\lambda^2+1 \Leftrightarrow 2\lambda y=(x-2)^2+y^2-1$.

Πρέπει $\begin{cases} 2y=0 \\ (x-2)^2+y^2-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ (x-2)^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=3 \end{cases}$ ή $\begin{cases} y=0 \\ x=1 \end{cases}$.

Επομένως όλοι οι κύκλοι έχουν δύο κοινά σημεία, τα $A(1,0)$ και $B(3,0)$.

γ. Η κοινή χορδή των κύκλων (1) είναι το ευθύγραμμο τμήμα AB επειδή $y_A=y_B=0$ έχει εξίσωση $y=0$. Τα κέντρα όλων των κύκλων είναι της μορφής $K(2,\lambda)$ με $\lambda\in\mathbb{R}$. Άρα, η ευθεία που διέρχεται από τα κέντρα όλων των κύκλων, είναι η κατακόρυφη ευθεία με εξίσωση $x=2$.
Επομένως είναι κάθετη στην κοινή χορδή.

δ. Αφού το σημείο $M(\alpha,\beta)$ επαληθεύει την (1) για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$, πρέπει υποχρεωτικά να είναι ή το $A(1,0)$ ή το $B(3,0)$, οπότε $\beta=0$, άρα $\alpha\cdot\beta=\alpha\cdot0=0$.

102 Θέμα 4 – 15791

α. Ο κύκλος C_1 έχει κέντρο $A(0,7)$ και ακτίνα $\rho=2$, οπότε έχει εξίσωση
$(x-0)^2+(y-7)^2=2^2 \Leftrightarrow x^2+(y-7)^2=4$

β. i. $(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=4$

ii. $(AB)=\sqrt{(0-x_1)^2+(7-y_1)^2} \Leftrightarrow (AB)=\sqrt{x_1^2+(7-y_1)^2}$

γ. Δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά αν και μόνο αν η διάκεντρος είναι ίση με το άθροισμα των ακτίνων τους. Οπότε έχουμε:

$$(AB)=2+2 \Leftrightarrow \sqrt{(x_1-0)^2+(y_1-7)^2}=4 \Leftrightarrow x_1^2+(y_1-7)^2=16 \;,\quad (1)$$

Ένας κύκλος εφάπτεται σε ευθεία αν και μόνο αν το κέντρο του κύκλου απέχει από την ευθεία απόσταση ίση με την ακτίνα του. Οπότε έχουμε:

$$d(A,\,B)=2 \Leftrightarrow \frac{|0+x_1-5|}{\sqrt{0^2+1^2}}=2 \Leftrightarrow |x_1-5|=2 \;,\quad (2)\,.$$

Για να βρούμε τους κύκλους που εφάπτονται στον κύκλο C_1 και στην ευθεία (ε) επιλύουμε το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2):

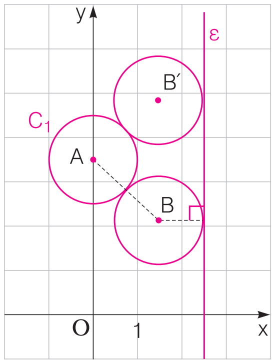
$$\begin{cases} x_1^2+(y_1-7)^2=16 \\ |x_1-5|=2 \end{cases}$$

Προκύπτουν τα παρακάτω συστήματα:

- $\begin{cases} x_1^2+(y_1-7)^2=16 \\ x_1-5=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7^2+(y_1-7)^2=16 \\ x_1=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y_1-7)^2=-33 \\ x_1=7 \end{cases}$, αδύνατο .

- $\begin{cases} x_1^2+(y_1-7)^2=16 \\ x_1-5=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^2+(y_1-7)^2=16 \\ x_1=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y_1-7)^2=7 \\ x_1=3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1=7-\sqrt{7} \;\text{ ή }\; y_2=7+\sqrt{7} \\ x_1=3 \end{cases}$$



Άρα οι κύκλοι που εφάπτονται εξωτερικά στον κύκλο C_1 και στην ευθεία (ε) έχουν κέντρα τα σημεία $B(3,\,7-\sqrt{7})$ και $B'(3,\,7+\sqrt{7})$ και ακτίνα $\rho=2$.

103 Θέμα 4 – 15272

α. Η εξίσωση γράφεται

$$x^2-2x+1+y^2+4y+4=4 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2=4$$

οπότε παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(1,\,-2)$ και ακτίνα $\rho=2$.

β. Είναι: $(KM)=\sqrt{(3-1)^2+(2+2)^2}=\sqrt{20}>\rho=2$.

Οπότε το $M(3,\,2)$ βρίσκεται έξω από τον κύκλο.

γ. Όλες οι ευθείες που διέρχονται από το $M(3,\,2)$ είναι:

- Η κατακόρυφη ευθεία $x=3 \Leftrightarrow x-3=0$. Η ευθεία αυτή απέχει από το κέντρο $K(1,\,-2)$ του κύκλου απόσταση $d=\dfrac{|1-3|}{\sqrt{1^2+0^2}}=2=\rho$. Άρα η κατακόρυφη ευθεία $x=3$ είναι εφαπτομένη του κύκλου.

- Οι ευθείες με κλίση λ , δηλαδή: $y-2=\lambda(x-3) \Leftrightarrow \lambda x-y-3\lambda+2=0$. Μια τέτοια ευθεία εφάπτεται στον κύκλο, μόνο όταν η απόσταση d του κέντρου K από αυτή είναι ίση με την ακτίνα ρ του κύκλου. Είναι:

$$d=2 \Leftrightarrow \frac{|\lambda+2-3\lambda+2|}{\sqrt{\lambda^2+(-1)^2}}=2 \Leftrightarrow \frac{|\lambda-2|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=1 \Leftrightarrow \lambda^2-4\lambda+4=\lambda^2+1 \Leftrightarrow \lambda=\frac{3}{4}$$

Οπότε η άλλη εφαπτομένη του κύκλου που διέρχεται από το M είναι η

$$y-2=\frac{3}{4}(x-3) \Leftrightarrow y=\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}$$

Άρα οι εφαπτόμενες του κύκλου είναι οι ευθείες $x=3$ και $y=\dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{4}$.

104 Θέμα 4 – 15080

α. Για την εξίσωση (1) έχουμε:

$$A^2 + B^2 - 4\Gamma = 4 - 4(-8) = 36 > 0 \quad , \quad -\frac{A}{2} = 1 \quad , \quad -\frac{B}{2} = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} = 3$$

δηλαδή παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(1, 0)$ και ακτίνα $\rho_1 = 3$.

Όμοια για την (2) βρίσκουμε ότι παριστάνει κύκλο με κέντρο $\Lambda(3, 0)$ και ακτίνα $\rho_2 = 1$.

β. i. $(K\Lambda) = \sqrt{(3-1)^2 + 0^2} = 2$

ii. Είναι $\rho_1 - \rho_2 = 3 - 1 = 2$ και από το **β.i.** έχουμε $(K\Lambda) = 2 = \rho_1 - \rho_2$, οπότε ο κύκλος C_2 εφάπτεται εσωτερικά του κύκλου C_1 .

γ. Κάθε ακτίνα του κύκλου C_1 διέρχεται από το σημείο $K(1, 0)$.

Από το $K(1, 0)$ έχουμε τις ευθείες (η): $x = 1 \Leftrightarrow x - 1 = 0$ (κατακόρυφη)

(ε): $y - 0 = \lambda(x-1) \Leftrightarrow y - \lambda x + \lambda = 0$, που έχουν κλίση $\lambda \in \mathbb{R}$.

Είναι $d(\Lambda, \eta) = \dfrac{|3-1|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = 2 \neq \rho_2 = 1$, οπότε η ευθεία (η) δεν εφάπτεται του C_2 .

Η (ε) θα εφάπτεται στον C_2 αν και μόνο αν $d(\Lambda, \varepsilon) = \rho_2$. Έχουμε:

$$d(\Lambda, \varepsilon) = \rho_2 \Leftrightarrow \frac{|0 - 3\lambda + \lambda|}{\sqrt{1+\lambda^2}} = 1 \Leftrightarrow |2\lambda| = \sqrt{1+\lambda^2} \Leftrightarrow 3\lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Άρα οι ζητούμενες ακτίνες έχουν εξισώσεις:

(ε_1): $3y - \sqrt{3}x + \sqrt{3} = 0$, όταν $\lambda = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

(ε_2): $3y + \sqrt{3}x - \sqrt{3} = 0$, όταν $\lambda = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

105 Θέμα 4 – 15081

α. Ο κύκλος C_1 έχει κέντρο $K\left(-\dfrac{A}{2}, -\dfrac{B}{2}\right)$, δηλαδή $K(-\sqrt{2}, 0)$ και ακτίνα: $\rho_1 = \dfrac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} = 1$ και ο κύκλος C_2 έχει κέντρο $\Lambda\left(-\dfrac{A}{2}, -\dfrac{B}{2}\right)$, δηλαδή $\Lambda(3\sqrt{2}, 0)$ και ακτίνα: $\rho_2 = \dfrac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} = 3$.

β. i. Οι ευθείες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων $O(0, 0)$ είναι:

(ε): $x = 0$ (κατακόρυφη)

(η): $y = \lambda x \Leftrightarrow \lambda x - y = 0$, που έχουν κλίση $\lambda \in \mathbb{R}$.

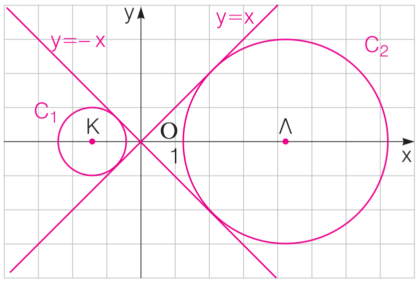
Είναι $d(K, \varepsilon) = \dfrac{|-\sqrt{2}|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = \sqrt{2} \neq \rho_1 = 1$ και $d(\Lambda, \varepsilon) = \dfrac{|3\sqrt{2}|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = 3\sqrt{2} \neq \rho_2 = 3$.

Οπότε η (ε) δεν εφάπτεται των C_1 , C_2 .

Η ευθεία (η) εφάπτεται και στους δύο κύκλους.

$$\begin{cases} d(K, \eta) = \rho_1 \\ d(\Lambda, \eta) = \rho_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{|0 - \sqrt{2}\lambda|}{\sqrt{1+\lambda^2}} = 1 \\ \dfrac{|0 + 3\sqrt{2}\lambda|}{\sqrt{1+\lambda^2}} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |\sqrt{2}\lambda| = \sqrt{1+\lambda^2} \\ |3\sqrt{2}\lambda| = 3\sqrt{1+\lambda^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda^2 = 1 + \lambda^2 \\ 18\lambda^2 = 9 + 9\lambda^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \pm 1 \\ \lambda = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = \pm 1$$

Άρα, από την αρχή των αξόνων διέρχονται δυο κοινές εφαπτόμενες των κύκλων C_1 , C_2 με εξισώσεις:
$(\eta_1): y=-x$ και $(\eta_2): y=x$



ii. Η αρχή των αξόνων $O(0,0)$ είναι εσωτερικό σημείο της διακέντρου $K\Lambda$, διότι η $K\Lambda$ είναι πάνω στον άξονα $x'x$ και έχει άκρα τα σημεία $K(-\sqrt{2}, 0)$ και $\Lambda(3\sqrt{2}, 0)$. Επομένως οι εφαπτόμενες που βρήκαμε στο **β.i.** ερώτημα είναι εσωτερικές, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

106 Θέμα 4 - 18416

α. Η εξίσωση (1) γράφεται: $x^2-4x+y^2-2y=2x+2y-8 \Leftrightarrow x^2-6x+y^2-4y=-8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-2\cdot 3\cdot x+3^2+y^2-2\cdot 2\cdot y+2^2=3^2+2^2-8 \Leftrightarrow (x-3)^2+(y-2)^2=5$

Άρα η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(3, 2)$ και ακτίνα $\rho=\sqrt{5}$.

β. i. • Η (1) για $x=4$ και $y=4$ γίνεται $0+4\cdot 2=2\cdot 4$, που ισχύει.

• Η (1) για $x=2$ και $y=0$ γίνεται $2(-2)+0=2\cdot(-2)$, που ισχύει.

Οπότε τα σημεία Α και Β είναι πάνω στον κύκλο.
Για να είναι αντιδιαμετρικά αρκεί το κέντρο Κ να είναι το μέσο του τμήματος ΑΒ.

Είναι: • $\dfrac{x_A+x_B}{2}=\dfrac{4+2}{2}=3=x_K$

• $\dfrac{y_A+y_B}{2}=\dfrac{4+0}{2}=2=y_K$

ii. Η κλίση της διαμέτρου ΑΒ είναι $\lambda=\dfrac{0-4}{2-4}=2$

Άρα και οι ζητούμενες εφαπτόμενες έχουν κλίση 2.
Οι ευθείες με κλίση 2 είναι $\varepsilon: y=2x+\beta \Leftrightarrow 2x-y+\beta=0$.
Η ε είναι εφαπτομένη του κύκλου όταν:

$$d(K, \varepsilon)=\rho \Leftrightarrow \frac{|2\cdot 3-2+\beta|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5} \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow |\beta+4|=5 \Leftrightarrow \beta+4=5 \text{ ή } \beta+4=-5 \Leftrightarrow \beta=1 \text{ ή } \beta=-9.$$

Άρα οι εφαπτόμενες του κύκλου οι οποίες είναι παράλληλες στην διάμετρο ΑΒ έχουν εξισώσεις $\varepsilon_1: y=2x+1$ και $\varepsilon_2: y=2x-9$.

γ. Ισχύει $(\Gamma\Delta)=\sqrt{20}=2\sqrt{5}=2\rho$. Οπότε τα σημεία Γ και Δ είναι αντιδιαμετρικά, άρα η ευθεία (η) πρέπει να διέρχεται από το κέντρο Κ του κύκλου.

Επομένως $2=3\lambda+4 \Rightarrow \lambda=-\dfrac{2}{3}$.

107 Θέμα 4 – 15432

α. Είναι $A^2+B^2-4\Gamma=16\kappa^2+4\kappa^2-16=20\kappa^2-16$

Πρέπει $20\kappa^2-16>0 \Leftrightarrow \kappa^2>\dfrac{4}{5} \Leftrightarrow |\kappa|>\dfrac{2\sqrt{5}}{5} \Leftrightarrow \kappa<-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ ή $\kappa>\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

β. Για κάθε $\kappa\in\left(-\infty, -\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)\cup\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5}, +\infty\right)$ έχουμε από έναν κύκλο με κέντρο $K\left(-\dfrac{A}{2}, -\dfrac{B}{2}\right)$, δηλαδή με $K(2\kappa, \kappa)$ και ακτίνα $\rho=\dfrac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}=\dfrac{\sqrt{20\kappa^2-16}}{2}$

γ. Έστω $K(x, y)$. Είναι $\begin{cases} x=2\kappa \\ y=\kappa \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y \\ y=\kappa \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=0 \\ y=\kappa \end{cases}$.

Άρα τα κέντρα ανήκουν στην ευθεία $x-2y=0$.

δ. Για $\kappa=1$ η εξίσωση (1) γίνεται $x^2+y^2-4x-2y+4=0$, επομένως είναι $A=-4$, $B=-2$ και $\Gamma=4$, οπότε το κέντρο είναι $K(2,1)$ και η ακτίνα $\rho=\dfrac{\sqrt{20\cdot 1^2-16}}{2}=1$

Είναι $(K\Gamma)=|y_\Gamma-y_K|=|2-1|=1=\rho$, οπότε το $\Gamma(2,2)$ είναι σημείο του κύκλου. Επειδή $x_K=x_\Gamma=2$ η ΚΓ είναι κάθετη στον άξονα $x'x$, οπότε επειδή η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο του Γ είναι κάθετη στην ΚΓ θα είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.
Άρα έχει εξίσωση $y=y_\Gamma \Leftrightarrow y=2$.

108 Θέμα 4 – 15628

α. Είναι $A^2+B^2-4\Gamma=(4-2k)^2+[-2(1+k)]^2-4\cdot(5-2k)=$

$=16-16k+4k^2+4+8k+4k^2-20+8k=8k^2>0$ για κάθε $k>0$.

Άρα η (1) παριστάνει κύκλο με ακτίνα $\rho=\dfrac{\sqrt{8k^2}}{2}=\dfrac{2\sqrt{2}k}{2}=k\sqrt{2}$ και κέντρο $M\left(-\dfrac{A}{2},-\dfrac{B}{2}\right)$ ή

$M\left(-\dfrac{4-2k}{2},-\dfrac{-2(1+k)}{2}\right)$ ή $M(k-2,k+1)$.

β. Έστω $M(x,y)$. Είναι $\begin{cases}x=k-2\\y=k+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=x+2\\y=x+3\end{cases}$.

Άρα τα σημεία Μ ανήκουν στην ευθεία $y=x+3$, για κάθε $k>0$.

109 Θέμα 4 - 21154

α. Έχουμε $A=-4\alpha$, $B=-4\alpha$ και $\Gamma=0$.

Είναι $A^2+B^2-4A\Gamma=16\alpha^2+16\alpha^2=32\alpha^2$.

Πρέπει $32\alpha^2>0\Leftrightarrow\alpha^2>0\Leftrightarrow\alpha\neq0$.

β. • Το κέντρο των κύκλων είναι $K\left(-\dfrac{A}{2},-\dfrac{B}{2}\right)$ ή $K(2\alpha,2\alpha)$, $\alpha\neq0$.

• Η ακτίνα των κύκλων είναι $R=\dfrac{\sqrt{A^2+B^2-4A\Gamma}}{2}=\dfrac{\sqrt{32\alpha^2}}{2}=\dfrac{4\sqrt{2}|\alpha|}{2}=2\sqrt{2}|\alpha|$, $\alpha\neq0$.

γ. Έχουμε $K(2\alpha,2\alpha)$, $\alpha\neq0$. Έστω $K(x,y)$. Είναι $\begin{cases}x=2\alpha\\y=2\alpha\end{cases},\alpha\neq0\Leftrightarrow\begin{cases}y=x\\x\neq0\end{cases}$.

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων είναι η ευθεία $y=x$ με εξαίρεση το σημείο $O(0,0)$, αφού για $x\neq0$ είναι $y\neq0$.

δ. Για να εφάπτεται κάποιος από τους κύκλους που ορίζονται από την εξίσωση (1) στον άξονα $x'x$, θα πρέπει να ισχύει: $d(K,x'x)=R\Leftrightarrow|y_K|=R\Leftrightarrow|2\alpha|=2\sqrt{2}|\alpha|\Leftrightarrow|\alpha|=\sqrt{2}|\alpha|\Leftrightarrow|\alpha|(1-\sqrt{2})=0\Leftrightarrow|\alpha|=0\Leftrightarrow\alpha=0$.

Όμως, $\alpha\neq0$, οπότε δεν υπάρχει τιμή του α ώστε ο αντίστοιχος κύκλος που ορίζεται από την εξίσωση (1) να εφάπτεται στον άξονα $x'x$.

110 Θέμα 4 – 20229

α. Έχουμε την εξίσωση $x^2+y^2-(\lambda+8)x+\lambda y+7=0$ (1), με $\lambda\in\mathbb{R}$, για την οποία: $A=-(\lambda+8)$, $B=\lambda$ και $\Gamma=7$, οπότε $A^2+B^2-4\Gamma=[-(\lambda+8)]^2+\lambda^2-4\cdot7=(\lambda+8)^2+\lambda^2-28=$

$=\lambda^2+16\lambda+64+\lambda^2-28=2\lambda^2+16\lambda+36=2(\lambda^2+8\lambda+18)>0$, για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$, εφόσον η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta=-8<0$.
Άρα η εξίσωση (1), παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

Επίσης το κέντρο των κύκλων που ορίζονται από την (1) έχει συντεταγμένες $\left(-\dfrac{A}{2},-\dfrac{B}{2}\right)$ ή $\left(-\dfrac{-(\lambda+8)}{2},-\dfrac{\lambda}{2}\right)$

ή $\left(\dfrac{(\lambda+8)}{2},-\dfrac{\lambda}{2}\right)$, $\lambda\in\mathbb{R}$ και ακτίνα $\rho=\dfrac{1}{2}\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}=\dfrac{1}{2}\sqrt{2(\lambda^2+8\lambda+18)}$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

β. Λόγω του ερωτήματος **α.**, τα κέντρα των κύκλων που εκφράζει η εξίσωση (1) είναι τα $K\left(\frac{\lambda+8}{2}, -\frac{\lambda}{2}\right)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Αν $K(x, y)$, τότε: $\begin{cases} x = \frac{\lambda+8}{2} \\ y = -\frac{\lambda}{2} \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-2y+8}{2} \\ \lambda = -2y \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-4=0 \\ \lambda = -2y \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$.

Άρα τα κέντρα των κύκλων της εξίσωσης (1), κινούνται στην ευθεία ε: $x+y-4=0$.

γ. Η εξίσωση (1) για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ γράφεται:

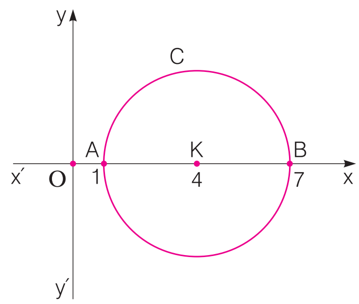
$x^2+y^2-\lambda x-8x+\lambda y+7=0 \Leftrightarrow (x^2+y^2-8x+7)+\lambda(y-x)=0$, οπότε:

$\begin{cases} y-x=0 \\ x^2+y^2-8x+7=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2-\frac{\sqrt{2}}{2} = y$ ή $x = 2+\frac{\sqrt{2}}{2} = y$

Επομένως για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, όλοι οι κύκλοι (1), διέρχονται από τα σταθερά σημεία

$M\left(2-\frac{\sqrt{2}}{2}, 2-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ και $N\left(2+\frac{\sqrt{2}}{2}, 2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

δ. Λόγω του ερωτήματος **α.**, για $\lambda = 0$ η εξίσωση (1), εκφράζει κύκλο με κέντρο το $K(4, 0)$ και ακτίνα $\rho = 3$. Ο κύκλος αυτός φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Τα σημεία του κύκλου που απέχουν την ελάχιστη και μέγιστη απόσταση από την αρχή των αξόνων βρίσκονται πάνω στην ΟΚ. Οπότε το σημείο του που απέχει τη μικρότερη απόσταση από το $O(0, 0)$, είναι το $A(1, 0)$ και το σημείο του που απέχει τη μεγαλύτερη απόσταση είναι το $B(7, 0)$.



111 Θέμα 4 – 15826

α. Είναι $A^2+B^2-4\Gamma = [-2(\lambda+1)]^2+(-2\lambda)^2-4(2\lambda+1) = 4\lambda^2+8\lambda+4+4\lambda^2-8\lambda-4 = 8\lambda^2$

Πρέπει $8\lambda^2 > 0 \Leftrightarrow \lambda^2 > 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 0$.

Το κέντρο είναι το $K\left(-\frac{A}{2}, \frac{B}{2}\right)$ ή $K(\lambda+1, \lambda)$ και η ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2} = \frac{\sqrt{8\lambda^2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}|\lambda|}{2} = \sqrt{2}|\lambda|$

β. Για $\lambda = 0$ η (1) γίνεται $x^2+y^2-2x+1=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$ που σημαίνει ότι παριστάνει το σημείο $M(1, 0)$.

γ. i. Η ευθεία που διέρχεται από τα κέντρα K_1 , K_2 έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \frac{y_{K_1}-y_{K_2}}{x_{K_1}-x_{K_2}} = \frac{2-1}{3-2} = 1$

και εξίσωση $\zeta: y-1 = 1(x-2) \Leftrightarrow y = x-1$.

Οι συντεταγμένες του $K(\lambda+1, \lambda)$ επαληθεύουν την εξίσωση $y = x-1$, αφού $\lambda = \lambda+1-1$, για κάθε $\lambda \neq 0$.

Άρα τα κέντρα όλων των κύκλων που προκύπτουν από την (1) βρίσκονται πάνω στην ευθεία ζ.

ii. Οι κύκλοι του σχήματος διέρχονται από το σημείο $M(1, 0)$. Θα αποδείξουμε ότι όλοι οι κύκλοι που προκύπτουν από την (1) διέρχονται από το $M(1, 0)$. Πράγματι οι συντεταγμένες του Μ επαληθεύουν την (1) για κάθε $\lambda \neq 0$, αφού $1^2+0^2-2(\lambda+1)\cdot 1-2\lambda\cdot 0+2\cdot\lambda+1=0 \Leftrightarrow 0=0$, που ισχύει.

iii. Είναι $d(K, \varepsilon) = \frac{|\lambda+1+\lambda-1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{2|\lambda|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}|\lambda| = \rho$, οπότε η ε είναι κοινή εφαπτομένη όλων των κύκλων που προκύπτουν από την (1).

112 Θέμα 4 - 21276

α. • Έχουμε $A(\lambda-1\,,\,2\lambda+1)$, $\lambda\in\mathbb{R}$. Έστω αν $A(x\,,\,y)$. Έχουμε

$$\begin{cases}x=\lambda-1\\ y=2\lambda+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda=x+1\\ y=2(x+1)+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2x+3\\ \lambda=x+1\end{cases}$$, οπότε $\gamma_1: 2x-y+3=0$

• Ο συντελεστής διεύθυνσης του διανύσματος $\vec{u}=(-1\,,\,3)$ είναι

$\lambda=\dfrac{y}{x}=\dfrac{3}{-1}=-3$, οπότε η ευθεία γ_2 έχει κλίση $\lambda=-3$.

Είναι $\gamma_2: y-y_\Sigma=\lambda(x-x_\Sigma)\Leftrightarrow y-2=-3(x+4)\Leftrightarrow y-2=-3x-12\Leftrightarrow 3x+y+10=0$.

β. Είναι: • $d(K\,,\,\gamma_1)=\dfrac{|2\cdot1-1\cdot1+3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{|4|}{\sqrt5}=\dfrac{4}{\sqrt5}=\dfrac{4\sqrt5}{5}$ και

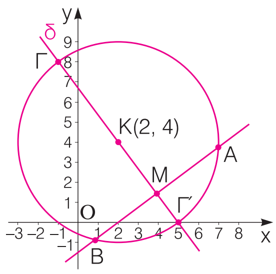
• $d(K\,,\,\gamma_2)=\dfrac{|3\cdot1+1\cdot1+10|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\dfrac{|14|}{\sqrt{10}}=\dfrac{14}{\sqrt{10}}=\dfrac{14\sqrt{10}}{10}=\dfrac{7\sqrt{10}}{5}$.

Αφού $\dfrac{4\sqrt5}{5}<\dfrac{7\sqrt{10}}{5}\Leftrightarrow d(K\,,\,\gamma_1)<d(K\,,\,\gamma_2)$, πιο συμφέρουσα είναι η σύνδεση του σταδίου με τη γραμμή γ_1.

γ. Το κέντρο του κύκλου C που ορίζει το πάρκο γύρω από το στάδιο, είναι το σημείο $K(1\,,\,1)$. Αφού ο κύκλος εφάπτεται στη γραμμή γ_1 , η ακτίνα του είναι $\rho=d(K\,,\,\gamma_1)=\dfrac{4}{\sqrt5}$.

Άρα $C:(x-1)^2+(y-1)^2=\left(\dfrac{4}{\sqrt5}\right)^2\Leftrightarrow(x-1)^2+(y-1)^2=\dfrac{16}{5}$.

113 Θέμα 4 – 18570



α. $x^2+y^2-4x-8y-5=0\Leftrightarrow x^2-4x+4-4+y^2-8y+16-16-5=0$

$\Leftrightarrow(x-2)^2+(y-4)^2=25$

Άρα το κέντρο του κύκλου είναι το σημείο $K(2,4)$ και η ακτίνα του είναι $\rho=5$.

β. i. Η ευθεία τέμνει τον κύκλο σε δύο σημεία αν και μόνο αν η

$d(K,\varepsilon)<\rho\Leftrightarrow\dfrac{|3\cdot2-4\cdot4-\mu|}{\sqrt{3^2+4^2}}<5\Leftrightarrow\dfrac{|-10-\mu|}{5}<5\Leftrightarrow|\mu+10|<25$

$\Leftrightarrow-25<\mu+10<25\Leftrightarrow-35<\mu<15$

ii. Αν η ευθεία ε διέρχεται από το κέντρο του κύκλου, τότε οι συντεταγμένες του σημείου K θα επαληθεύουν την εξίσωσή της. Δηλαδή $3\cdot3-4\cdot4=\mu\Leftrightarrow\mu=-10$. Η τιμή $\mu=-10$ είναι δεκτή αφού βρίσκεται στο διάστημα $(-35,15)$ που βρήκαμε στο **β.i.** ερώτημα.

iii. Το ζητούμενο σημείο Γ θα είναι η κορυφή του ισοσκελούς τριγώνου ΓAB με βάση τη χορδή AB. Άρα το Γ θα ανήκει στη μεσοκάθετο ευθεία (δ) της χορδής AB που είναι ο φορέας του αποστήματος της χορδής AB και είναι ευθεία που διέρχεται από το κέντρο K του κύκλου. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας AB είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ε, με $\lambda_\varepsilon=\dfrac{3}{4}$. Επειδή $\delta\perp\varepsilon$ θα είναι $\lambda_\delta\cdot\lambda_\varepsilon=-1\Leftrightarrow\lambda_\delta=-\dfrac{4}{3}$.

Οπότε η εξίσωση της ευθείας δ είναι: $y-y_K=-\dfrac{4}{3}(x-x_K)$ ή $y-4=-\dfrac{4}{3}(x-2)\Leftrightarrow 3y-12=-4x+8$

$\Leftrightarrow 4x+3y=20$. Τα σημεία τομής της ευθείας δ με τον κύκλο είναι τα ζητούμενα σημεία. Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεών τους.

$$(\Sigma)\begin{cases}x^2+y^2-4x-8x-5=0\\ y=\dfrac{1}{3}(20-4x)\end{cases}\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow\begin{cases}x=5 \text{ ή } x=-1\\ y=0 \text{ ή } y=8\end{cases}$$

Άρα υπάρχουν δύο σημεία του κύκλου τέτοια ώστε, το τρίγωνο ΓAB να είναι ισοσκελές με βάση τη χορδή AB, τα $\Gamma(5,0)$ και $\Gamma'(-1,8)$.

114 Θέμα 4 – 16191

α. i. $\vec{AM}=(x-1,\ \psi-1)$

$\vec{BM}=(x-5,\ \psi-5)$

$\vec{AM}^2+\vec{BM}^2=32 \Leftrightarrow \left(\sqrt{(x-1)^2+(\psi-1)^2}\right)^2+\left(\sqrt{(x-5)^2+(\psi-5)^2}\right)^2=32$

$x^2-2x+1+\psi^2-2\psi+1+x^2-10x+25+\psi^2-10\psi+25=32$

$2x^2+2\psi^2-12x-12\psi+20=0 \Leftrightarrow x^2+\psi^2-6x-6\psi+10=0 \quad (1)$

ii. Είναι $A^2+B^2-4\Gamma=6^2+6^2-4\cdot 10=32>0$. Επομένως η (1) παριστάνει κύκλο.

β. i. Πρέπει $d(K,\varepsilon)=\rho \Leftrightarrow \dfrac{|3\lambda+3-2|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=2\sqrt{2} \Rightarrow |3\lambda+1|=2\sqrt{2}\sqrt{\lambda^2+1} \Rightarrow (3\lambda+1)^2=8(\lambda^2+1)$

$9\lambda^2+6\lambda+1=8\lambda^2+8 \Rightarrow \lambda^2+6\lambda-7=0 \Leftrightarrow \lambda=-7$ ή $\lambda=1$.

ii. Είναι $\lambda_{AB}=\dfrac{\psi_B-\psi_A}{\chi_B-\chi_A}=\dfrac{5-1}{5-1}=1$. Ένα διάνυσμα παράλληλο στην AB είναι το $\vec{\delta}_1=(1,1)$ ενώ ένα διάνυσμα παράλληλο στην (ε) είναι το $\vec{\delta}_2=(1,-\lambda)$.

Η γωνία των δύο ευθειών είναι η γωνία των δύο διανυσμάτων που είναι παράλληλα σε αυτές.

$\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\delta}_1,\vec{\delta}_2})=\sigma\upsilon\nu 45^\circ$ ή $\dfrac{\vec{\delta}_1\vec{\delta}_2}{|\vec{\delta}_1||\vec{\delta}_2|}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ή $\dfrac{(1,1)(1,-\lambda)}{\sqrt{1^2+1^1}\sqrt{1^2+\lambda^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ή $\dfrac{1-\lambda}{\sqrt{2}\sqrt{1+\lambda^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$2(1-\lambda)=\sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{1+\lambda^2} \Leftrightarrow 2(1-\lambda)=2\sqrt{1+\lambda^2}$ ή $1-\lambda=\sqrt{1+\lambda^2} \Leftrightarrow (1-\lambda)^2=\left(\sqrt{1+\lambda^2}\right)^2$

$1-2\lambda+\lambda^2=1+\lambda^2 \Leftrightarrow \lambda=0$.

115 Θέμα 4 – 15177

α. Έστω $N(x,y)$. Είναι $\vec{NA}=(1-x,-y)$, $\vec{NB}=(-x,-1-y)$, οπότε

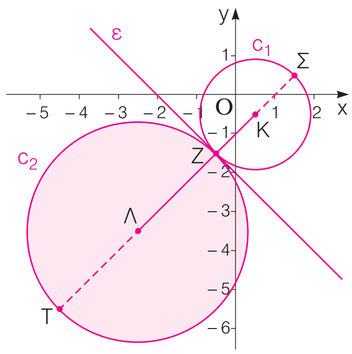
$\vec{NA}^2-\vec{NB}^2=4 \Leftrightarrow |\vec{NA}^2|-|\vec{NB}^2|=4 \Leftrightarrow (1-x)^2+y^2-x^2-(1+y)^2=4 \Leftrightarrow x+y+2=0$.

Άρα τα σημεία N ανήκουν σε ευθεία (ε): $y=-x-2$.

β. Έστω σημείο $P(x,y)$ του επιπέδου. Είναι

$2x^2+2y^2+10x+14y+21=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+5x+7y+\dfrac{21}{2}=0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \left(x+\dfrac{5}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{7}{2}\right)^2=8$.

Άρα τα σημεία P ανήκουν σε κύκλο C_2, με κέντρο $\Lambda\left(-\dfrac{5}{2},-\dfrac{7}{2}\right)$ και ακτίνα $R=2\sqrt{2}$.



γ. i. Οι κύκλοι C_1 και C_2 εφάπτονται εξωτερικά, διότι έχουν διάκεντρο

$\delta=(K\Lambda)=\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{2}\right)^2+\left(\dfrac{-1}{2}+\dfrac{7}{2}\right)^2}=3\sqrt{2}$ και ισχύει $\delta=\rho+R$.

Άρα η ελάχιστη απόσταση των σημείων των δύο κύκλων είναι μηδέν και η μέγιστη απόσταση είναι ίση με $\Sigma T=\Sigma Z+ZT=2\rho+2R=6\sqrt{2}$.

ii. Είναι $d(K,\varepsilon)=\dfrac{\left|\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}+2\right|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}=\rho$ και $d(\Lambda,\varepsilon)=\dfrac{\left|-\dfrac{5}{2}-\dfrac{7}{2}+2\right|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}=R$.

Άρα η ευθεία (ε) είναι η ζητούμενη κοινή εσωτερική εφαπτομένη.

116 Θέμα 2 – 20235

α. Είναι: C: $y^2 = 2\cdot 4x$, οπότε $p = 4$, άρα $E\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ ή $E(2, 0)$ είναι η εστία και δ: $x = -\frac{p}{2}$ ή $x = -2$, είναι η διευθετούσα.

β. Η εφαπτομένη της παραβολής C στο $\left(\frac{1}{8}, 1\right)$ είναι:

$\varepsilon_1:\ yy_1 = p(x + x_1)$ ή $\varepsilon_1:\ y\cdot 1 = 4\left(x + \frac{1}{8}\right) \Leftrightarrow \varepsilon_1: y = 4x + \frac{1}{2}$ με $\lambda_{\varepsilon_1} = 4$

Επίσης για την ευθεία ε: $8x - 2y + 3 = 0$ είναι: $\lambda_\varepsilon = -\frac{A}{B} = -\frac{8}{-2} = 4$.

Οπότε $\lambda_{\varepsilon_1} = \lambda_\varepsilon$ επομένως η $\varepsilon_1 // \varepsilon$.

117 Θέμα 2 - 21307

α. • Είναι $x^2 = 12y \Leftrightarrow x^2 = 2\cdot 6y$, οπότε $\rho = 6$, άρα η εστία της είναι το $E(0, \frac{6}{2})$ ή $E(0, 3)$.

• Για $y = 3$ έχουμε $x^2 = 12\cdot 3 \Leftrightarrow x^2 = 36 \Leftrightarrow x = 6$ ή $x = -6$.

Άρα είναι τα σημεία $(6, 3)$ και $(-6, 3)$.

β. Τα σημεία $A(6, 3)$ και $B(-6, 3)$ λόγω του ερωτήματος **α.** είναι σημεία της παραβολής. Οι εφαπτομένες ε_1, ε_2 της παραβολής στα A και B αντίστοιχα έχουν εξισώσεις:

- $\varepsilon_1: 6x = 6(y + 3) \Leftrightarrow x = y + 3 \Leftrightarrow y = x - 3$
- $\varepsilon_2: -6x = 6(y + 3) \Leftrightarrow -x = y + 3 \Leftrightarrow y = -x - 3$

γ. Το σημείο τομής των ε_1 και ε_2 έχει συντεταγμένες τη λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} y = x - 3 \\ y = -x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 3 \\ 2y = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 = x - 3 \\ y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -3 \end{cases}$$

Άρα το σημείο τομής των ε_1 και ε_2 είναι $(0, -3)$.

118 Θέμα 2 - 21306

α. • Η παραβολή με άξονα συμμετρίας τον $x'x$ και κορυφή $(0, 0)$ έχει εξίσωση $y^2 = 2px$ και εστία $E(\frac{p}{2}, 0)$.

Οπότε $\frac{p}{2} = 2 \Leftrightarrow p = 4$, άρα η εξίσωση της παραβολής είναι $y^2 = 2\cdot 4\cdot x \Leftrightarrow y^2 = 8x$.

• Για $x = 3$ έχουμε $y^2 = 8\cdot 3 \Leftrightarrow y^2 = 24 \Leftrightarrow y = \sqrt{24} \Leftrightarrow y = 2\sqrt{6}$, αφού $y > 0$.

Άρα $A(3, 2\sqrt{6})$.

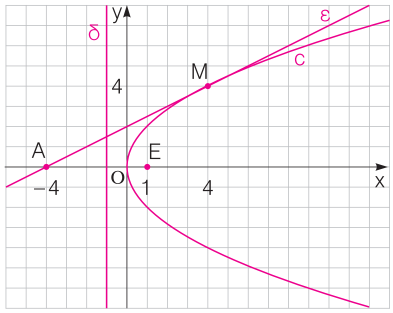
β. Η διευθετούσα (δ) της παραβολής είναι η ευθεία $x = -\frac{p}{2}$.

Οπότε: $\delta: x = -2$ την οποία σχεδιάζουμε (ευθεία κάθετη στον $x'x$ από το σημείο $(-2, 0)$).

γ. Η εφαπτομένη (ε) της παραβολής στο σημείο της A έχει εξίσωση

$\varepsilon: 2\sqrt{6}y = 4(x + 3) \Leftrightarrow \sqrt{6}y = 2(x + 3) \Leftrightarrow \sqrt{6}y = 2x + 6 \Leftrightarrow 2x - \sqrt{6}y + 6 = 0$.

119 Θέμα 2 – 18242



α. Η παραβολή C έχει εξίσωση της μορφής $y^2 = 2px$ όπου $2p = 4 \Leftrightarrow p = 2$, οπότε η εστία της έχει συντεταγμένες $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ δηλαδή $E(1, 0)$ και διευθετούσα με εξίσωση $x = -\frac{p}{2}$ δηλαδή $\delta : x = -1$.

β. Η ζητούμενη εφαπτομένη (ε) έχει εξίσωση της μορφής $yy_1 = p(x + x_1)$ δηλαδή $y \cdot 4 = 2(x+4) \Leftrightarrow 2y = x + 4$.

γ. Η ευθεία (ε) εκτός από το $M(4, 4)$ διέρχεται και από το σημείο $A(-4, 0)$.
Η παραβολή C, η διευθετούσα δ και η ευθεία (ε) φαίνονται στο διπλανό σχήμα.

120 Θέμα 4 – 18372

α. Για την $y^2 = 4x$ θα έχουμε ότι $2p = 4$, οπότε είναι $p = 2$.

Η εστία της E της παραβολής είναι το σημείο $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ ή $\left(\frac{2}{2}, 0\right)$ ή $(1, 0)$.

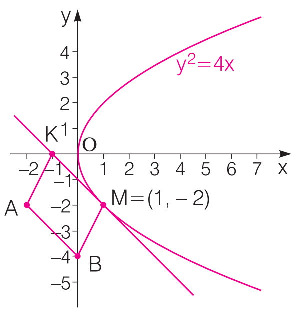
Η διευθετούσα (δ) έχει εξίσωση $x = -\frac{p}{2}$, δηλαδή $x = -\frac{2}{2} = -1$.

β. Η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο της $M(x_1, y_1)$ είναι $yy_1 = 2(x + x_1)$. Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης είναι $\lambda_1 = \frac{2}{y_1}$, ενώ ο συντελεστής διεύθυνσης της AB είναι $\lambda_2 = \frac{-4-(-2)}{0-(-2)} = \frac{-2}{2} = -1$.

Για να είναι η εφαπτομένη παράλληλη στην AB πρέπει $\lambda_1 = \lambda_2$ ή $\frac{2}{y_1} = -1$, άρα $y_1 = -2$.

Επειδή όμως το σημείο M ανήκει στην παραβολή θα επαληθεύει την εξίσωσή της, δηλαδή $y_1^2 = 4x_1$.
Αντικαθιστούμε και έχουμε $(-2)^2 = 4x_1$, άρα $x_1 = 1$.

Επομένως το σημείο M θα είναι το $(1, -2)$.



γ. Η εφαπτομένη ευθεία (ε) της παραβολής στο σημείο της $M(1, -2)$ θα είναι $yy_1 = 2(x + x_1)$ ή $-2y = 2(x+1)$ ή $-y = x + 1$ ή $x + y + 1 = 0$.

Το σημείο τομής με τον άξονα $x'x$ είναι το $K(-1, 0)$.
Από το ερώτημα **β.** γνωρίζουμε ότι $KM \,//\, AB$.

$$(KM) = \sqrt{(x_M - x_K)^2 + (y_M - y_K)^2} = \sqrt{(1-(-1))^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$$

$$(AB) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(0-(-2))^2 + (-4-(-2))^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} .$$

Τα τμήματα AB και KM είναι ίσα και παράλληλα, επομένως το τετράπλευρο $ABMK$ είναι παραλληλόγραμμο.

121 Θέμα 4 - 20092

α. i. • Αρκεί να δείξουμε ότι το σύστημα των εξισώσεων της παραβολής $y^2 = 4x$ και της ευθείας $\frac{x}{3} - \frac{y}{4} + 1 = 0$ είναι αδύνατο. Είναι

$$\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{4} + 1 = 0 \\ y^2 = 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 3y + 12 = 0 \\ y^2 = 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 3y + 12 = 0 \\ y^2 = 4x \end{cases}$$

Η εξίσωση $y^2 - 3y + 12 = 0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες, αφού $\Delta = 9 - 48 < 0$, άρα το σύστημα είναι αδύνατο.

• Είναι $\varepsilon: 4x-3y+12=0$ και $M(\frac{1}{4},1)$, οπότε

$$d(M,\varepsilon)=\frac{|4\cdot\frac{1}{4}-3\cdot 1+12|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{10}{5}=2$$

ii. • Για $y=0$ έχουμε $\frac{x}{3}=-1 \Leftrightarrow x=-3$, άρα $\Gamma(-3,0)$.

• Για $x=0$ έχουμε $\frac{y}{4}=1 \Leftrightarrow y=4$, άρα $\Delta(0,4)$.

Είναι: • $\vec{M\Gamma}=(-3-\frac{1}{4}\ ,\ 0-1)=(-\frac{13}{4}\ ,\ -1)$

• $\vec{\Gamma\Delta}=(0+3\ ,\ 4-0)=(3,4)$

Οπότε $(M\Gamma\Delta)=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}-\frac{13}{4} & -1\\ 3 & 4\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}|-13+3|=5$.

β. i. • Η εφαπτομένη ζ της παραβολής σε σημείο της (x_1,y_1) έχει εξίσωση

$\zeta: yy_1=2(x+x_1) \Leftrightarrow y=\frac{2}{y_1}\cdot x+\frac{2x_1}{y_1}$, οπότε $\lambda_\zeta=\frac{2}{y_1}$.

• Είναι $\lambda_\varepsilon=\frac{4}{3}$. Πρέπει $\lambda_\zeta=\lambda_\varepsilon \Leftrightarrow \frac{4}{3}=\frac{2}{y_1} \Leftrightarrow y_1=\frac{3}{2}$.

Είναι $y_1^2=4x_1 \Leftrightarrow (\frac{3}{2})^2=4x_1 \Leftrightarrow x_1=\frac{9}{16}$.

Άρα $\zeta: y=\frac{2}{\frac{3}{2}}x+\frac{2\cdot\frac{9}{16}}{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow y=\frac{4}{3}x+\frac{3}{4} \Leftrightarrow 16x-12y+9=0$.

ii. Για να βρούμε την απόσταση των ευθειών ζ και ε, αρκεί να βρούμε ένα σημείο, έστω K, της ζ και να υπολογίσουμε την απόσταση του σημείου αυτού από την ευθεία ε.

Για $x=0$ από την εξίσωση της ευθείας ζ έχουμε: $y=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$.

Άρα ένα σημείο της ευθείας ζ είναι το $K(0,\frac{3}{4})$ και έχουμε $\varepsilon: 4x-3y+12=0$.

Είναι $d(\zeta,\varepsilon)=d(K,\varepsilon)=\frac{|4\cdot 0-3\cdot\frac{3}{4}+12|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{|-\frac{9}{4}+\frac{48}{4}|}{\sqrt{25}}=\frac{\frac{39}{4}}{5}=\frac{39}{20}$.

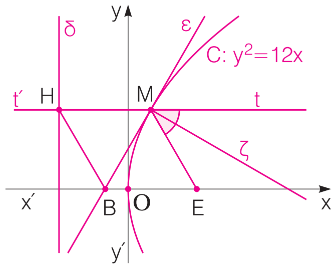
122 Θέμα 4 – 15394

α. Η εφαπτομένη της παραβολής $y^2=2px$ στο σημείο της $M(x_1,y_1)$ έχει εξίσωση $y_1y=p(x+x_1)$. Αλλά $2p=12$, άρα $p=6$. Οπότε $(\varepsilon): 2\sqrt{3}\cdot y=6(x+1) \Leftrightarrow y=\frac{3}{\sqrt{3}}(x+1) \Leftrightarrow y=\sqrt{3}(x+1) \Leftrightarrow y=\sqrt{3}\cdot x+\sqrt{3}$.

β. Η διευθετούσα (δ) έχει εξίσωση $x=-\frac{p}{2}$, άρα είναι $(\delta): x=-3$ έτσι είναι $H(-3,2\sqrt{3})$ και η εστία E έχει συντεταγμένες $E\left(\frac{p}{2},0\right)$, άρα $E(3,0)$. Επίσης για $y=0$ από την εξίσωση της (ε) παίρνουμε $0=\sqrt{3}(x+1) \Leftrightarrow x=-1$. Άρα $B(-1,0)$.

γ. Είναι $\lambda_{ME} = \dfrac{2\sqrt{3}-0}{1-3} = -\sqrt{3}$ και $\lambda_{HB} = \dfrac{2\sqrt{3}-0}{-3-(-1)} = -\sqrt{3}$.

Άρα $ME // HB$. Άρα το $MEBH$ είναι παραλληλόγραμμο. Από τον ορισμό της παραβολής είναι $MH = ME$. Οπότε είναι ρόμβος.



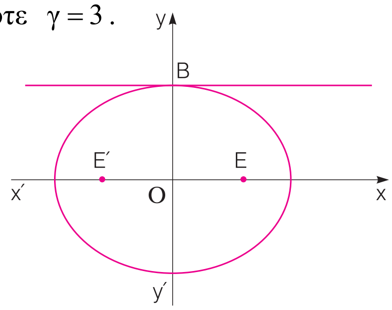
δ. Από την ανακλαστική ιδιότητα της παραβολής, γνωρίζουμε ότι η ευθεία που είναι κάθετη στην εφαπτομένη (ε) στο σημείο επαφής M, διχοτομεί την γωνία $E\hat{M}t$ όπου E η εστία της παραβολής. Αρκεί λοιπόν να βρούμε την εξίσωση της ευθείας που είναι κάθετη στην (ε) στο M. Αλλά $\lambda_\varepsilon \cdot \lambda_\zeta = -1$, έτσι $\lambda_\zeta = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Άρα $(\zeta): y - 2\sqrt{3} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x-1) \Leftrightarrow y = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}x + 2\sqrt{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow y = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}x + \dfrac{7\sqrt{3}}{3}$.

123 Θέμα 2 - 21308

α. • Είναι $\dfrac{x^2}{5^2} + \dfrac{y^2}{4^2} = 1$ και $5 > 4$, οπότε έχουμε την έλλειψη της μορφής $\dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$ με $\alpha = 5$ και $\beta = 4$.

Είναι $\beta = \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2} \Leftrightarrow \beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2 \Leftrightarrow \gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 \Leftrightarrow \gamma^2 = 25 - 16 \Leftrightarrow \gamma^2 = 9$, οπότε $\gamma = 3$.



Άρα οι εστίες της έλλειψης είναι τα σημεία $E(3\,,0)$ και $E'(-3\,,0)$.

• Η απόσταση των εστιών είναι $2\gamma = 2\cdot 3 = 6$.

β. • Ο μικρός άξονας της έλλειψης έχει μήκος $2\beta = 2\cdot 4 = 8$.

• Ο μεγάλος άξονας της έλλειψης έχει μήκος $2\alpha = 2\cdot 5 = 10$.

γ. Η εφαπτομένη (ε) της έλλειψης στο σημείο της $B(0\,,4)$ έχει εξίσωση

$\dfrac{xx_B}{\alpha^2} + \dfrac{yy_B}{\beta^2} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{0x}{25} + \dfrac{4y}{16} = 1 \Leftrightarrow y = 4$.

124 Θέμα 2 - 20883

α. Είναι $16x^2 + 25y^2 = 400 \Leftrightarrow \dfrac{16x^2}{400} + \dfrac{25y^2}{400} = \dfrac{400}{400} \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{5^2} + \dfrac{y^2}{4^2} = 1$ και $5 > 4$.

Άρα $\alpha = 5$, $\beta = 4$ και $\beta = \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2} \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow \gamma = 3$.

Άρα $(A'A) = 2\alpha = 2\cdot 5 = 10$, $(B'B) = 2\beta = 2\cdot 4 = 8$ και $E'(-3\,,0)$, $E(3\,,0)$.

β. Επειδή το $E'(-3\,,0)$ είναι σημείο του άξονα $x'x$ η παραβολή με εστία το E' έχει εξίσωση της μορφής $y^2 = 2px$.

Είναι $\dfrac{p}{2} = -3 \Leftrightarrow p = -6$, άρα $y^2 = 2\cdot(-6)x \Leftrightarrow y^2 = -12x$.

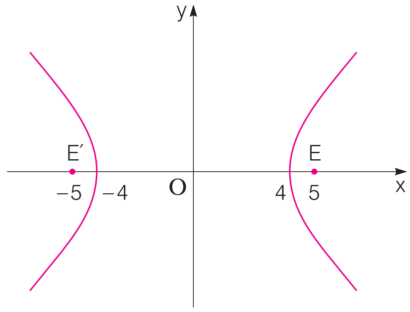
125 Θέμα 2 – 16128

α. Η υπερβολή έχει εξίσωση της μορφής $\dfrac{x^2}{\alpha^2} - \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$. Είναι $\alpha^2 = 16$ και $\beta^2 = 9$, οπότε $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 = 25$, άρα $\gamma = 5$. Έτσι, οι εστίες είναι τα σημεία $E'(-5, 0)$ και $E(5, 0)$.

β. Έχουμε ότι $|(NE') - (NE)| = 2\alpha = 2\cdot 4 = 8$.

γ. Η υπερβολή $\dfrac{x^2}{\alpha^2} - \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $(-\alpha, 0)$ και $(\alpha, 0)$, δηλαδή στα σημεία $(-4, 0)$ και $(4, 0)$.

Έτσι, έχουμε το διπλανό σχήμα.



126 Θέμα 1 - 21152

α. i. Σωστό **ii.** Λάθος **iii.** Λάθος **iv.** Σωστό **v.** Σωστό

β. Θεωρία

127 Θέμα 3 - 18243

α. $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}=2\cdot 4\cdot\frac{1}{2}=4$

β. $\vec{\gamma}\cdot\vec{\delta}=(\vec{\alpha}-\vec{\beta})\cdot(2\vec{\alpha}+\vec{\beta})=2\vec{\alpha}^2+\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-2\cdot\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-\vec{\beta}^2=2|\vec{\alpha}|^2=-\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-|\vec{\beta}|^2=2\cdot 2^2-4-4^2=-12$

γ. • $|\vec{\gamma}|^2=\vec{\gamma}^2=(\vec{\alpha}-\vec{\beta})^2=\vec{\alpha}^2-2\vec{\alpha}\vec{\beta}+\vec{\beta}^2=12$, οπότε $|\vec{\gamma}|=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

• $|\vec{\delta}|^2=\vec{\delta}^2=(2\vec{\alpha}+\vec{\beta})^2=4\vec{\alpha}^2+4\vec{\alpha}\vec{\beta}+\vec{\beta}^2=48$, οπότε $|\vec{\delta}|=\sqrt{48}=4\sqrt{3}$

δ. Είναι $\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\gamma},\vec{\delta}})=\frac{\vec{\gamma}\cdot\vec{\delta}}{|\vec{\gamma}|\cdot|\vec{\delta}|}=\frac{-12}{2\sqrt{3}\cdot 4\sqrt{3}}=-\frac{1}{2}$, οπότε $(\widehat{\vec{\gamma},\vec{\delta}})=\frac{2\pi}{3}$, αφού $0\le(\widehat{\vec{\gamma},\vec{\delta}})\le\pi$.

128 Θέμα 3 – 15152

α. Είναι $(AB)=\sqrt{(3-2)^2+(-2-1)^2}=\sqrt{10}$.

β. $(AB)=d(A,\varepsilon)\Leftrightarrow(AB)=\frac{|Ax_0+By_0+\Gamma|}{\sqrt{A^2+B^2}}\Leftrightarrow\sqrt{10}=\frac{|6+\alpha|}{\sqrt{10}}\Leftrightarrow|\alpha+6|=10\Leftrightarrow\alpha=4$ ή $\alpha=-16$.

γ. Για $\alpha=4$ η ευθεία ε γίνεται $\varepsilon: 3x+y+4=0$. Για $x=0$ είναι $y=-4$, οπότε το σημείο τομής της ε με τον άξονα $y'y$ είναι το $\Gamma(0,-4)$.

Είναι $\overrightarrow{AB}=(-3,-1)$, $\overrightarrow{A\Gamma}=(-1,-7)$ και $(AB\Gamma)=\frac{1}{2}|\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma})|=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}-3 & -1\\ -1 & -7\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\cdot 20=10$.

129 Θέμα 3 – 17944

α. • Η εστιακή απόσταση είναι $2\gamma=2\sqrt{7}\Leftrightarrow\gamma=\sqrt{7}$

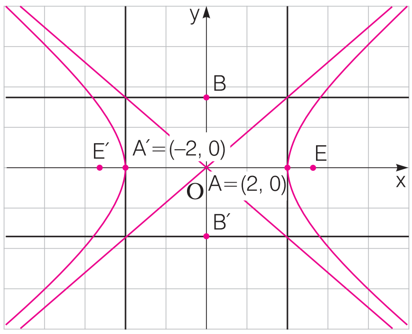
• Η εκκεντρότητα της υπερβολής είναι $\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{7}}{2}=\frac{\sqrt{7}}{\alpha}\Leftrightarrow\alpha=2$.

• Είναι $\beta^2=\gamma^2-\alpha^2=\sqrt{7}^2-2^2=3\Leftrightarrow\beta=\sqrt{3}$.

β. i. Οι κορυφές της υπερβολής έχουν συντεταγμένες $A(\alpha,0)$, $A'(-\alpha,0)$, άρα θα είναι οι $A(2,0)$, $A'(-2,0)$.

ii. Οι ασύμπτωτες της υπερβολής είναι: $\varepsilon_1: y=-\frac{\beta}{\alpha}x$, $\varepsilon_2: y=\frac{\beta}{\alpha}x$ οπότε θα έχουμε:

$\varepsilon_1: y=\frac{-\sqrt{3}}{2}x$, $\varepsilon_2: y=\frac{\sqrt{3}}{2}x$



γ. Η γραφική παράσταση και τα υπόλοιπα στοιχεία φαίνονται στο διπλανό σχήμα.