**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**
**ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ**
**ΔΕΥΤΕΡΑ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2022**
**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**
**ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

## ΘΕΜΑ Α

**Α1.** Έστω $f$ μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν $F$ είναι μια παράγουσα της $f$ στο Δ, τότε να αποδείξετε ότι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής

$$G(x) = F(x) + c ,$$

όπου $c \in \mathbb{R}$**,** είναι παράγουσες της $f$ στο Δ και

- κάθε άλλη παράγουσα $G$ της $f$ στο Δ παίρνει τη μορφή

$$G(x) = F(x) + c ,$$

με $c \in \mathbb{R}$.

**Μονάδες 7**

**Α2.** Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat.

**Μονάδες 4**

**Α3.** Πότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης $f$;

**Μονάδες 4**

**Α4.** *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

**α)** Αν $0 < \alpha < 1$ τότε $\lim\limits_{x \to +\infty} \alpha^x = 0$.

**β)** Αν η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο $[0,1]$, παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ και $f'(x) \neq 0$, για όλα τα $x \in (0,1)$, τότε $f(0) \neq f(1)$.

**γ)** Η συνάρτηση $f(x) = \sigma\varphi x$ είναι παραγωγίσιμη στο

$$R_2 = \mathbb{R} - \{x \,|\, \eta\mu x = 0\} \text{ και ισχύει } f'(x) = -\frac{1}{\eta\mu^2 x} .$$

**δ)** Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}=1$.

**ε)** Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \geq 0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(x)\geq 0$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η συνάρτηση $f:(-\infty,1]\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=x^4-2x^2+1$ και η συνάρτηση $g:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(x)=\sqrt{x}$.

**Β1.** Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $h=f\circ g$.

**Μονάδες 6**

**Β2.** Αν $h(x)=(x-1)^2$, $x\in[0,1]$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h$ είναι "1–1" (μονάδες 3) και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση $h^{-1}$ της $h$ (μονάδες 6).

**Μονάδες 9**

**Β3.** Έστω $h^{-1}(x)=1-\sqrt{x}$, $x\in[0,1]$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση: $\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{h^{-1}(x)}{1-x}, & x\in[0,1)\\[2mm] \dfrac{1}{2}, & x=1\end{cases}$.

(i) Να αποδείξετε ότι για τη συνάρτηση $\varphi$ ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στο $[0,1]$. (μονάδες 6)

(ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $\varphi(x_0)=\eta\mu\alpha$, όπου $\dfrac{\pi}{6}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$. (μονάδες 4)

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η γραφική παράσταση της οποίας διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Δίνεται ακόμα ότι η $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$ και για την παράγωγο $f'$ της $f$ ισχύει ότι:

$$f'(x)=\begin{cases}-2 & , \quad x<-1\\ 3x^2-1 & , \quad x>-1\end{cases}.$$

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι: $f(x)=\begin{cases}-2x-2 & , \quad x\le -1\\ x^3-x & , \quad x>-1\end{cases}$.

**Μονάδες 6**

**Γ2.** Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της $f$ σε σημείο $A(x_0,f(x_0))$ με $x_0>-1$, η οποία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο $-2$.

**Μονάδες 5**

**Γ3.** Έστω $y=2x-2$ η εξίσωση της ευθείας (ε) του ερωτήματος Γ2. Ένα σημείο $M(x,y)$ με $x>2$ κινείται κατά μήκος της ευθείας (ε). Έστω ακόμα Ε το εμβαδόν του τριγώνου ΜΚΓ, όπου Κ είναι η προβολή του σημείου Μ στον άξονα $x'x$ και Γ είναι το σημείο με συντεταγμένες (2,0). Τη χρονική στιγμή $t_0$ κατά την οποία το σημείο $M$ διέρχεται από το σημείο Β(3,4) ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου $M$ είναι 2 μονάδες ανά δευτερόλεπτο. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού Ε τη χρονική στιγμή $t_0$.

**Μονάδες 6**

**Γ4.** Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)}+\dfrac{f(-x)}{1-x^3}\right]$.

**Μονάδες 8**

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x)=x-\ln(3x)$$

**Δ1.** **i)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες $x_1,x_2$, με $x_1<1<x_2$. (μονάδες 6)

**ii)** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f$ είναι κυρτή. (μονάδες 2)

**Μονάδες 8**

Στα παρακάτω ερωτήματα, $x_1$ και $x_2$ είναι οι ρίζες που αναφέρονται στο ερώτημα Δ1.

**Δ2.** Αν $E$ είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f$ και τον άξονα $x'x$, να αποδείξετε ότι:

$$E = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_1 + x_2 - 2) \ .$$

**Μονάδες 7**

**Δ3.** Να αποδείξετε ότι: $f(2 - x_1) < 0$.

**Μονάδες 4**

**Δ4.** Να εξετάσετε αν η εξίσωση: $2f(x) + \ln 3 = 1 + f'(x_2)(x - x_2)$ έχει λύση.

**Μονάδες 6**

## <u>ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)</u>

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά αλλού στο τετράδιό σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**