ΟΜΙΛΟΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ (ΑΛΓΕΒΡΑΣ) ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ - ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΣΑΒΒΑΤΟ 4 ΙΟΥΝΙΟΥ 2022

ΘΕΜΑ Α

Α1. ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ σελ 28-29.

Α2. ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ σελ 87.

Α3. α. ΛΑΘΟΣ
β. ΣΩΣΤΟ
γ. ΛΑΘΟΣ

Α4. α. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$ με $x>0$

β. $(f(g(x)))' = f'(g(x))\cdot g'(x)$

ΘΕΜΑ Β

B1. 25, 10, 5, 20, 15

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i}{5} = \frac{25+10+5+20+15}{5} = \frac{75}{5} = 15 \Longrightarrow \boxed{\bar{x} = 15}$$

$$R = x_{max} - x_{min} = 25 - 5 = 20 \Longrightarrow \boxed{R = 20}$$

B2.
$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{5} (x_i - \bar{x})^2}{5} = \frac{(25-15)^2 + (10-15)^2 + (5-15)^2 + (20-15)^2 + (15-15)^2}{5}$$

$$= \frac{100 + 25 + 100 + 25 + 0}{5} = \frac{250}{5} = 50 \Longrightarrow \boxed{s^2 = 50}$$

B3.
$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{50} = \sqrt{2 \cdot 25} = \sqrt{2}\,\sqrt{25} = 5 \cdot \sqrt{2} \Longrightarrow s = 5 \cdot \sqrt{2}$$

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{15} = \frac{\sqrt{2}}{3} = 0{,}47 \text{ ή } 47\%$$

Επειδή $CV = 47\% > 10\%$ το δείγμα δεν είναι ομοιογενές

ΟΜΙΛΟΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΘΕΜΑ Γ

$f(x) = x^3 - 9\cdot x^2 + a\cdot x + 1 \qquad x, a \in \mathbb{R}$

Γ1. Η f είναι παραγωγίσιμη με

$f'(x) = 3\cdot x^2 - 9\cdot 2\cdot x + a\cdot 1 + 0$

$f'(x) = 3\cdot x^2 - 18\cdot x + a, \ x \in \mathbb{R}$ (1)

Αφού ο ρυθμός μεταβολής της f για $x=1$ είναι ίσος με 0, τότε:

$f'(1) = 0 \overset{(1)}{\iff} 3\cdot 1^2 - 18\cdot 1 + a = 0 \iff 3 - 18 + a = 0 \iff \boxed{a = 15}$

Γ2 Για $a = 15$: $f(x) = x^3 - 9\cdot x^2 + 15\cdot x + 1$

$f'(x) = 3\cdot x^2 - 18\cdot x + 15$

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(2, f(2))$ έχει εξίσωση της μορφής

$\varepsilon: y = \lambda\cdot x + \beta$ όπου η κλίση $\lambda = f'(2) = 3\cdot 4 - 36 + 15 = -9$.

Άρα η $\varepsilon: y = -9\cdot x + \beta$

Επειδή η ε διέρχεται από το σημείο $M(2, f(2))$

θα ισχύει $f(2) = -9\cdot 2 + \beta \iff$

$2^3 - 9\cdot 2^2 + 15\cdot 2 + 1 = -18 + \beta \iff$

$8 - 9\cdot 4 + 30 + 1 + 18 = \beta \iff \beta = 21$

Άρα η ε έχει εξίσωση: $\boxed{y = -9\cdot x + 21}$

Γ3. $f'(x) = 3\cdot x^2 - 18\cdot x + 15 = 3\cdot(x^2 - 6\cdot x + 5)$

$= 3\cdot(x^2 - x - 5\cdot x + 5) = 3\cdot[x(x-1) - 5\cdot(x-1)]$

$= 3\cdot(x-1)(x-5)$

$$f'(x) = 3\cdot(x-1)\cdot(x-5) \quad (1)$$

Τα πρόσημα της $f'(x)$ και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	ΤΜ	$\searrow$	ΤΕ	$\nearrow$	

- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (5, +\infty)$
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (1, 5)$

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1]$
- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, 5]$
- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[5, +\infty)$

Η f παρουσιάζει:

- τοπικό μέγιστο στο $x_1 = 1$, το $f(1) = 1 - 9 + 15 + 1 = 8$
- τοπικό ελάχιστο στο $x_2 = 5$, το $f(5) = 125 - 225 + 75 + 1 = -24$

Γ4. $\lim_{x\to 1} \frac{f'(x)}{x^2-1} \overset{(1)}{=} \lim_{x\to 1} \frac{3\cdot\cancel{(x-1)}\cdot(x-5)}{\cancel{(x-1)}\cdot(x+1)} = \frac{3\cdot(1-5)}{1+1} = \frac{-3\cdot 4}{2} = -6$

ΘΕΜΑ Δ

$$f(x) = \frac{x}{x+1}$$

Δ1. Για να ορίζεται η f πρέπει: $x+1 \neq 0 \iff x \neq -1$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο $A = (-\infty,-1) \cup (-1,+\infty) = \mathbb{R} - \{-1\}$

Η f είναι παραγωγίσιμη με:

$$f'(x) = \frac{(x)'(x+1) - x\cdot(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{1\cdot(x+1) - x\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{\cancel{x}+1-\cancel{x}}{(x+1)^2}$$

οπότε $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$, για κάθε $x \in A$

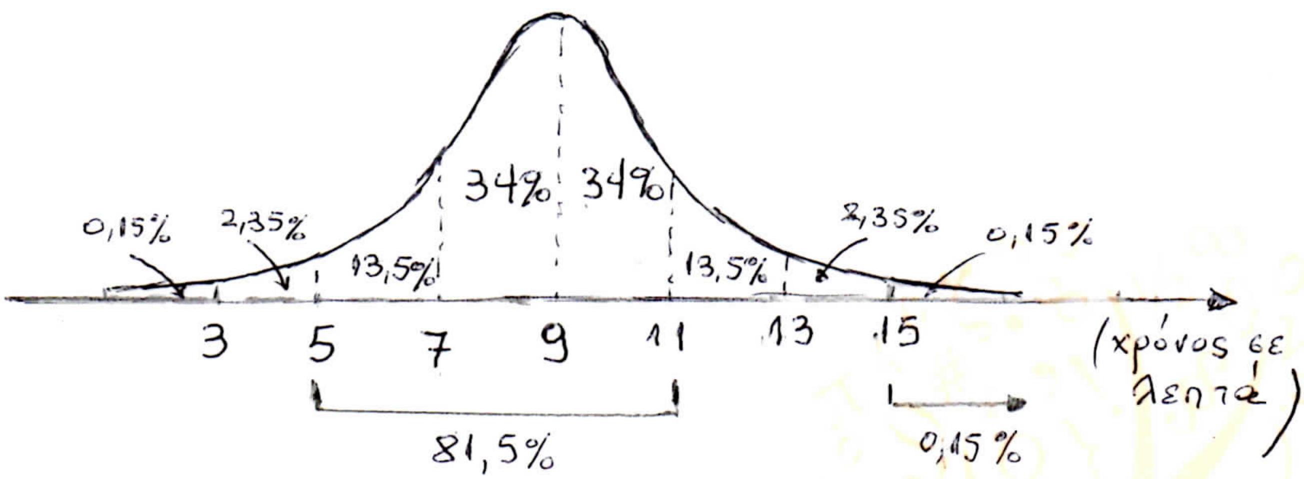
Δ2. Έχουμε $f'(2) = \frac{1}{(2+1)^2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

$$f'(1) = \frac{1}{(1+1)^2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

Άρα: $\bar{x} = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{\frac{1}{9}} = 9$

$$s = \frac{1}{2\cdot f'(1)} = \frac{1}{2\cdot\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Δ3. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η κανονική κατανομή που ακολουθεί ο χρόνος επιστροφής των μαθητών η οποία έχει μέση τιμή $\bar{x}=9$ και τυπική απόκλιση $s=2$.



- Το ποσοστό των μαθητών που έχουν χρόνο επιστροφής από 5 έως 11 λεπτά είναι:

  $13,5\% + 34\% + 34\% = 81,5\%$

  Επομένως το πλήθος των μαθητών που έχουν το παραπάνω χρόνο επιστροφής είναι:

  $81,5\% \cdot \nu = \frac{81,5}{100} \cdot 2000 = 1630$ μαθητές

- Το ποσοστό των μαθητών που έχουν χρόνο επιστροφής πάνω από 15 λεπτά είναι 0,15%

  Επομένως το πλήθος των μαθητών που έχουν το παραπάνω χρόνο επιστροφής είναι:

  $0,15\% \cdot \nu = \frac{0,15}{100} \cdot 2000 = 3$ μαθητές

Δ4. Αν οι αρχικές παρατηρήσεις του χρόνου επιστροφής των μαθητών είναι $x_1, x_2, \ldots, x_{2000}$ και $y_1, y_2, \ldots, y_{2000}$ είναι οι παρατηρήσεις μετά την αύξηση του χρόνου επιστροφής κατά 3 λεπτά, τότε θα ισχύει

$$y_i = x_i + 3 \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, 2000$$

Άρα $\bar{y} = \bar{x} + 3 = 9 + 3 = 12$ λεπτά

και $S_y = S_x = 2$ λεπτά