

Θέμα Α

A1.

Σχολικό Βιβλίο σελίδα 186

A2.

Σχολικό Βιβλίο σελίδα 142

A3.

Σχολικό Βιβλίο σελίδα 161

A4.

α) Σωστό

β) Σωστό

γ) Σωστό

δ) Λάθος

ε) Λάθος

Θέμα Β

B1.

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + 1, x \leq 1, g(x) = \sqrt{x}, x \geq 0$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}, \text{ δηλαδή πρέπει}$$

$$x \geq 0 \text{ και } \sqrt{x} \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1, \text{ άρα } D_{f \circ g} = [0,1] \text{ με τύπο}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = g^4(x) - 2g^2(x) + 1 = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2, x \in [0,1].$$

B2.

$$h(x) = (x-1)^2, x \in [0,1]$$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με $h'(x) = 2(x-1), x \in [0,1]$

Για $0 < x < 1$ έχουμε $x-1 < 0$ οπότε $h'(x) < 0$.

Αφού h συνεχής στο $[0,1]$ και $h'(x) < 0$ στο $(0,1)$, η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$

άρα 1-1 και αντιστρέψιμη.

$$\text{Θέτω } y = h(x), x \in [0,1]$$

$$\Leftrightarrow y = (x-1)^2, x \in [0,1], y \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y} = |x-1|, x \in [0,1], y \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y} = 1-x, x \in [0,1], y \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{y}, x \in [0,1], y \geq 0$$

Για το πεδίο ορισμού της αντίστροφης έχουμε:

$$0 \leq 1 - \sqrt{y} \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -\sqrt{y} \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{y} \leq 1 \Leftrightarrow y \in [0,1]$$

Έτσι τελικά για την αντίστροφη έχουμε:

$$h^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x}, x \in [0,1]$$

B3.

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x}, & x \in [0,1) \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \end{cases}$$

$$\text{Για } x \in [0,1) \text{ έχω } \varphi(x) = \frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{(1+\sqrt{x})(1-x)} = \frac{1}{1+\sqrt{x}}$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 1^-} \varphi(x) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = \varphi(1)$$

Επιπλέον η φ είναι συνεχής στο $[0,1)$ ως πράξεις συνεχών, επομένως η φ θα είναι συνεχής στο $[0,1]$.

Είναι $\varphi(1) = \frac{1}{2}$ και $\varphi(0) = 1$. Επειδή τώρα $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ και η συνάρτηση $\eta\mu x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, \frac{\pi}{2}]$ θα είναι: $\eta\mu\left(\frac{\pi}{6}\right) < \eta\mu\alpha < \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \frac{1}{2} < \eta\mu\alpha < 1$ και άρα $\varphi(1) < \eta\mu\alpha < \varphi(0)$

Επιπλέον, τώρα έχουμε:

- η φ είναι συνεχής στο $[0,1]$.
- Ο αριθμός $\eta = \eta\mu\alpha$ είναι μεταξύ των αριθμών $\varphi(0), \varphi(1)$

Συνεπώς από το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών (Θ.Ε.Τ.) θα υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ για το οποίο $\varphi(x_0) = \eta\mu\alpha$.

Θέμα Γ

Γ1.

$f'(x) = (-2x)'$ για κάθε $x \in (-\infty, -1)$ και επομένως από τις συνέπειες του Θεωρήματος μέσης τιμής υπάρχει $c_1 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε:

$$f(x) = -2x + c_1 \text{ για κάθε } x \in (-\infty, -1).$$

Επιπλέον για κάθε $x \in (-1, +\infty)$ έχουμε $f'(x) = (x^3 - x)'$ επομένως από τις συνέπειες του Θεωρήματος μέσης τιμής υπάρχει $c_2 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε:

$$f(x) = x^3 - x + c_2, \text{ για κάθε } x \in (-1, +\infty).$$

$$\text{Άρα } f(x) = \begin{cases} -2x + c_1, & x < -1 \\ x^3 - x + c_2, & x > -1 \\ f(-1), & x = -1 \end{cases}$$

Αφού η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων θα είναι $f(0) = 0$ και άρα $0^3 - 0 + c_2 = 0 \Leftrightarrow c_2 = 0$. Επομένως :

$$f(x) = \begin{cases} -2x + c_1, & x < -1 \\ x^3 - x, & x > -1 \\ f(-1), & x = -1 \end{cases}$$

Όμως f συνεχής στο \mathbb{R} άρα και στο -1 επομένως: $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1)$

Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (-2x + c_1) = -2 \cdot (-1) + c_1 = 2 + c_1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x^3 - x) = (-1)^3 - (-1) = -1 + 1 = 0$$

Επομένως πρέπει να ισχύει $2 + c_1 = 0 \Leftrightarrow c_1 = -2$ και $f(-1) = 0$.

$$\text{Συνεπώς } f(x) = \begin{cases} -2x - 2, & x \leq -1 \\ x^3 - x, & x > -1 \end{cases}$$

Γ2.

Θεωρούμε το σημείο επαφής $A(x_0, f(x_0))$ με $x_0 > -1$. Η εξίσωση της εφαπτομένης τότε θα είναι:

$$(\varepsilon): y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

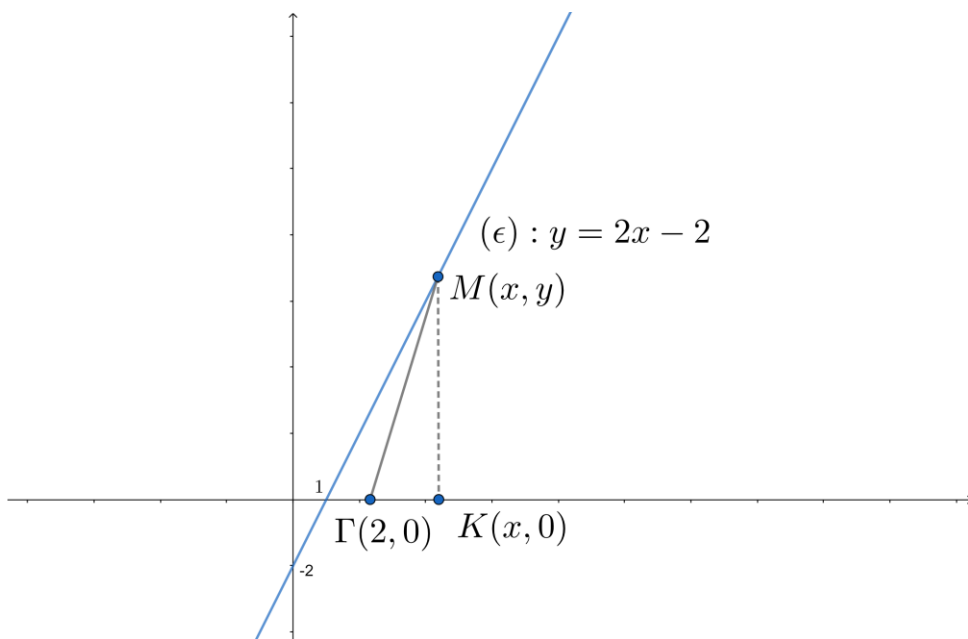
Το σημείο $N(0, -2)$ ανήκει στην ευθεία (ε) αν και μόνο αν:

$$\begin{aligned} -2 - f(x_0) &= f'(x_0)(0 - x_0) \Leftrightarrow -2 - (x_0^3 - x_0) = (3x_0^2 - 1)(-x_0) \\ \Leftrightarrow -2 - x_0^3 + x_0 &= -3x_0^3 + x_0 \Leftrightarrow -2x_0^3 = -2 \Leftrightarrow x_0^3 = 1 \Leftrightarrow x_0 = 1 \end{aligned}$$

Με αντικατάσταση του x_0 στην (ε) έχουμε ότι η ζητούμενη εξίσωση εφαπτομένης θα είναι:

$$(\varepsilon): y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Rightarrow y = 2(x - 1) \Rightarrow y = 2x - 2$$

Γ3.



Τη χρονική στιγμή t η τεταγμένη του κινητού είναι $x(t)$ και η τεταγμένη είναι $y(t) = 2x(t) - 2$ με $x(t) > 2$.

Τη χρονική στιγμή t_0 έχουμε $x(t_0) = 3$, $y(t_0) = 4$ και $x'(t_0) = 2$.

Το εμβαδόν του τριγώνου ΜΚΓ δίνεται από την συνάρτηση:

$$E(t) = \frac{1}{2} \cdot (\Gamma K) \cdot (KM) = \frac{(x(t)-2)(2x(t)-2)}{2} = \frac{2(x(t)-2)(x(t)-1)}{2} = (x(t)-2)(x(t)-1)$$

Άρα $E(t) = x^2(t) - 3x(t) + 2$ και συνεπώς θα είναι

$E'(t) = 2x(t)x'(t) - 3x'(t)$. Επομένως τη χρονική στιγμή t_0 θα είναι:

$$E'(t_0) = 2 \cdot 3 \cdot 2 - 3 \cdot 2 = 6 \text{ τ.μ./δευτερόλεπτο.}$$

Γ4.

$$\text{Έστω } A = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} + \frac{f(-x)}{1-x^3} \right]$$

Για το $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}$ εργαζόμαστε ως εξής:

Θέτουμε $u = f(x)$. Τότε όταν $x \rightarrow -\infty$ θα έχουμε $u \rightarrow u_0$ όπου

$$u_0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x - 2) = +\infty$$

$$\text{και επομένως } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu u}{u} = 0.$$

Για κάθε $u > 0$ έχουμε:

$$\left| \frac{\eta\mu u}{u} \right| = \frac{|\eta\mu u|}{|u|} \leq \frac{1}{|u|} = \frac{1}{u} \Leftrightarrow -\frac{1}{u} \leq \frac{\eta\mu u}{u} \leq \frac{1}{u}$$

Τώρα είναι $\lim_{u \rightarrow +\infty} -\frac{1}{u} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{1}{u} = 0$ και άρα με βάση το κριτήριο παρεμβολής θα είναι:

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu u}{u} = 0$$

Για το $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(-x)}{1-x^3}$ εργαζόμαστε ως εξής:

Θέτουμε $u = -x$. Τότε όταν $x \rightarrow -\infty$ θα έχουμε $u \rightarrow u_0$ όπου $u_0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(-x)}{1-x^3} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{f(u)}{1+u^3} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u^3-u}{u^3+1} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u^3}{u^3} = 1.$$

$$\text{Έτσι τελικά } A = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} + \frac{f(-x)}{1-x^3} \right] = 0 + 1 = 1.$$

Θέμα Δ

Δ1 i)

$$f(x) = x - \ln(3x), x \in (0, +\infty)$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = 1 - \frac{3}{3x} = \frac{x-1}{x}, x > 0$

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x - 1 < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$

Η f συνεχής στο $(0,1]$ και $f'(x) < 0$ για $x \in (0,1)$ επομένως f γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$.

Η f συνεχής στο $[1, +\infty)$ και $f'(x) > 0$ για $x \in (1, +\infty)$ επομένως f γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

Η f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1 = (0,1]$ επομένως

$$f(\Delta_1) = \left[f(1), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) = [1 - \ln 3, +\infty) \text{ καθώς:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - \ln(3x)) = +\infty, \text{ διότι}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(3x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln 3 + \ln x] = -\infty$$

Η f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2 = [1, +\infty)$ επομένως

$$f(\Delta_2) = \left[f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [1 - \ln 3, +\infty) \text{ καθώς:}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\ln(3x)}{x} \right) = +\infty \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(3x)}{x} \stackrel{D.L.H.}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Παρατηρούμε ότι $e < 3 \Rightarrow \ln e < \ln 3 \Rightarrow 1 - \ln 3 < 0$

- Το $0 \in f(\Delta_1)$, άρα είναι μια τιμή που παίρνει η f στο Δ_1 . Επομένως υπάρχει $x_1 \in \Delta_1$ τέτοιο ώστε $f(x_1) = 0$. Επειδή η f γνησίως φθίνουσα στο Δ_1 το x_1 είναι η μόνη ρίζα της f στο Δ_1 .
- Το $0 \in f(\Delta_2)$, άρα είναι μια τιμή που παίρνει η f στο Δ_2 . Επομένως υπάρχει $x_2 \in \Delta_2$ τέτοιο ώστε $f(x_2) = 0$. Επειδή η f γνησίως αύξουσα στο Δ_2 το x_2 είναι η μόνη ρίζα της f στο Δ_2 .

Σημείωση: Επειδή $f(1) = 1 - \ln 3 < 0$ προκύπτει ότι $x_1 < 1 < x_2$.

Δ1. ii)

Η $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$, είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f''(x) = \frac{1}{x^3} > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$, άρα η f κυρτή στο $(0, +\infty)$.

Δ2.

Το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f και τον άξονα $x'x$, δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$E = \int_{x_1}^{x_2} |f(x)| dx$$

Η f είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται στο (x_1, x_2) άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο σε αυτό. Επειδή $1 \in (x_1, x_2)$ και $f(1) = 1 - \ln 3 < 0$, θα είναι $f(x) < 0$, για $x \in (x_1, x_2)$, επομένως $f(x) \leq 0$ για $x \in [x_1, x_2]$. Άρα:

$$\begin{aligned} E &= - \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = - \int_{x_1}^{x_2} (x)' f(x) dx = -[xf(x)]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} xf'(x) dx \\ &= -[x_2 f(x_2) - x_1 f(x_1)] + \int_{x_1}^{x_2} (x-1) dx = \\ &= 0 + \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_{x_1}^{x_2} = \frac{1}{2} \cdot (x_2 - x_1)(x_1 + x_2 - 2). \quad (1) \end{aligned}$$

Παρατήρηση: Επειδή $|f|$ είναι συνεχής και μη αρνητική στο $[x_1, x_2]$ και δεν μηδενίζεται ταυτοτικά στο διάστημα αυτό θα είναι $E > 0$.

Δ3.

- Η f είναι αρνητική στο (x_1, x_2)
- $0 < x < x_1 \Rightarrow f(x) > f(x_1) = 0$, αφού f γνησίως φθίνουσα στο $(0, x_1] \subseteq (0, 1]$
- $x > x_2 \Rightarrow f(x) > f(x_2) = 0$, αφού f γνησίως αύξουσα στο $[x_2, +\infty) \subseteq [1, +\infty)$.

Επομένως για να δείξουμε ότι $f(2 - x_1) < 0$ αρκεί να δείξουμε ότι $2 - x_1 \in (x_1, x_2)$

- $x_1 < 2 - x_1 \Leftrightarrow 2x_1 < 2 \Leftrightarrow x_1 < 1$ που ισχύει
- $2 - x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 - 2 > 0$ το οποίο ισχύει αφού από την (1) έχω διαδοχικά ότι:
 $E > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot (x_2 - x_1)(x_1 + x_2 - 2) > 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 - 2 > 0$, αφού $x_2 > x_1$.

Άρα $x_1 < 2 - x_1 < x_2$ και $f(2 - x_1) < 0$.

Δ4.

Για $x > 0$, η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα

$$2f(x) = f(1) + f'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow [f(x) - f(1)] + [f(x) - f'(x_2)(x - x_2)] = 0. \quad (2)$$

Παρατηρούμε ότι $f(x) \geq f(1)$ για κάθε $x > 0$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 1$.

Η εφαπτομένη της C_f στο $\Sigma(x_2, f(x_2))$ έχει εξίσωση:

$$(\varepsilon): y - f(x_2) = f'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow y = f'(x_2)(x - x_2).$$

Επειδή η f είναι κυρτή, η C_f βρίσκεται πάνω από την (ε) με εξαίρεση το σημείο επαφής. Επομένως: $f(x) \geq f'(x_2)(x - x_2)$, για κάθε $x > 0$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = x_2$.

Άρα:

- $f(x) - f(1) \geq 0$ για κάθε $x > 0$
- $f(x) - f'(x_2)(x - x_2) \geq 0$ για κάθε $x > 0$

και οι ισότητες ισχύουν για διαφορετικές τιμές του x . Επομένως :

$[f(x) - f(1)] + [f(x) - f'(x_2)(x - x_2)] > 0$ για κάθε $x > 0$ και η (2) είναι αδύνατη.